Cnam
Master Parisien de Recherche Opérationnelle

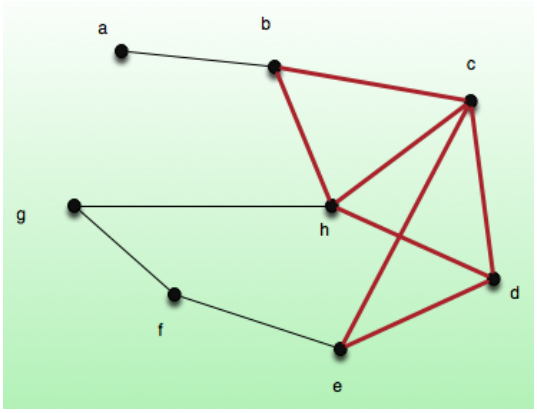
---

Programmation Mathématique Avancée.

# Programmation Quadratique

**Exercice 1 — *Le problème du k-cluster***

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ non orienté ayant $n$ sommets, et $m$ arêtes, le problème du $k$-cluster consiste à déterminer le sous-graphe de $G$ le plus dense possible de $k$ sommets, i.e. le sous-graphe $G_S = (S, E_S)$ de $k$ sommets avec le plus d'arêtes possible.




Solution pour $k = 5$
Source : wikipedia

1. Proposez une formulation quadratique du $k$-cluster, notée $(QP)$.
2. Proposez 2 linéarisations de $(QP)$. Indiquer pour chacune la taille des formulations.

En notant $\bar{E}$ l'ensemble des arêtes n'appartenant pas à $E$, i.e. son complémentaire dans le graphe complet, le problème du $k$-cluster peut aussi consister à minimiser le nombre d'arêtes manquantes dans le sous-graphe par rapport à un sous-graphe complet de $k$ sommets.

1. Proposez une autre formulation quadratique du $k$-cluster, notée $(QP')$.
2. Proposez 2 linéarisations de $(QP')$. Indiquer pour chacune la taille des formulations.
3. Dans quels cas la formulation $(QP')$ est-elle plus intéressante que la formulation $(QP)$ ?
4. Implémenter (en Julia avec JuMP) une reformulation linéaire de chaque modélisation et comparer sur les instances proposées.

**Exercice 2 — *Problème de localisation et transport***

On considère une entreprise qui livre avec des camions de capacité $C$ m$^3$. Elle cherche à louer $n$ entrepôts $E_1, E_2, \ldots, E_n$, sachant que le prix de la location de l'entrepôt $E_i$ est de $p_i$ euros et que sa capacité de stockage est $c_i \times C$.

La région est découpée en $p$ zones $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$, et l'entreprise doit livrer dans ces zones avec une demande $C \times d_j$. Le coût de livraison d'un camion depuis l'entrepôt $E_i$ vers la zone $Z_j$ vaut $l_{ij}$.

On considère le problème de déterminer les entrepôts qu'il faut louer de façon à minimiser la somme des coûts de location et de transport.

Pour cela, on considère deux familles de variables :
— $y_i \in \{0, 1\}$ qui vaut 1 si l'entrepôt $E_i$ est loué,
— $x_{ij} \in \mathbb{N}$ qui représente le nombre de camions qui effectueront des livraisons depuis l'entrepôt $E_i$ vers la zone $Z_j$.

Les contraintes à considérer sont les suivantes :
— Pour chaque entrepôt $E_i$, il faut limiter la quantité livrée à partir de l'entrepôt $E_i$ à la capacité de cet entrepôt.
— Pour chaque zone $Z_j$, il faut satisfaire la demande.
— Pour chaque livraison entre l'entrepôt $E_i$ et la zone $Z_j$, il faut forcer la location d'un entrepôt si une quantité est livrée depuis cet entrepôt.

Pour la fonction objectif, on souhaite minimiser le coût de location et le coût de transport pour chaque livraison entre l'entrepôt $E_i$ et la zone $Z_j$.

1. Proposez une modélisation du problème sous la forme d'un programme quadratique.
2. Proposez une reformulation équivalente de la contrainte non linéaire avec $n \times p$ variables additionnelles.
3. Proposez une reformulation linéaire spécifique au problème qui ne rajoute pas de variables.

**Exercice 3 — *Cas où les variables sont des entiers naturels***

Dans cet exercice, nous considérons le problème de l'équipartition en variables entières (Integer Equipartition Problem (IEP)). Ce problème consiste à partitionner les sommets d'un graphe en une collection d'ensembles disjoints de même taille, tout en minimisant la somme des poids des arêtes qui relient des sommets placés dans des ensembles différents.

