Bases de l'ordonnancement

Problèmes d'ordonnancement à machines parallèles

Safia Kedad-Sidhoum

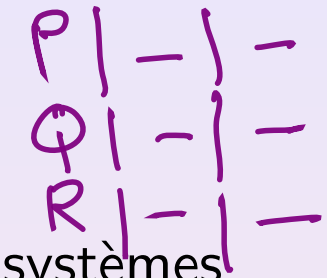
CNAM
safia.kedad_sidhoum@cnam.fr

BOR - M2 MPRO, 2020-2021

Introduction

- Ces problèmes apparaissent naturellement dans les systèmes informatiques où l'on dispose de processeurs parallèles
- Il existe trois types de problèmes :
  - P machines identiques
  - Q machines uniformes: une vitesse est associée à chaque machines
  - R machines non reliées: la durée de la tâche dépend de la machine (sans rapport de proportionalité)

Introduction



- Ces problèmes apparaissent naturellement dans les systèmes informatiques où l'on dispose de processeurs parallèles
- Il existe trois types de problèmes :
  - P machines identiques
  - Q machines uniformes: une vitesse est associée à chaque machines
  - R machines non reliées: la durée de la tâche dépend de la machine (sans rapport de proportionalité)

Machines identiques

Définition et notations

- n tâches $1, 2, \cdots, n$ non préemptives de durées $p_1, p_2, \cdots, p_n$
- m machines identiques $M_1, M_2, \cdots, M_m$
- chaque tâche requiert une machine pour son exécution
- chaque machine ne peut exécuter au plus qu'une tâche à la fois

Machines identiques

Définition et notations

- n tâches $1, 2, \cdots, n$ non préemptives de durées $p_1, p_2, \cdots, p_n$
- m machines identiques $M_1, M_2, \cdots, M_m$
- chaque tâche requiert une machine pour son exécution
- chaque machine ne peut exécuter au plus qu'une tâche à la fois

Machines identiques

Définition et notations

- n tâches $1, 2, \cdots, n$ non préemptives de durées $p_1, p_2, \cdots, p_n$
- m machines identiques $M_1, M_2, \cdots, M_m$
- chaque tâche requiert une machine pour son exécution
- chaque machine ne peut exécuter au plus qu'une tâche à la fois

Machines identiques

Définition et notations

- n tâches $1, 2, \cdots, n$ non préemptives de durées $p_1, p_2, \cdots, p_n$
- m machines identiques $M_1, M_2, \cdots, M_m$
- chaque tâche requiert une machine pour son exécution
- chaque machine ne peut exécuter au plus qu'une tâche à la fois

$P|-|\sum C_i$

- Complexité: Problème polynomial.
  - On suppose que $n = km$ (en ajoutant si besoin des tâches de durées nulles)
  - Dominance des ordonnancements dit équilibrés: chaque machine exécute exactement k tâches
  - Ordonnancement optimal: allouer de façon circulaire les tâches aux m machines dans un ordre non décroissant de leur durée

$P|-|\sum C_i$

- Complexité: Problème polynomial.
  - On suppose que $n = km$ (en ajoutant si besoin des tâches de durées nulles)
  - Dominance des ordonnancements dit équilibrés: chaque machine exécute exactement k tâches
  - Ordonnancement optimal: allouer de façon circulaire les tâches aux m machines dans un ordre non décroissant de leur durée

$P|-|\sum C_i$

- Complexité: Problème polynomial.
  - On suppose que $n = km$ (en ajoutant si besoin des tâches de durées nulles)
  - Dominance des ordonnancements dit équilibrés: chaque machine exécute exactement k tâches
  - Ordonnancement optimal: allouer de façon circulaire les tâches aux m machines dans un ordre non décroissant de leur durée

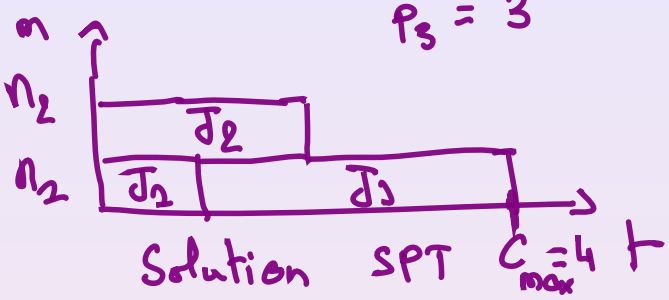
$P||-|\sum C_i$

$1||-|\sum C_i$ SPT

- Complexité: Problème polynomial.
  - On suppose que $n = km$ (en ajoutant si besoin des tâches de durées nulles)
  - Dominance des ordonnancements dit équilibrés: chaque machine exécute exactement k tâches
  - Ordonnancement optimal: allouer de façon circulaire les tâches aux m machines dans un ordre non décroissant de leur durée

