Les algorithmes de Branch-and-Bound pour la PLNE

Amélie Lambert

Cnam

ECE 2016-2017

1. Difficulté des problèmes discrets et explosion combinatoire

2. Les méthodes de séparation et évaluation

1. Difficulté des problèmes discrets et explosion combinatoire

2. Les méthodes de séparation et évaluation

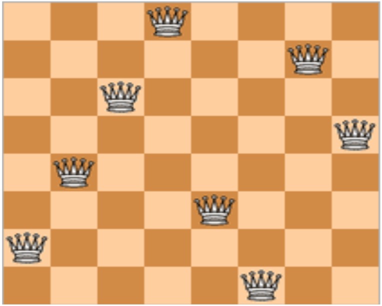
Un exemple de problème avec explosion combinatoire

Comment placer n dames sur un échiquier de $n \times n$ cases sans que les dames ne puissent se menacer mutuellement ?

Un exemple de problème avec explosion combinatoire

Comment placer n dames sur un échiquier de $n \times n$ cases sans que les dames ne puissent se menacer mutuellement ?

Une solution pour $n = 8 \rightarrow$

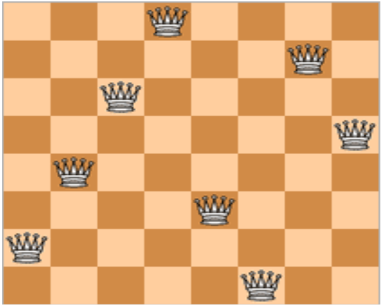


Résolution naïve :
Vérifier les n^n solutions candidates !

Un exemple de problème avec explosion combinatoire

Comment placer n dames sur un échiquier de $n \times n$ cases sans que les dames ne puissent se menacer mutuellement ?

Une solution pour $n = 8 \rightarrow$



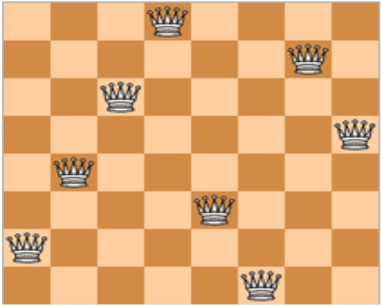
Résolution naïve :
Vérifier les n^n solutions candidates !

Même lorsque $n = 4$ il y a 256 posibilités

Un exemple de problème avec explosion combinatoire

Comment placer n dames sur un échiquier de $n \times n$ cases sans que les dames ne puissent se menacer mutuellement ?

Une solution pour $n = 8 \rightarrow$



Résolution naïve :
Vérifier les n^n solutions candidates !

Même lorsque $n = 4$ il y a 256 posibilités

On dit qu'il y a **explosion combinatoire** : le nombre de solutions (scénarios) envisageable est exponentiel.

Comment dérober le maximum ?

Un malfaiteur arrive à s'introduire à l'intérieur d'une banque

Comment dérober le maximum ?

Un malfaiteur arrive à s'introduire à l'intérieur d'une banque

Il peut voler

- des lingots
- des liasses de billets

Problème : Son sac à dos a :

- un volume max : 32 litres
- une charge max : 20kg

Comment dérober le maximum ?

Un malfaiteur arrive à s'introduire à l'intérieur d'une banque

Il peut voler

- des lingots
- des liasses de billets

Problème : Son sac à dos a :

- un volume max : 32 litres
- une charge max : 20kg

- un lingot : 300000 \$, 8kg, 6litres
- un paquet de billets : 100000 \$, 3kg, 6litres

Comment dérober le maximum ?

Un malfaiteur arrive à s'introduire à l'intérieur d'une banque

Il peut voler

- des lingots
- des liasses de billets

Problème : Son sac à dos a :

- un volume max : 32 litres
- une charge max : 20kg

- un lingot : 300000 \$, 8kg, 6litres
- un paquet de billets : 100000 \$, 3kg, 6litres

Et si le prix du lingot baissait à 200000 \$?

