Bases de l'ordonnancement

Problèmes à une machine

Safia Kedad-Sidhoum

CNAM
safia.kedad_sidhoum@cnam.fr

BOR - M2 MPRO, 2020-2021

Problèmes à une machine (1/2)

Règle de Smith

On souhaite ordonnancer sur une machine, un ensemble de n tâches non préemptives de durée p_i.

- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i C_i$
  Règle SPT. Preuve
- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i w_i C_i$
  Règle WSPT. Preuve
- Exemple: $n = 6$, $p = (8, 6, 3, 7, 4, 8)$, $w = (8, 3, 6, 7, 8, 1)$.

Problèmes à une machine (1/2)

Règle de Smith

On souhaite ordonnancer sur une machine, un ensemble de n tâches non préemptives de durée p_i.

- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i C_i$
  Règle SPT. Preuve
- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i w_i C_i$
  Règle WSPT. Preuve
- Exemple: $n = 6$, $p = (8, 6, 3, 7, 4, 8)$, $w = (8, 3, 6, 7, 8, 1)$.

Problèmes à une machine (1/2)

Règle de Smith

On souhaite ordonnancer sur une machine, un ensemble de n tâches non préemptives de durée p_i.

- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i C_i$
  Règle SPT. Preuve
- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i w_i C_i$
  Règle WSPT. Preuve
- Exemple: $n = 6$, $p = (8, 6, 3, 7, 4, 8)$, $w = (8, 3, 6, 7, 8, 1)$.

Problèmes à une machine (1/2)

Règle de Smith

On souhaite ordonnancer sur une machine, un ensemble de n tâches non préemptives de durée p_i.

- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i C_i$
  Règle SPT. Preuve
- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i w_i C_i$
  Règle WSPT. Preuve
- Exemple: $n = 6$, $p = (8, 6, 3, 7, 4, 8)$, $w = (8, 3, 6, 7, 8, 1)$.

Problèmes à une machine (1/2)

Règle de Smith

On souhaite ordonnancer sur une machine, un ensemble de n tâches non préemptives de durée p_i.

- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i C_i$
  Règle SPT. Preuve
- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i w_i C_i$
  Règle WSPT. Preuve
- Exemple: $n = 6$, $p = (8, 6, 3, 7, 4, 8)$, $w = (8, 3, 6, 7, 8, 1)$.

Preuve SPT (Shortest Processing Time)

Soit un ordre quelconque $(J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_n})$

On a $C_{i_1} + C_{i_2} + \dots + C_{i_n} = p_{i_1} + (p_{i_1} + p_{i_2}) + \dots (p_{i_1} + \dots + p_{i_n})$

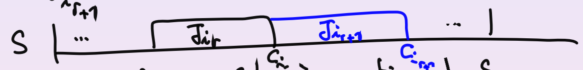
$$\sum_{j=1}^{n} C_{i_j} = n\, p_{i_1} + (n-1) p_{i_2} + \dots + p_{i_n}$$

La somme des C_{i_j} est minimal si l'ordre correspond à l'ordre croissant des p_i pour $i = 1, \dots, n$.

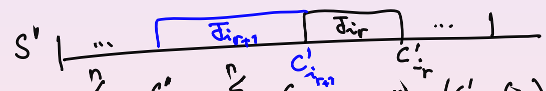
Règle WSPT (Weighted SPT)

(Argument d'échange)

Soient 2 tâches consécutives J_{i_r} et $J_{i_{r+1}}$ / $\frac{p_{i_r}}{w_{i_r}} > \frac{p_{i_{r+1}}}{w_{i_{r+1}}}$ d'un ordonnancement S optimal.



On construit S' à partir de S en intervertissant l'ordre de J_{i_r} et $J_{i_{r+1}}$.



On a
$$\sum_{j=1}^{n} w_{i_j} C'_{i_j} - \sum_{j=1}^{n} w_{i_j} C_{i_j} = w_{i_r} (C'_{i_r} - C_{i_r}) + w_{i_{r+1}} (C'_{i_{r+1}} - C_{i_{r+1}})$$
$$= w_{i_r} p_{i_{r+1}} - w_{i_{r+1}} p_{i_r}$$
$$< 0 \quad \text{car} \quad \frac{p_{i_r}}{w_{i_r}} > \frac{p_{i_{r+1}}}{w_{i_{r+1}}}$$

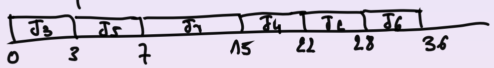
S' est donc strictement meilleur que S. Contradiction.

Exemple

$\frac{p}{w} = (1, 2, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 8)$

Il y a 4 solutions optimales compte tenu de l'égalité de certains ratios.

Par exemple :



Problèmes à une machine (2/2)

Règle de Smith

On souhaite ordonnancer sur une machine, un ensemble de n tâches préemptives de durée p_i.

- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i C_i$
- Contrainte: dates de disponibilité des tâches r_i

  Règle SRPT. Preuve à faire.

Problèmes à une machine (2/2)

Règle de Smith

On souhaite ordonnancer sur une machine, un ensemble de n tâches préemptives de durée p_i.

- Critère: minimiser la somme des dates de fin des tâches, $\sum_i C_i$
- Contrainte: dates de disponibilité des tâches r_i

  Règle SRPT. Preuve à faire.

Safia Kedad-Sidhoum - 6 (CNAM) Ordonnancement 2020-2021 6 / 10