Projet 1 — *Sélection de réserves naturelles*

De nombreux pays se sont engagés à stopper la perte de biodiversité dans un avenir proche et ont adopté pour cela différentes stratégies dont la protection d'aires terrestres et maritimes. Ces aires protégées - ou réserves naturelles - contribuent de façon décisive au maintien de la biodiversité car elles visent directement la protection des éléments dont le risque de disparition est le plus fort. Ces éléments concernent la faune, la flore, les roches, minéraux et fossiles, ou encore de grands sites géomorphologiques. L'objectif est d'assurer à chaque espèce ou site menacé un espace où son avenir est garanti. Ainsi, de nombreux programmes gouvernementaux et non gouvernementaux cherchent à restaurer et protéger des habitats dans le but de préserver des espèces. Lors de la 10ème conférence de la Convention sur la diversité biologique qui s'est tenue à Nagoya en octobre 2010 un plan de protection de la biodiversité pour 2020 a été adopté. Ce plan comporte 20 objectifs dont la restauration d'habitats dégradés et la définition d'aires protégées (terrestres, marines et côtières). Commentant ce plan, le président de l'organisation environnementale Conservatoire International, souligne que le problème n'est pas seulement quantitatif mais aussi qualitatif et qu'il faut donc protéger les zones les plus riches et les plus importantes en termes de biodiversité. Les ressources disponibles pour cette protection étant évidemment limitées, il est important de les utiliser de façon efficace.

Problème de base et variantes

On s'intéresse à un ensemble d'espèces à protéger, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$, vivant sur un ensemble de parcelles - ou sites -, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, répartis sur un territoire. Pour chaque parcelle, on connaît toutes les espèces qui y vivent et l'on suppose que ces espèces survivront dans cette parcelle si celle-ci est protégée. Le problème de base consiste à déterminer le plus petit sous-ensemble de parcelles permettant de protéger toutes les espèces considérées. Associons à chaque parcelle s_i une variable booléenne x_i qui vaut 1 si et seulement si cette parcelle est retenue pour être protégée. Posons $P = \{1, \ldots, p\}$ et $N = \{1, \ldots, n\}$. La détermination d'une réserve optimale, c'est-à-dire d'un sous-ensemble optimal de parcelles, peut se formuler par le programme mathématique :

$$(P1)\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i \in N} x_i \\ \text{s.t.} \\ \quad \displaystyle\sum_{i \in S_k} x_i \geqslant 1 \qquad k \in P \\ \quad x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

où S_k désigne l'ensemble des indices des parcelles permettant de protéger l'espèce e_k. La fonction objectif vise à minimiser le nombre de parcelles retenues et les p contraintes d'inégalité expriment que, pour chaque espèce considérée, au moins une parcelle la contenant doit être retenue. Le programme linéaire en variables binaires $(P1)$ est connu en recherche opérationnelle sous le nom de *problème de recouvrement (Set Covering Problem).* Il existe de nombreuses variantes de $(P1)$. On peut chercher à minimiser l'aire totale de la réserve ou encore son coût total lorsqu'un coût est attribué à chaque parcelle, plutôt que le nombre de parcelles. La définition d'une réserve optimale peut aussi être abordée en cherchant à déterminer un sous-ensemble de parcelles qui maximise le nombre d'espèces protégées. Dans ce cas, le nombre de parcelles de la réserve ou son aire ou encore son coût est limité. On obtient alors le programme mathématique

$$
(P2)\begin{cases}
\max \displaystyle\sum_{k\in P} y_k \\
\text{s.t.} \\
\quad y_k \leqslant \displaystyle\sum_{i\in S_k} x_i \qquad k\in P \\
\quad \displaystyle\sum_{i\in N} a_i x_i \leqslant B \\
\quad x\in\{0,1\}^n \\
\quad y\in\{0,1\}^n
\end{cases}
$$

Dans une solution optimale de $(P2)$, la variable booléenne y_k prend la valeur 1 ssi l'espèce e_k est présente dans au moins une des parcelles de la réserve. Les contraintes de $(P1)$ et $(P2)$ peuvent être ajustées de façon à imposer que chaque espèce soit représentée dans au moins r parcelles plutôt que dans une seule. Dans $(P1)$, le second membre des contraintes devient r et dans $(P2)$ les contraintes $y_k \leqslant \displaystyle\sum_{i\in S_k} x_i$ deviennent $ry_k \leqslant \displaystyle\sum_{i\in S_k} x_i$. Polasky et al. (2001)[1] ont utilisé ce modèle pour étudier la protection de 415 espèces de vertébrés terrestres réparties dans 289 parcelles de l'état de l'Oregon aux États-Unis.