$\Rightarrow$ **Modélisation du problème**

Modélisation du problème par un PLNE

Utilisation de la programmation linéaire en nombres entiers.

Variables :

- variable x_1 nombre de lingots (300000\$, 8 kg, 6 litres)
- variable x_2 nombre de paquets de billets (100000\$, 3 kg, 6 litres)

Modélisation du problème par un PLNE

Utilisation de la programmation linéaire en nombres entiers.

Variables :

- variable x_1 nombre de lingots (300000\$, 8 kg, 6 litres)
- variable x_2 nombre de paquets de billets (100000\$, 3 kg, 6 litres)

$$(PLNE) \begin{cases} \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 & \text{Maximiser le profit} \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 20 & \text{Contrainte de charge} \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 32 & \text{Contrainte de volume} \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2 & \text{Contraintes d'intégrité} \end{cases}$$

Un premier algorithme de résolution

Algorithme 1 :

Remplir le sac avec le maximum d'or et compléter avec des billets.

Un premier algorithme de résolution

Algorithme 1 :
Remplir le sac avec le maximum d'or et compléter avec des billets.

Avec ces données le voleur a intérêt à dérober 2 lingots et 1 paquet de billets pour gagner 700000 $.

Un premier algorithme de résolution

Algorithme 1 :

Remplir le sac avec le maximum d'or et compléter avec des billets.

Avec ces données le voleur a intérêt à dérober 2 lingots et 1 paquet de billets pour gagner 700000 \$.

On trouve une solution, mais on ne sait pas si c'est la meilleure solution pour toute les instances de ce problème

$\Rightarrow$ notre algorithme est **Heuristique**

Un algorithme dit "heuristique"

Définition 1 : Une solution *réalisable* d'un (PLNE) est une solution x qui satisfait les contraintes du problème.

Un algorithme dit "heuristique"

Définition 1 : Une solution *réalisable* d'un (PLNE) est une solution x qui satisfait les contraintes du problème.

Définition 2 : Un algorithme de résolution *Heuristique* est un algorithme qui fournit une solution réalisable en un temps polynomial pour un problème $\mathcal{NP}$-difficile.

Un deuxième algorithme de résolution

Algorithme 2 :
Enumérer toutes les solution réalisables de $(PLNE)$ et choisir celle de coût maximal.

Un deuxième algorithme de résolution

Algorithme 2 :

Enumérer toutes les solution réalisables de $(PLNE)$ et choisir celle de coût maximal.

Avec cet alorithme il y a explosion combinatoire.

Un deuxième algorithme de résolution

Algorithme 2 :
Enumérer toutes les solution réalisables de $(PLNE)$ et choisir celle de coût maximal.

Avec cet alorithme il y a explosion combinatoire.

Idée : Enumérer seulement une partie des solutions, celles qui vont potentiellement améliorer la meilleure solution courante

Un deuxième algorithme de résolution

Algorithme 2 :
Enumérer toutes les solution réalisables de $(PLNE)$ et choisir celle de coût maximal.

Avec cet alorithme il y a explosion combinatoire.

Idée : Enumérer seulement une partie des solutions, celles qui vont potentiellement améliorer la meilleure solution courante

Comment éliminer les solutions dont on est sûr quelles ne seront pas meilleures que la meilleure solution courante ?

$\Rightarrow$ En utilisant des bornes facilement calculables

Comment dérober le maximum : utilisation de bornes

$$(PLNE)\begin{cases} \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 & \text{Maximiser le profit} \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 20 & \text{Contrainte de charge} \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 32 & \text{Contrainte de volume} \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2 & \text{Contraintes d'intégrité} \end{cases}$$

Comment dérober le maximum : utilisation de bornes

$$(PLNE)\begin{cases} \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 32 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$

Maximiser le profit

Contrainte de charge

Contrainte de volume

Contraintes d'intégrité

$(PLNE)$ est difficile à cause de l'explositon combinatoire, **mais il serait facile si les variables n'étaient pas entières.**

