Décembre 2020

1 Machines parallèles identiques - Borne de Graham

Le problème de l'ordonnancement sur m machines de n tâches non indépendantes de durée $p_1, p_2, \cdots, p_n$, en une durée totale minimale est un problème NP-difficile au sens fort. Le but de cet exercice est de montrer que, pour ce problème, la distance en valeur relative de tout ordonnancement de liste à la solution optimale est inférieure à $2 - \frac{1}{m}$, c'est-à-dire que

$$C_{\max} \leq C^*_{\max} \left(2 - \frac{1}{m}\right),$$

où $C_{\max}$ est la durée d'un ordonnancement de liste et $C^*_{\max}$ la durée optimale.

Question 1. *On note A la somme des périodes d'activité des m machines dans l'ordonnancement de liste. Que vaut A en fonction de $p_1, p_2, \cdots, p_n$?*

Question 2. *On note I la somme des périodes d'inactivité des m machines dans l'ordonnancement de liste entre 0 et $C_{\max}$. Quelle relation y a-t-il entre A, I, m et $C_{\max}$?*

Question 3. *Justifier que $A \leq m \cdot C^*_{\max}$.*

On se propose de majorer I en fonction de $C^*_{\max}$. J_{i_1} désigne une tâche se terminant en même temps que l'ordonnancement de liste : $C_{\max} = S_{i_1} + p_{i_1}$, où S_{i_1} est la date de début de la tâche J_{i_1}.

Question 4. *Montrer que s'il n'y a pas de période d'inactivité machine entre 0 et S_{i_1} alors $I \leq (m-1)p_{i_1}$.*

Question 5. *On suppose qu'il y a une période d'inactivité machine entre 0 et S_{i_1} et on note $[t_0, t_0 + 1[$ la dernière période d'inactivité entre 0 et S_{i_1}. Montrer qu'il existe une tâche J_{i_2} prédécesseur de J_{i_1} qui s'exécute dans l'intervalle $[t_0, t_0 + 1[$.*

Question 6. *Plus généralement, montrer qu'il existe une suite de tâches J_{i_r}, $J_{i_{r-1}}$, $\cdots$, J_{i_1} telle que :*
— J_{i_r} précède $J_{i_{r-1}}$ qui précède $J_{i_{r-2}}$ $\cdots$ qui précède J_{i_1},
— ces tâches se succèdent sans interruption de la date 0 à la date S_{i_1},
— pendant chaque période d'inactivité, au moins une des tâches $J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, J_{i_r}$ s'exécute.

Question 7. *En déduire que : $I \leq (m-1)(p_{i_1} + \cdots + p_{i_r})$.*

Question 8. *Comparer I et $C^*_{\max}$.*

Question 9. *Montrer que : $C_{\max} \leq (2 - \frac{1}{m})C^*_{\max}$*