Réserves naturelles avec zone centrale et zone tampon

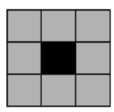
On considère deux types d'espèces à protéger, des espèces en danger et des espèces communes, et l'on distingue deux types de zones protégées, des zones centrales et des zones tampons qui protègent la zone centrale des nuisances entraînées par les activités humaines extérieures à la réserve. Pour être protégée (avec une certaine probabilité), une espèce en danger doit être présente dans une zone centrale et une espèce commune doit être présente soit dans une zone centrale soit dans une zone tampon. On considère qu'une parcelle sélectionnée fait partie d'une zone centrale si toutes les parcelles qui l'entourent sont elles aussi sélectionnées soit dans la zone centrale soit dans la zone tampon (le décideur peut définir une zone tampon plus ou moins importante). On connaît la probabilité p_{ki} que l'espèce e_k, présente dans la parcelle s_i, survive dans cette parcelle si celle-ci est protégée. On suppose que ces probabilités sont indépendantes et que $0 \leqslant p_{ki} \leqslant 1$. Le problème consiste à déterminer un sous-ensemble de parcelles de coût minimal et tel que, pour chaque espèce e_k, la probabilité de présence dans la réserve, c'est-à-dire dans ce sous-ensemble de parcelles, soit supérieure ou égale à une valeur donnée α_k.

Travail demandé

i) Modéliser le problème de la détermination d'une réserve optimale avec zone centrale et zone tampon par un programme linéaire en variables 0-1.

ii) Résoudre l'instance présentée ci-dessous. Elle comporte 3 espèces rares numérotées de 1 à 3 et 3 espèces communes numérotées de 4 à 6. On étudiera les cas suivants :
- $\alpha_k = 0.5$ $(k = 1, \ldots, 6)$,
- $\alpha_k = 0.9$ $(k = 1, \ldots, 3)$, et $\alpha_k = 0.5$ $(k = 4, \ldots, 6)$,
- $\alpha_k = 0.5$ $(k = 1, \ldots, 3)$, et $\alpha_k = 0.9$ $(k = 4, \ldots, 6)$,
- $\alpha_k = 0.8$ $(k = 1, \ldots, 3)$, et $\alpha_k = 0.6$ $(k = 4, \ldots, 6)$.

La zone géographique considérée est représentée par une matrice de 10×10 parcelles carrées et une parcelle retenue appartient à une zone centrale de la réserve ssi les 8 parcelles qui l'entourent font partie de la réserve.



1. Polasky, S., Camm, J.D., Garber-Yonts, B. (2001). Selecting biological reserves cost-effectively : an application to terrestrial vertebrate conservation in Oregon. Land Economics, 77, 68-78.

iii) Pour chacune des 4 instances, donner le temps de calcul, le nombre de noeuds développés dans l'arbre de recherche, le coût de la solution et la probabilité de survie de chaque espèce dans la réserve.

iv) Étudier le comportement du programme linéaire en variables 0-1 en fonction de la taille des instances. Pour cela, on engendrera des jeux d'essai aléatoirement.

v) Écrire le modèle légèrement différent qui correspond à la détermination, sous une contrainte budgétaire, d'un sous-ensemble de parcelles tel que l'espérance mathématique du nombre d'espèces qui survivront dans la réserve formée soit maximale. Peut-on formuler ce problème par un programme linéaire en variables mixtes ?