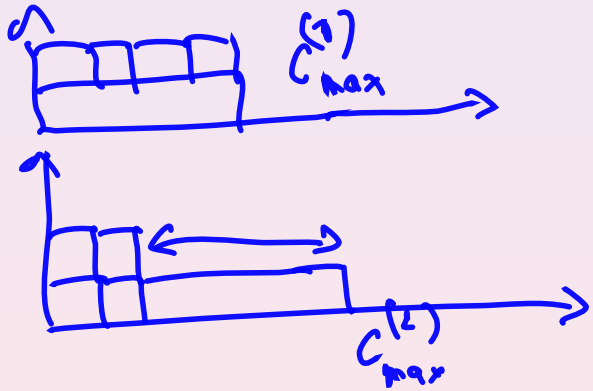
$P|-|C_{max}$

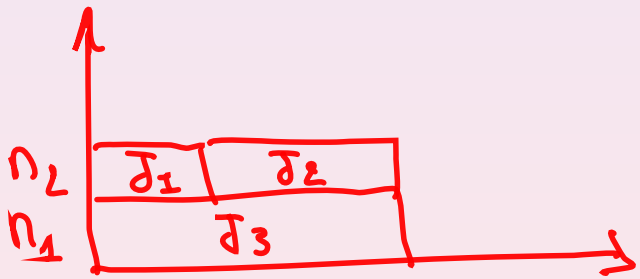
Ex. 3 tâches $p_1 = 1$ $p_2 = 2$ $p_3 = 3$ 2 machines



$1||-|C_{max}$?
Toute séquence de tâches est optimale (Ordo. commence à 0 et est sans temps mort)

- Règle SPT: Que peut-on dire de l'ordonnancement de liste SPT ?
- Complexité: NP-difficile au sens fort





Solution optimale 3 (borne inf $p_{max} = \max\{p_i\} = 3$)

$P|-|C_{max}$

- Règle SPT: Que peut-on dire de l'ordonnancement de liste SPT ?
- Complexité: NP-difficile au sens fort

($P2|-|C_{max}$ NP-difficile au sens faible (réduction Partition))

Contraintes de précédence

- Critère: minimiser le makespan.
- On suppose de plus que les tâches doivent satisfaire des relations de précédence définies par un graphe de précédence
- Problème: $P|prec|C_{max}$
- Complexité: Problème NP-difficile au sens fort.

Contraintes de précédence

- Critère: minimiser le makespan.
- On suppose de plus que les tâches doivent satisfaire des relations de précédence définies par un graphe de précédence
- Problème: $P|prec|C_{max}$
- Complexité: Problème NP-difficile au sens fort.

Contraintes de précédence

- Critère: minimiser le makespan.
- On suppose de plus que les tâches doivent satisfaire des relations de précédence définies par un graphe de précédence
- Problème: $P|prec|C_{max}$
- Complexité: Problème NP-difficile au sens fort.

Contraintes de précédence

- Critère: minimiser le makespan.
- On suppose de plus que les tâches doivent satisfaire des relations de précédence définies par un graphe de précédence
- Problème: $P|prec|C_{\max}$
- Complexité: Problème NP-difficile au sens fort.

Contraintes de précédence - suite

- Tout algorithme de liste fournit une $2 - \frac{1}{m}$ approximation
- Preuve au tableau
- Amélioration: règle LPT fournit une $\frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$ approximation

Contraintes de précédence - suite

- Tout algorithme de liste fournit une $2 - \frac{1}{m}$ approximation
- Preuve au tableau
- Amélioration: règle LPT fournit une $\frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$ approximation

Contraintes de précédence - Cas polynomiaux

$P|intree, p_i = 1|C_{max}$

- Le graphe de précédence G est une anti-arborescence.
- Les durées des tâches sont unitaires.
- Soit n_j le niveau de la tâche dans G, c'est-à-dire le nombre de sommets du chemin de j à la racine de G.
- Soit $L = (1, 2, \cdots, n)$ est une liste de tâches ordonnées par niveau décroissant au sens large.
- Algorithme de Hu: Ordonnancement de liste basé sur L est un ordonnancement de makespan minimal.
- Exemple au tableau.

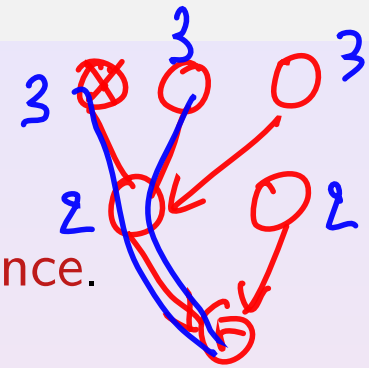
Contraintes de précédence - Cas polynomiaux

$P|intree, p_i = 1|C_{max}$

- Le graphe de précédence G est une anti-arborescence.
- Les durées des tâches sont unitaires.
- Soit n_j le niveau de la tâche dans G, c'est-à-dire le nombre de sommets du chemin de j à la racine de G.
- Soit $L = (1, 2, \cdots, n)$ est une liste de tâches ordonnées par niveau décroissant au sens large.
- Algorithme de Hu: Ordonnancement de liste basé sur L est un ordonnancement de makespan minimal.
- Exemple au tableau.

