MPRO - Examen d'ordonnancement 2016/2017

Christophe Picouleau, David Savourey

16 janvier 2017

L'examen dure 3h. Les notes de cours sont autorisées. Les livres ne sont pas autorisés. La clarté de rédaction sera prise en compte dans la notation.

1 Le problème $1||\sum w_i U_i$

On souhaite résoudre le problème d'ordonnancement à une machine suivant : on dispose de n jobs, chaque job étant défini une durée p_i, une date d'échéance d_i et un poids w_i. On cherche à minimiser la somme des poids des jobs en retard ($\sum w_i U_i$).

On supposera, sans perte de généralité, que l'on a renuméroté les jobs de sorte que $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$.

Soit l'instance suivante :

J_i	p_i	d_i	w_i
J_1	4	5	2
J_2	2	5	6
J_3	5	14	4
J_4	4	14	3
J_5	6	14	3
J_6	5	17	2

Question 1.1. *Calculer le coût de la séquence (J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6).*

On rappelle que le problème de décision PARTITION s'énonce de la manière suivante : On donne un entier B et n entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $\sum_i = 1^n x_i = 2B$. Existe-t-il une partition des entiers en deux sous-ensembles Y et Z de somme B ?

Question 1.2. *Montrer par une réduction polynomiale du problème PARTITION que le problème $1||\sum w_i U_i$ est NP-difficile.*

Question 1.3. *Démontrer qu'il existe un ordonnancement optimal tel que :*

a) les tâches à l'heure sont exécutées avant les tâches en retard ;

b) les tâches à l'heure sont exécutées dans l'ordre croissant de leurs dates échues.

On appelle *séquence à l'heure* un séquencement d'un sous-ensemble de tâches pour lequel toutes les tâches sont à l'heure.

On appelle gain d'une séquence à l'heure la somme des poids de ses tâches. On appelle gain d'un ordonnancement la somme des poids de ses tâches qui sont à l'heure.

Question 1.4. *Montrer que le problème revient alors à déterminer une séquence à l'heure dont le gain est maximal.*

Soit $I \subset J$ un sous-ensemble de tâches.On note respectivement P_I et w_I la sommes des durées et la somme des gains des tâches de I. Et soit T_i le sous-ensemble $\{J_1, J_2, \ldots, J_i\}$.

Question 1.5. *Soient deux séquences à l'heure S_1 et S_2 dont les restrictions H_1 et H_2 à T_i vérifient $p_{H_1} \geq p_{H_2}$ et $w_{H_1} \leq w_{H_2}$. Montrer que toute séquence à l'heure de préfixe H_1 est dominée par une séquence à l'heure de préfixe H_2.*

Soit Π_i la restriction du problème au sous-ensemble T_i. Pour tout entier $w \in \{0, 1, \ldots, w_{T_i}\}$, on note $\sigma_i(w)$ l'ensemble des séquences à l'heure de Π_i de gain w et $P_i(w)$ la durée minimale d'une séquence à l'heure de $\sigma_i(w)$. Par convention, on pose $P_i(w) = \infty$ si $\sigma_i(w) = \emptyset$.

Question 1.6. *Proposer un schéma récursif permettant de calculer de proche en proche les valeurs $P_i(w)$. On considèrera plusieurs cas :*

- *la tâche i ne peut pas être utiliser pour définir $P_i(w)$;*
- *la tâche i peut être utilisée pour définir $P_i(w)$, mais il est préférable de ne pas l'utiliser ;*

— *la tâche i peut être utilisée pour définir $P_i(w)$, et il est préférable de l'utiliser.*

Question 1.7. *En déduire un algorithme pour calculer un ordonnancement optimal. Donner la complexité de cet algorithme, et justifier brièvement.*