Le problème de localisation de capteurs

MPRO - OPCO

Le problème de localisation de capteurs consiste à déterminer la position de m capteurs parmis M, sachant que la position des $M - m$ autres capteurs est connue. De plus, nous connaissons une matrice de similarité entre les M points (ici la distance euclidienne) pour affecter à chaque point une position dans un espace à n dimensions (ici, $n = 2$).

Plus formellement, étant donné M points $x_1, x_2, \ldots, x_M$ dans un espace de dimension n, nous cherchons à déterminer les coordonnées des m points, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ connaissant les coordonnées des points $x_{m+1}, \ldots, x_M$, tout en conservant les proximités. On se donne pour cela une matrice de distances D qui peut être définie par la distance euclidienne $d_{ij} = ||x_i - x_j||_2$, et il faut déterminer $x_1, x_2, \ldots, x_m$ qui minimisent une fonction de coût $f(x)$, sachant que pour tout $i = m+1, \ldots, M$, nous avons $x_i = \bar{x}_i$. Le problème peut se formuler de la façon suivante :

$$
(P)\begin{cases}
\min \quad f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{M} \sum_{i>j}^{M} \left(d_{ij}^2 - ||x_i - x_j||^2\right)^2 & \\
\text{s.t.} \;\; x_i = \bar{x}_i & i = m+1, \ldots, M \\
\qquad 0 \leqslant x_i \leqslant u_i & i = 1, \ldots, m
\end{cases}
$$

Le problème (P) consiste à minimiser un polynôme de degré 4. Il est possible de reformuler (P) de manière équivalente par le problème (P') :

$$
(P')\begin{cases}
\min \displaystyle\sum_{i=1}^{M}\sum_{j>i}^{M} \quad \max \quad \left\{d_{ij}^2 - ||x_i - x_j||^2, ||x_i - x_j||^2 - d_{ij}^2\right\} & \\
\text{s.t.} \;\; x_i = \bar{x}_i & i = m+1, \ldots, M \\
\qquad 0 \leqslant x_i \leqslant u_i & i = 1, \ldots, m
\end{cases}
$$

Pour résoudre ce problème nous proposons de le réécrire en minimisant l'écart maximal sur toutes les paires de points (i, j). On obtient la modélisation (QP) dont les contraintes sont quadratiques et la fonction objectif linéaire :

$$
(QP)\begin{cases}
\min t & \\
\text{s.t.} \;\; t \geqslant d_{ij}^2 - ||x_i - x_j||^2 & i = 1 \ldots, M, \; j = i+1, \ldots, M \\
\qquad t \geqslant ||x_i - x_j||^2 - d_{ij}^2 & i = 1 \ldots, M, \; j = i+1, \ldots, M \\
\qquad x_i = \bar{x}_i & i = m+1, \ldots, M \\
\qquad 0 \leqslant x_i \leqslant u_i & i = 1, \ldots, m
\end{cases}
$$

Exercice 1 — *Relaxations SOCP et SDP*

1. Ecrire une relaxation SOCP de (QP) et la résoudre avec le solveur `Mosek`.
2. Ecrire une relaxation SDP de (QP) et la résoudre avec le solveur `Mosek`.