

Le problème de localisation de capteurs

MPRO - OPCO

Le problème de localisation de capteurs consiste à déterminer la position de m capteurs parmi M , sachant que la position des $M - m$ autres capteurs est connue. De plus, nous connaissons une matrice de similarité entre les M points (ici la distance euclidienne) pour affecter à chaque point une position dans un espace à n dimensions (ici, $n = 2$).

Plus formellement, étant donné M points x_1, x_2, \dots, x_M dans un espace de dimension n , nous cherchons à déterminer les coordonnées des m points, x_1, x_2, \dots, x_m connaissant les coordonnées des points x_{m+1}, \dots, x_M , tout en conservant les proximités. On se donne pour cela une matrice de distances D qui peut être définie par la distance euclidienne $d_{ij} = \|x_i - x_j\|_2$, et il faut déterminer x_1, x_2, \dots, x_m qui minimisent une fonction de coût $f(x)$, sachant que pour tout $i = m + 1, \dots, M$, nous avons $x_i = \bar{x}_i$. Le problème peut se formuler de la façon suivante :

$$(P) \begin{cases} \min & f(x) = \sum_{i=1}^M \sum_{i>j}^M (d_{ij}^2 - \|x_i - x_j\|^2)^2 \\ \text{s.t.} & x_i = \bar{x}_i & i = m + 1, \dots, M \\ & 0 \leq x_i \leq u_i & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Le problème (P) consiste à minimiser un polynôme de degré 4. Il est possible de reformuler (P) de manière équivalente par le problème (P') :

$$(P') \begin{cases} \min \sum_{i=1}^M \sum_{j>i}^M & \max \left\{ d_{ij}^2 - \|x_i - x_j\|^2, \|x_i - x_j\|^2 - d_{ij}^2 \right\} \\ \text{s.t.} & x_i = \bar{x}_i & i = m + 1, \dots, M \\ & 0 \leq x_i \leq u_i & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème nous proposons de le réécrire en minimisant l'écart maximal sur toutes les paires de points (i, j) . On obtient la modélisation (QP) dont les contraintes sont quadratiques et la fonction objectif linéaire :

$$(QP) \begin{cases} \min t \\ \text{s.t.} & t \geq d_{ij}^2 - \|x_i - x_j\|^2 & i = 1 \dots, M, j = i + 1, \dots, M \\ & t \geq \|x_i - x_j\|^2 - d_{ij}^2 & i = 1 \dots, M, j = i + 1, \dots, M \\ & x_i = \bar{x}_i & i = m + 1, \dots, M \\ & 0 \leq x_i \leq u_i & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Exercice 1 — Relaxations SOCP et SDP

1. Ecrivez une relaxation SOCP de (QP) et résolvez la avec le solveur Mosek.
2. Ecrivez une relaxation SDP de (QP) et résolvez la avec le solveur CSDP.