Comment dérober le maximum : utilisation de bornes

$$(PLNE)\left\{\begin{array}{l} \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 32 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2 \end{array}\right.$$

Maximiser le profit

Contrainte de charge

Contrainte de volume

Contraintes d'intégrité

$(PLNE)$ est difficile à cause de l'explositon combinatoire, **mais il serait facile si les variables n'étaient pas entières.**

$$(PL)\left\{\begin{array}{l} \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 32 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^2 \end{array}\right.$$

Maximiser le profit

Contrainte de charge

Contrainte de volume

Pas de contraintes d'intégrité $\Rightarrow$ Facile

Comment dérober le maximum : utilisation de bornes

Un malfaiteur arrive à s'introduire à l'intérieur d'une banque

Comment dérober le maximum : utilisation de bornes

Un malfaiteur arrive à s'introduire à l'intérieur d'une banque

Caractéristiques :

- un lingot : 300000 \$, 8kg, 6litres
- un paquet de billets : 100000 \$, 3kg, 6litres

Solution heuristique : l'or d'abord

- 2 lingots + 1 liasse
- profit : $2 * 3 + 1 * 1 = 7$

Comment dérober le maximum : utilisation de bornes

Un malfaiteur arrive à s'introduire à l'intérieur d'une banque

Caractéristiques :

- un lingot : 300000 \$, 8kg, 6litres
- un paquet de billets : 100000 \$, 3kg, 6litres

Solution heuristique : l'or d'abord

- 2 lingots + 1 liasse
- profit : $2 * 3 + 1 * 1 = 7$

Peut-il espérer un profit beaucoup plus important que 7 ?

Comment dérober le maximum : utilisation de bornes

Un malfaiteur arrive à s'introduire à l'intérieur d'une banque

Caractéristiques :

- un lingot : 300000 \$, 8kg, 6litres
- un paquet de billets : 100000 \$, 3kg, 6litres

Solution heuristique : l'or d'abord

- 2 lingots + 1 liasse
- profit : $2 * 3 + 1 * 1 = 7$

Peut-il espérer un profit beaucoup plus important que 7 ?

Si on pouvait fondre l'or : sol. opt. : 2.5 lingots $\Rightarrow$ Valeur : 7.5

Comment dérober le maximum : utilisation de bornes

Un malfaiteur arrive à s'introduire à l'intérieur d'une banque

Caractéristiques :

- un lingot : 300000 \$, 8kg, 6litres
- un paquet de billets : 100000 \$, 3kg, 6litres

Solution heuristique : l'or d'abord

- 2 lingots + 1 liasse
- profit : $2 * 3 + 1 * 1 = 7$

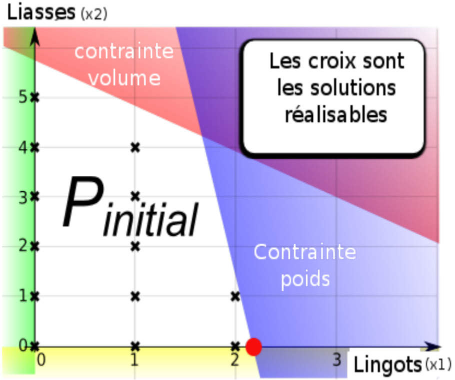
Peut-il espérer un profit beaucoup plus important que 7 ?

Si on pouvait fondre l'or : sol. opt. : 2.5 lingots $\Rightarrow$ Valeur : 7.5
$\Rightarrow$ Une borne supérieure du problème est 7.5

$\Rightarrow$ **Le profit de 7 est optimal en nombre entiers**

Représentation graphique

$$(PLNE)\begin{cases} \max \quad 3x_1 + x_2 \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 32 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$



Comment se servir des bornes

Peut-on ajouter une contrainte intelligente (coupe) pour obtenir une telle zone réalisable ?

