MPRO - Examen d'ordonnancement 2011

Christophe Picouleau, David Savourey

janvier 2012

1 Nombre de jobs en retard

On souhaite résoudre le problème d'ordonnancement $1||\sum U_i$, où n jobs doivent être ordonnancés sur une machine, sans préemption, de sorte que le nombre de jobs en retard soit minimal. Nous utiliserons les conventions suivantes dans la suite de cet exercice. Les jobs seront indicés de 1 à n. Nous noterons classiquement p_i la durée du job i, et d_i sa date d'échéance. On note C_i la date de fin du job i lorsqu'il est ordonnancé. On rappelle que :

$$U_i = \begin{cases} 0 \text{ si } C_i \leq d_i, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, afin de simplifier les notations, on suppose que $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$.

Question 1.1. Montrer qu'il existe un ordonnancement optimal pour lequel :
- les jobs à l'heure précèdent les jobs en retard ;
- les jobs à l'heure sont ordonnancés dans l'ordre croissant des dates d'échéance.

En déduire qu'un ensemble de jobs à l'heure suffit à déterminer un ordonnancement qui respecte ces deux propriétés.

Afin de résoudre le problème, nous allons utiliser l'algorithme 1.

Question 1.2. Appliquer l'algorithme ci-dessus sur l'instance suivante. Reporter le déroulement de l'algorithme et dessiner le diagramme de Gantt de l'ordonnancement produit.

1 $t \leftarrow 0$, $A \leftarrow \emptyset$, $B \leftarrow \emptyset$;
2 **pour** $i = 1$ *à* n **faire**
3     $t \leftarrow t + p_i$, $A \leftarrow A \cup \{J_i\}$;
4   **si** $t > d_i$ **alors**
5   Soit J_k le job de A de durée maximale ;
6         $A \leftarrow A \setminus \{J_k\}$, $B \leftarrow B \cup \{J_k\}$;
7         $t \leftarrow t - p_k$;
8 Ordonnancer les jobs de A dans l'ordre croissant des indices, puis les jobs de B dans un ordre quelconque.

Algorithme 1 : Algorithme pour résoudre $1||\sum U_i$

J_i	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
p_i	6	4	7	8	3	5
d_i	8	9	15	20	21	22

Question 1.3. Évaluer la complexité de cet algorithme. Justifier brièvement votre réponse.

Question 1.4. Soit J_u le premier job inseré dans l'ensemble B (ligne 6). Montrer qu'il existe un ordonnancement optimal respectant les propriétés de la Question 2.1 où le job J_u est en retard.

Question 1.5. En déduire que l'algorithme 1 est valide pour résoudre le problème $1||\sum U_i$.