Contraintes de précédence - Cas polynomiaux

$P|intree, p_i = 1|C_{max}$



- Le graphe de précédence G est une anti-arborescence.
- Les durées des tâches sont unitaires.
- Soit n_j le niveau de la tâche dans G, c'est-à-dire le nombre de sommets du chemin de j à la racine de G.
- Soit $L = (1, 2, \cdots, n)$ est une liste de tâches ordonnées par niveau décroissant au sens large.
- Algorithme de Hu: Ordonnancement de liste basé sur L est un ordonnancement de makespan minimal.
- Exemple au tableau.

Contraintes de précédence - Cas polynomiaux

$P|intree, p_i = 1|C_{\max}$

- Le graphe de précédence G est une anti-arborescence.
- Les durées des tâches sont unitaires.
- Soit n_j le niveau de la tâche dans G, c'est-à-dire le nombre de sommets du chemin de j à la racine de G.
- Soit $L = (1, 2, \cdots, n)$ est une liste de tâches ordonnées par niveau décroissant au sens large.
- Algorithme de Hu: Ordonnancement de liste basé sur L est un ordonnancement de makespan minimal.
- Exemple au tableau.

Contraintes de précédence - Cas polynomiaux

$P|intree, p_i = 1|C_{max}$

- Le graphe de précédence G est une anti-arborescence.
- Les durées des tâches sont unitaires.
- Soit n_j le niveau de la tâche dans G, c'est-à-dire le nombre de sommets du chemin de j à la racine de G.
- Soit $L = (1, 2, \cdots, n)$ est une liste de tâches ordonnées par niveau décroissant au sens large.
- Algorithme de Hu: Ordonnancement de liste basé sur L est un ordonnancement de makespan minimal.
- Exemple au tableau.

Contraintes de précédence - Cas polynomiaux

$P|intree, p_i = 1|C_{max}$

- Le graphe de précédence G est une anti-arborescence.
- Les durées des tâches sont unitaires.
- Soit n_j le niveau de la tâche dans G, c'est-à-dire le nombre de sommets du chemin de j à la racine de G.
- Soit $L = (1, 2, \cdots, n)$ est une liste de tâches ordonnées par niveau décroissant au sens large.
- Algorithme de Hu: Ordonnancement de liste basé sur L est un ordonnancement de makespan minimal.
- Exemple au tableau.

Contraintes de précédence - Cas polynomiaux

$P2|prec, p_i = 1|C_{max}$

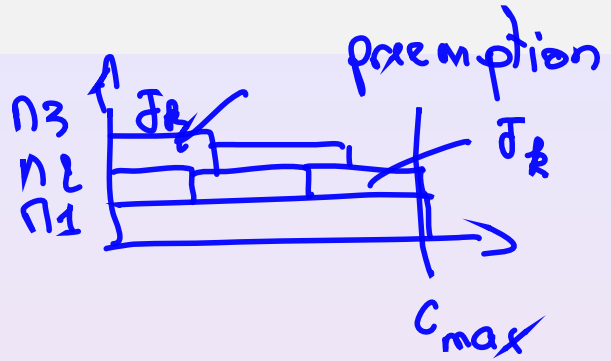
- Algorithme de Coffman-Graham: algorithme de liste efficace $O(n^2)$ pour résoudre ce problème.
- Soit n_i est la longueur en nombre de sommets d'un plus long chemin de G d'origine i.
- Idées de base :
  - si $n_i > n_j$ alors i doit être plus prioritaire que j
  - si $n_i = n_j$ et $Succ(i) \subset Succ(j)$ alors j doit être plus prioritaire que i.

Contraintes de précédence - Cas polynomiaux

$P2|prec, p_i = 1|C_{max}$

- Algorithme de Coffman-Graham: algorithme de liste efficace $O(n^2)$ pour résoudre ce problème.
- Soit n_i est la longueur en nombre de sommets d'un plus long chemin de G d'origine i.
- Idées de base :
  - si $n_i > n_j$ alors i doit être plus prioritaire que j
  - si $n_i = n_j$ et $Succ(i) \subset Succ(j)$ alors j doit être plus prioritaire que i.

Autres cas polynomiaux



fenêtres de temps

- Durées unitaires:
  - $P|p_i = 1, r_i, d_i|-$: Problème de flots
- Préemption
  - $P|pmtn|C_{max}$: Algorithme de Mac-Naughton
  - $P|pmtn, r_i, d_i|-$: Problème de flots

→ $\exists$ ord. optimal de durée $\max\left\{p_{max}, \left\lceil \frac{\sum p_i}{m} \right\rceil\right\}$

plus grande durée

On peut reprendre l'exécution d'1 tâche sur 1 machine #