Comment se servir des bornes

Peut-on ajouter une contrainte intelligente (coupe) pour obtenir une telle zone réalisable ?

Oui : en se servant de la valeur de la borne (ici obtenue par relaxation continue)

Comment se servir des bornes

Peut-on ajouter une contrainte intelligente (coupe) pour obtenir une telle zone réalisable ?

Oui : en se servant de la valeur de la borne (ici obtenue par relaxation continue)

La valeur de la relaxation continue vaut 7.5

Comment se servir des bornes

Peut-on ajouter une contrainte intelligente (coupe) pour obtenir une telle zone réalisable ?

Oui : en se servant de la valeur de la borne (ici obtenue par relaxation continue)

La valeur de la relaxation continue vaut 7.5

Donc la meilleure valeur entière possible (borne supérieure) est : $\lfloor 7.5 \rfloor = 7$

Comment se servir des bornes

Peut-on ajouter une contrainte intelligente (coupe) pour obtenir une telle zone réalisable ?

Oui : en se servant de la valeur de la borne (ici obtenue par relaxation continue)

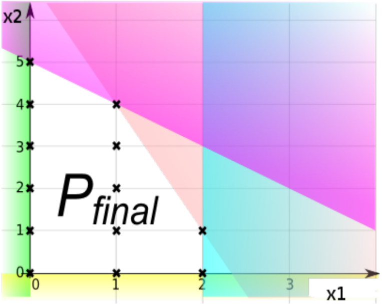
La valeur de la relaxation continue vaut 7.5

Donc la meilleure valeur entière possible (borne supérieure) est : $\lfloor 7.5 \rfloor = 7$

On peut donc ajouter $f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \leq 7$

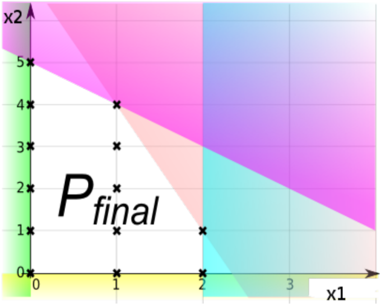
Comment se servir des bornes

$$(PLNE)\begin{cases} \max \quad 3x_1 + x_2 \\ \quad 8x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ \quad 6x_1 + 6x_2 \leq 32 \\ \quad 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$



Comment se servir des bornes

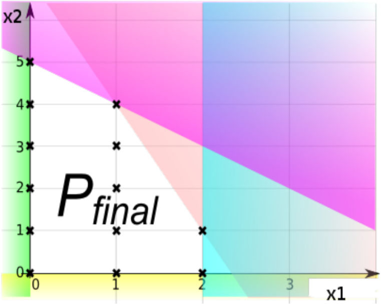
$$(PLNE)\begin{cases} \max \quad 3x_1 + x_2 \\ \quad 8x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ \quad 6x_1 + 6x_2 \leq 32 \\ \quad 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$



Ici, si on résout à nouveau le problème en ignorant les contraintes d'intégrité et on obtient une solution entière $(2, 1)$ c'est l'optimum.

Comment se servir des bornes

$$(PLNE)\begin{cases} \max & 3x_1 + x_2 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & 6x_1 + 6x_2 \leq 32 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$



Ici, si on résout à nouveau le problème en ignorant les contraintes d'intégrité et on obtient une solution entière $(2, 1)$ c'est l'optimum.

Attention : en général on n'obtient pas directement une solution entière.

Un algorithme de Séparation et Evaluation

Définition 3 : Une *relaxation* d'un problème (P) est un nouveau problème (P') construit à partir de (P) et auquel on a retiré au moins une contrainte.

Un algorithme de Séparation et Evaluation

Définition 3 : Une *relaxation* d'un problème (P) est un nouveau problème (P') construit à partir de (P) et auquel on a retiré au moins une contrainte.

Observation 1 : Toutes les solutions de P sont des solutions de (P').
Attention ! La réciproque est fausse.

