

Rappels sur les modèles stochastiques et l'optimisation

1 Rappels de probabilités - Probabilités conditionnelles

Exercice 1 — Conditionnement (1) Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace de probabilité, et (H_1, \dots, H_n) une partition de Ω en n événements de probabilité non nulle. Montrer que, pour $i = 1, \dots, n$, si A est un événement de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}$$

(2) Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

Exercice 2 — CD-Rom Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.
- 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boîte du lot. On désigne par A l'événement : "la boîte est abîmée" et par B l'événement "la boîte achetée contient au moins un CD défectueux".

(1) Donner les probabilités de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\bar{A})$, $\mathbb{P}(B|A)$, $\mathbb{P}(B|\bar{A})$, $\mathbb{P}(\bar{B}|A)$ et $\mathbb{P}(\bar{B}|\bar{A})$.

Rappel : (formule des probabilités totales) $\mathbb{P}(X) = \sum_i \mathbb{P}(X|Y_i)\mathbb{P}(Y_i)$ avec $\cup_i Y_i = \Omega$ et

$\mathbb{P}(Y_i) \neq 0 \forall i$.

(2) Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

Exercice 3 — QCM Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 4 — Dé pipé Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition d'un 6 soit de $\frac{1}{2}$. On choisit un dé au hasard, on le jette, et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

2 optimisation

Exercice 5 Nous cherchons la solution du problème

$$(P) \begin{cases} \min & J(x) = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{s.c.} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

(1) Quel est le Lagrangien de (P) ?

- (2) Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité de Lagrange.
- (3) Déterminer la solution de (P) .

Exercice 6 Nous cherchons la solution du problème

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \max & J(x) = x_1^3 - 3x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \quad (1) \\ & 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0 \quad (2) \\ & x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0 \quad (3) \\ & 7x_1 + 2x_2 - 28 \leq 0 \quad (4) \\ & x_2 \geq 0 \quad (5) \end{array} \right.$$

- (1) Quel est le Lagrangien de (P) ?
- (2) Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker.
- (3) Déterminer la solution de (P) .