Description des instances et solutions

Instance

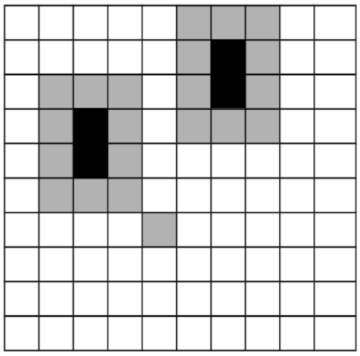
6	6	6	4	4	4	4	8	8	8
6	6	6	4	4	4	4	8	8	8
6	6	6	4	4	4	4	8	8	8
5	5	5	3	3	3	3	7	7	7
5	5	5	3	3	3	3	7	7	7
5	5	5	3	3	3	3	7	7	7
5	5	5	3	3	3	3	7	7	7
4	4	4	6	6	6	6	5	5	5
4	4	4	6	6	6	6	5	5	5
4	4	4	6	6	6	6	5	5	5

Coût de protection de chaque parcelle en unités de coût

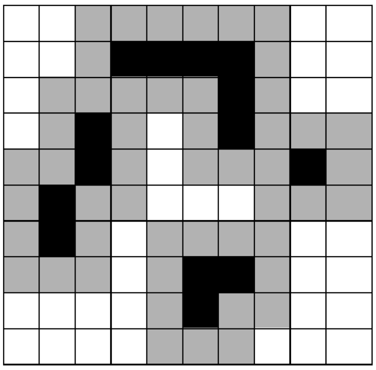
	4:0.3	**6**:0.4	**4**:0.3 **6**:0.4		**6**:0.5	**6**:0.3	**6**:0.3		**5**:0.4
5:0.3			**3**:0.2	**3**:0.3		**2**:0.2 **3**:0.4		**6**:0.2	**5**:0.3
	4:0.4			**5**:0.5 **6**:0.4		**2**:0.4 **3**:0.4		**6**:0.4	**6**:0.2
		1:0.4 **4**:0.4				**2**:0.2 **3**:0.5		**6**:0.3	
4:0.3		**1**:0.3 **4**:0.2		**4**:0.2 **6**:0.4				**2**:0.4 **3**:0.2	**2**:0.3 **3**:0.4
	1:0.4 **4**:0.2	**4**:0.4 **5**:0.4			**5**:0.2	**5**:0.2			
	2:0.5			**4**:0.4 **5**:0.4				**4**:0.3 **5**:0.5	
6:0.5					**1**:0.3	**1**:0.2 **4**:0.2		**4**:0.5 **5**:0.4	
6:0.2	**3**:0.3 **5**:0.5	**5**:0.2	**5**:0.4	**1**:0.2 **5**:0.4	**1**:0.4 **2**:0.2	**2**:0.2 **4**:0.4			
		6:0.2							

Probabilités de survie de chaque espèce dans chaque parcelle (**espèce** :probabilité)

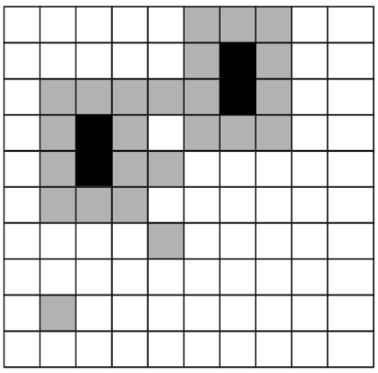
Solutions



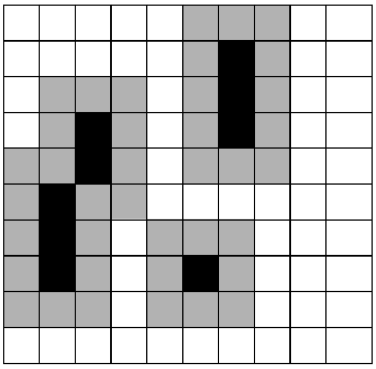
$\alpha_k = 0.5$ $(k = 1, \ldots, 6)$, coût $= 119$
Probabilités de survie : $(0.58, 0.52, 0.64, 0.92, 0.64, 0.76)$



$\alpha_k = 0.9$ $(k = 1, \ldots, 3)$, $\alpha_k = 0.5$ $(k = 4, \ldots, 6)$, coût $= 327$
Probabilités de survie : $(0.92, 0.91, 0.92, 0.98, 0.89, 0.98)$



$\alpha_k = 0.5$ $(k = 1, \ldots, 3)$, $\alpha_k = 0.9$ $(k = 4, \ldots, 6)$, coût $= 130$
Probabilités de survie : $(0.58, 0.52, 0.64, 0.93, 0.91, 0.91)$



$\alpha_k = 0.8$ $(k = 1, \ldots, 3)$, $\alpha_k = 0.6$ $(k = 4, \ldots, 6)$, coût = 211
Probabilités de survie : $(0.82, 0.81, 0.82, 0.97, 0.78, 0.88)$