Un algorithme de Séparation et Evaluation

Définition 3 : Une *relaxation* d'un problème (P) est un nouveau problème (P') construit à partir de (P) et auquel on a retiré au moins une contrainte.

Observation 1 : Toutes les solutions de P sont des solutions de (P').
Attention ! La réciproque est fausse.

Observation 2 : Une *borne supérieure* d'un problème de maximisation (P) peut être calculée en résolvant une relaxation de (P).
On a $v(P) \leq v(P')$, ($v(P)$ valeur optimale de (P)).

Un algorithme de Séparation et Evaluation

Définition 4 : Un algorithme de *Séparation et Evaluation (ou branch-and-bound)* pour résoudre le problème de maximisation (P) est fondé sur cette l'idée d'utiliser des bornes supérieures pour choisir quelles solutions éliminer en étant sûr quelles ne seront pas meilleures que la meilleure solution courante.

Bornes et relaxations

Comment résoudre de façon exacte (= trouver une solution optimale à) un PLNE :

$$(PLNE) \begin{cases} \max \quad c^t x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Bornes et relaxations

Comment résoudre de façon exacte (= trouver une solution optimale à) un PLNE :

$$(PLNE) \begin{cases} \max \quad c^t x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Obtenir une **évaluation (borne)** de la valeur optimale

Bornes et relaxations

Comment résoudre de façon exacte (= trouver une solution optimale à) un PLNE :

$$(PLNE)\begin{cases} \max \quad c^t x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Obtenir une **évaluation (borne)** de la valeur optimale

- Déterminer une borne inférieure de cette valeur ?

  $\Rightarrow$ Valeur de n'importe quelle solution admissible !

Bornes et relaxations

Comment résoudre de façon exacte (= trouver une solution optimale à) un PLNE :

$$(PLNE) \begin{cases} \max \quad c^t x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Obtenir une **évaluation (borne)** de la valeur optimale

- Déterminer une borne inférieure de cette valeur ?
  $\Rightarrow$ Valeur de n'importe quelle solution admissible !
- Déterminer une borne supérieure de cette valeur ?
  $\Rightarrow$ En général, on a recours à des relaxations

Bornes et relaxations

Comment résoudre de façon exacte (= trouver une solution optimale à) un PLNE :

$$(PLNE)\begin{cases} \max \quad c^t x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Obtenir une **évaluation (borne)** de la valeur optimale

- Déterminer une borne inférieure de cette valeur ?
  $\Rightarrow$ Valeur de n'importe quelle solution admissible !
- Déterminer une borne supérieure de cette valeur ?
  $\Rightarrow$ En général, on a recours à des relaxations

Si ces deux bornes sont égales, alors on a fini !

Bornes primales

Une Borne primale est la valeur d'une solution admissible.

- Si on maximise, c'est une borne inférieure
- Si on minimise, c'est une borne supérieure

Bornes primales

Une Borne primale est la valeur d'une solution admissible.

- Si on maximise, c'est une borne inférieure
- Si on minimise, c'est une borne supérieure

Parfois, trouver une borne primale est simple :
Exemple : Problème du sac-à-dos

Bornes primales

Une Borne primale est la valeur d'une solution admissible.

- Si on maximise, c'est une borne inférieure
- Si on minimise, c'est une borne supérieure

Parfois, trouver une borne primale est simple :
Exemple : Problème du sac-à-dos

Parfois, ça l'est moins :
Exemple : Problème du voyageur de commerce dans un graphe quelconque

Bornes primales

Une Borne primale est la valeur d'une solution admissible.

- Si on maximise, c'est une borne inférieure
- Si on minimise, c'est une borne supérieure

Parfois, trouver une borne primale est simple :
Exemple : Problème du sac-à-dos

Parfois, ça l'est moins :
Exemple : Problème du voyageur de commerce dans un graphe quelconque

Mais trouver une bonne borne primale est souvent une tâche difficile...