Plus précisément, nous considérons $n$ types d'objets, $m$ objets de chaque type, et une partition des $n \cdot m$ objets en $p$ ensembles tous de même taille. Nous supposons que $n \cdot m$ est un multiple de $p$. Pour toute paire de types d'objets $(i, j),\ i \leqslant j$, on note $c_{ij}$ le coût d'allouer chaque paire d'éléments de types $i$ et $j$ à des ensembles différents. Le problème consiste donc à minimiser le coût total de l'allocation des $n \cdot m$ objets aux $p$ ensembles.

Nous introduisons les variables de décision $x_{ik}$ qui représentent le nombre d'objets de type $i$ alloués à l'ensemble $k$, (IEP) peut être formulé comme suit :

$$
(IEP)\begin{cases}
\min \displaystyle\sum_{i<j}\sum_{k\neq l} c_{ij}x_{ik}x_{jl} + \sum_{i}\sum_{k<l} c_{ii}x_{ik}x_{il} & \\
\text{s.t.} & \\
\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \frac{n\cdot m}{p} & 1 \leq k \leq p \qquad (1)\\
\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = m & 1 \leq i \leq n \qquad (2)\\
\quad 0 \leqslant x_{ik} \leqslant \min(m, \frac{n\cdot m}{p}) & 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq p \qquad (3)\\
\quad x_{ik} \in \mathbb{N} & 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq p \qquad (4)
\end{cases}
$$

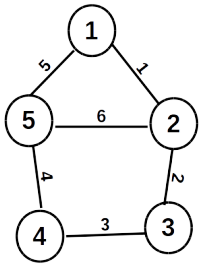
On remarque que les contraintes (1) assurent qu'exactement $\frac{n\cdot m}{p}$ objets sont alloués à chaque

ensemble, les contraintes (2) assurent que tous les objets sont bien affectés à un ensemble. Ce problème a une fonction objectif quadratique, $n+p$ égalités linéaires et $n \cdot p$ variables entières.

1. Proposez une reformulation linéaire de ce problème.
2. À l'aide de Julia et de JuMP, implémentez cette reformulation et résolvez les instances disponibles en ligne.

**Exercice 4 — *MaxCut sur un exemple***

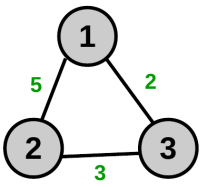
Considérons le graphe $G = (V, E)$ suivant de 5 sommets et 6 arêtes :




1. Écrire la matrice $W$ des poids de $G$, et donner la formulation $(MC_{0,1})$ pour ce graphe. À l'aide de JuMP et de `Gurobi`, résoudre $(MC_{0,1})$.
2. Donner la formulation $(MC_{-1,1})$ pour $G$.
3. Écrire la matrice Laplacienne $L$ de $G$, et donner la formulation $(MC_L)$ pour $G$.
4. Écrire la formulation SDP $(F\text{-}SDP_{MC})$ de max-cut pour $G$, et donner sa relaxation $(R\text{-}SDP_{MC})$.
5. Combien d'inégalités triangulaires peut-on ajouter à $(R\text{-}SDP_{MC})$ pour le graphe $G$ ?
6. À l'aide de JuMP et du solveur `csdp` (paquet `CSDP.jl`), résoudre la relaxation SDP $(R\text{-}SDP_{MC})$. Ajouter à cette relaxation les inégalités triangulaires et résoudre $(SDP\text{-}T_{MC})$. Résoudre les instances disponibles en ligne. Quelles sont les limites des différentes formulations ou relaxations ?

**Exercice 5 — *QCR sur le QAP***

Soit l'instance du QAP qui correspond au graphe suivant :




et aux données suivantes :

— Flux entre les équipements $i$ et $j$ : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

— Distance entre les sites $k$ et $l$ : $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

— Coût d'affectation nul : $C = 0$

1. Donnez la formulation de Lawler, ainsi que la formulation $(SDP_{QCR})$ associée.
2. À l'aide de JuMP et de `Gurobi`, résoudre le QAP par la linéarisation classique. Résolvez ensuite les instances disponibles en ligne. Quelles sont les limites des différentes formulations ou relaxations ?

3. À l'aide de JuMP et de `csdp`, résoudre pour le QAP la relaxation ($SDP_{QCR}$), récupérez ensuite les variables duales optimales et convexifiez le QAP avec la méthode QCR. Recommencez avec ($SDP'_{QCR}$) (contrainte agrégée $\leftarrow \beta$) et comparez les bornes. Résolvez ensuite les instances disponibles en ligne. Quelles sont les limites des différentes formulations ou relaxations ?