Bornes duales

Borne duale

- Si on maximise, c'est une borne supérieure
- Si on minimise, c'est une borne inférieure

Bornes duales

Borne duale

- Si on maximise, c'est une borne supérieure
- Si on minimise, c'est une borne inférieure

On détermine des bornes duales via des relaxations :

- Idéalement, problème plus simple (plus rapide) à résoudre que le problème initial
- Problème dont chaque solution a une valeur plus grande (si on maximise) ou plus petite (sinon) que celle de toute solution admissible du problème initial

La relaxation continue

Soit le PLNE suivant :

$$(P)\begin{cases} \max \quad c^t x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Question : quelle relaxation simple (P') est plus simple à résoudre ?

La relaxation continue

Soit le PLNE suivant :

$$(P)\begin{cases} \max \quad c^t x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Question : quelle relaxation simple (P') est plus simple à résoudre ?

Le PL suivant :

$$(P')\begin{cases} \max \quad c^t x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

est appelé relaxation continue de (P)

La relaxation continue

Le PL suivant :

$$(P')\begin{cases}\max & c^t x\\ & Ax \leq b\\ & x \in \mathbb{R}\end{cases}$$

est appelé relaxation continue de (P)

La relaxation continue

Le PL suivant :

$$(P')\begin{cases} \max \quad c^t x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

est appelé relaxation continue de (P)

Propriété : (PL) est bien une relaxation de (P), car toute solution de (P) est solution de (PL) !

La relaxation continue

Le PL suivant :

$$(P')\begin{cases} \max & c^t x \\ & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

est appelé relaxation continue de (P)

Propriété : (PL) est bien une relaxation de (P), car toute solution de (P) est solution de (PL) !

Corollaire : si (PL) admet une solution optimale entière, cette solution est optimale pour (P) !

La relaxation continue

Le PL suivant :

$$(P') \begin{cases} \max \quad c^t x \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

est appelé relaxation continue de (P)

Propriété : (PL) est bien une relaxation de (P), car toute solution de (P) est solution de (PL) !

Corollaire : si (PL) admet une solution optimale entière, cette solution est optimale pour (P) !

Intérêt de (PL) : (PL) est un programme continu, et peut donc être résolu à l'aide d'algorithmes efficaces.

Comment résoudre la relaxation continue

Par l'algorithme du simplexe $\Longrightarrow$ en utilisant un solveur

Comment résoudre la relaxation continue

Par l'algorithme du simplexe $\Longrightarrow$ en utilisant un solveur

Par un algorithme spécifique

Exemple : le sac à dos

$$(SAD)\begin{cases} \max & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ & x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

Résolution de la relaxation continue :

1. Trier les objets dans l'ordre décroissant des ratios $\frac{c_i}{a_i}$
2. Charger le sac à dos dans cet ordre jusqu'à sa capacité maximale

   $\Longleftrightarrow$ mettre à 1 toutes les variables possibles et couper la dernière

Exercice 1

Calculez la relaxation continue du problème suivant :

$$(SAD) \begin{cases} \max \quad x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 5 \\ \quad x \in \{0,1\}^4 \end{cases}$$

Exemple de relaxation continue

$$(P)\begin{cases}\max & x_1 + 3x_2\\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 5\\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2\end{cases}$$

$$(P')\begin{cases}\max & x_1 + 3x_2\\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 5\\ & x_1, x_2 \geq 0\\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2\end{cases}$$

Exemple de relaxation continue

$$(P)\begin{cases} \max \quad x_1 + 3x_2 \\ \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2 \end{cases} \qquad (P')\begin{cases} \max \quad x_1 + 3x_2 \\ \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Solution optimale de (P') : $x_1 = 0, x_2 = 1.25$ de valeur 3.75

Exemple de relaxation continue

$$(P)\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}^2 \end{cases} \qquad (P')\begin{cases} \max & x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Solution optimale de (P') : $x_1 = 0, x_2 = 1.25$ de valeur 3.75

Ainsi, la solution entière $(x_1 = 0, x_2 = 1)$ de valeur 3 est optimale pour (P) car $x_1 + 3x_2 \leq \lfloor 3.75 \rfloor = 3$

Procédure de séparation et évaluation

Méthode (exacte) pour résoudre des programmes mathématiques (P), de la famille des méthodes de recherche arborescente

Procédure de séparation et évaluation

Méthode (exacte) pour résoudre des programmes mathématiques (P), de la famille des méthodes de recherche arborescente

Principe : résoudre le (P) en faisant une énumération intelligente (non exhaustive) des solutions admissibles

$\rightarrow$ Enumération = séparation (branchement)

Procédure de séparation et évaluation

Méthode (exacte) pour résoudre des programmes mathématiques (P), de la famille des méthodes de recherche arborescente

Principe : résoudre le (P) en faisant une énumération intelligente (non exhaustive) des solutions admissibles
$\rightarrow$ Enumération = séparation (branchement)

Objectif : ne pas développer tout l'arbre de recherche , en "coupant" des branches à l'aide de bornes.

- Générer des bornes primales (solutions admissibles) ?
- Générer des bornes duales (évaluation) via une relaxation ?
  $\rightarrow$ Utiliser la relaxation continue !

Procédure de séparation et évaluation : la séparation

Etape de séparation = diviser le pb en plusieurs sous-pb, de façon à ce que la résolution de tous ces sous-pb garantisse la résolution du pb initial

Procédure de séparation et évaluation : la séparation

Etape de séparation = diviser le pb en plusieurs sous-pb, de façon à ce que la résolution de tous ces sous-pb garantisse la résolution du pb initial

En pratique, on effectue un "branchement" dans l'arbre, tout en garantissant la conservation de toutes les solutions admissibles du pb avant branchement.

Procédure de séparation et évaluation : la séparation

Etape de séparation = diviser le pb en plusieurs sous-pb, de façon à ce que la résolution de tous ces sous-pb garantisse la résolution du pb initial

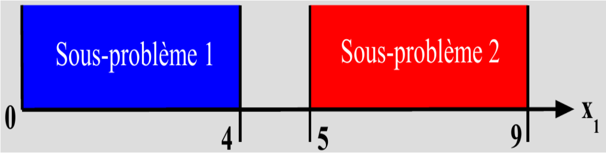
En pratique, on effectue un "branchement" dans l'arbre, tout en garantissant la conservation de toutes les solutions admissibles du pb avant branchement.

Procédure de séparation et évaluation : la séparation

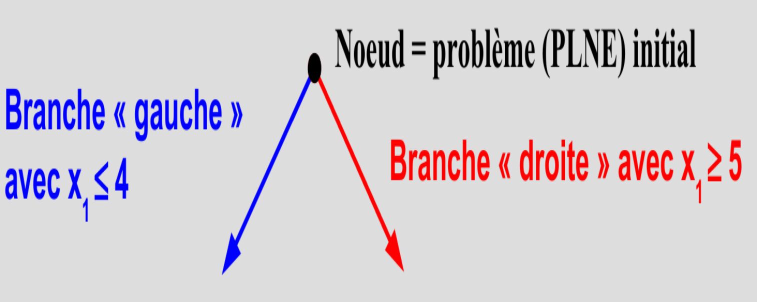
Etape de séparation = diviser le pb en plusieurs sous-pb, de façon à ce que la résolution de tous ces sous-pb garantisse la résolution du pb initial

En pratique, on effectue un "branchement" dans l'arbre, tout en garantissant la conservation de toutes les solutions admissibles du pb avant branchement.

Par exemple, un PLNE ayant une variable $x1 \in \{0, 9\}$ peut être résolu en posant d'abord $x1 \leq 4$, puis $x1 \geq 5$



Procédure de séparation et évaluation : la séparation



Procédure de séparation et évaluation : l'évaluation

Evaluer un noeud = calculer une "estimation" (borne duale) de la valeur optimale de ce PLNE :

- On résout la relaxation continue de ce PLNE
- A la racine de l'arbre on considère le PLNE initial

Procédure de séparation et évaluation : l'évaluation

Evaluer un noeud = calculer une "estimation" (borne duale) de la valeur optimale de ce PLNE :

- On résout la relaxation continue de ce PLNE
- A la racine de l'arbre on considère le PLNE initial

Intérêt de l'évaluation :

- La borne duale calculée avec l'hypothèse $x_1 \leq 4$ est différente de celle calculée avec l'hypothèse $x_1 \geq 5$.
- Ces bornes peuvent permettre d'élaguer l'arbre de recherche
- Pour cela, une borne primale peut être nécessaire...

Procédure de séparation et évaluation

Procédure : on évalue un noeud, puis on sépare :

- Sur la valeur d'une variable fractionnaire (non entière) dans la solution optimale de la relaxation continue
- Exemple : si $x_1 = 4.3$, on pose d'abord $x_1 \leq 4$, puis $x_1 \geq 5$

Procédure de séparation et évaluation

Procédure : on évalue un noeud, puis on sépare :

- Sur la valeur d'une variable fractionnaire (non entière) dans la solution optimale de la relaxation continue
- Exemple : si $x_1 = 4.3$, on pose d'abord $x_1 \leq 4$, puis $x_1 \geq 5$

Parfois, on peut "couper" une branche de l'arbre de recherche :

1. Si la valeur optimale de la relaxation continue est moins bonne que la borne primale courante (noeud sans intérêt)
2. Si la relaxation continue n'admet aucune solution admissible
3. Si la relaxation continue admet une solution entière

Procédure de séparation et évaluation

Couper suppose l'existence d'une borne primale ! :

Procédure de séparation et évaluation

Couper suppose l'existence d'une borne primale ! :

- Meilleure est cette borne, plus on risque de couper

Procédure de séparation et évaluation

Couper suppose l'existence d'une borne primale ! :

- Meilleure est cette borne, plus on risque de couper
- Parfois, lors de la construction de l'arbre, l'évaluation du noeud fournit une solution entière (borne primale) : si nécessaire, actualiser alors la borne primale courante

Procédure de séparation et évaluation

Couper suppose l'existence d'une borne primale ! :

- Meilleure est cette borne, plus on risque de couper
- Parfois, lors de la construction de l'arbre, l'évaluation du noeud fournit une solution entière (borne primale) : si nécessaire, actualiser alors la borne primale courante
- On peut aussi essayer de générer par différents biais une borne primale (solution admissible) initiale...

Bilan

La PLNE permet de modéliser de très nombreux problèmes

Bilan

La PLNE permet de modéliser de très nombreux problèmes

Résolution d'un PLNE plus difficile qu'un PL, et nécessite de faire un compromis temps/qualité

Bilan

La PLNE permet de modéliser de très nombreux problèmes

Résolution d'un PLNE plus difficile qu'un PL, et nécessite de faire un compromis temps/qualité

- Méthodes exactes (méthodes par Séparation et Evaluation) : Résolution à l'optimum, parfois trop lentes

Bilan

La PLNE permet de modéliser de très nombreux problèmes

Résolution d'un PLNE plus difficile qu'un PL, et nécessite de faire un compromis temps/qualité

- Méthodes exactes (méthodes par Séparation et Evaluation) : Résolution à l'optimum, parfois trop lentes
- Méthodes approchées ((méta-)heuristiques) : Qualité des solutions variable (et souvent non garantie), Peuvent être très rapides si bien utilisées

Exercice 2

Soit le problème suivant :

$$(SAD)\begin{cases} \max \quad x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 5 \\ \quad x \in \{0,1\}^4 \end{cases}$$

1. En branchant sur les variables dans l'ordre x_1, x_2, x_3, x_4 enumérez toutes les solutions réalisables.
2. Dérouler l'arbre de recherche obtenu par la procédure de séparation et évaluation basée sur la relaxation continue.