Calculabilité

P. Courtieu

21 mars 2013

λ–calcul
Introduction
Réduction
Codages
Récursion

Fonctions récursives
Introduction
Primitives
Partielles et totales

Réduction F.R. ⇒ λ
Énoncé du théorème
Fonction de base
Opérateurs

Preuve d'équivalence M.T. / F.R.
Codage des machines de Turing
Énoncé du théorème
Idée de la preuve du théorème

Introduction

- Aujourd'hui : λ-calcul non typé
- Dû à ALonzo Church (années 30)
- Contemporain des machines de Turing
- Au moins aussi fondateur :
  - Modèle de calcul
  - Origine de la programmation fonctionnelle
  - Déduction formelle (Coq)

Références

- H. Barendregt, The Lambda-Calculus, volume 103, Elsevier Science Publishing Company, Amsterdam, 1984.
- Jean-Louis Krivine, Lambda-Calcul, types et modèles, Masson 1991.
- Wikipedia (version française bien, version anglaise plus complète)

Qu'est-ce qu'une fonction ?

- Purement syntaxique
- Expression « attendant » un argument
- Calcul = *substituer* l'argument appliqué
- C'est tout !
- (mauvais [1]) exemple :

$$\text{Si } \ \text{inc}(x) = x + 1 \ \text{ alors } \ \text{inc}(3) \equiv 3 + 1.$$

1. « + » et « 1 » n'existent pas, Nous les *coderons* plus loin (*Entiers de Church*).

Comment écrire une fonction ?

- $x + 1$? NON : **Expression contenant** $x \neq$ **fonction sur** x.
- $x \mapsto x + 1$? OUI : $\boxed{\lambda x.(x + 1)}$
- Application : $\boxed{\text{f e}}$

Exemples

$$\begin{array}{lcl} (\lambda x.(x+1))\ 3 & \rightarrow & 3+1 \\ (\lambda x.(\lambda y.(x+y)))\ 3 & \rightarrow & \lambda y.(3+y) \end{array}$$

```
(fun x -> x+1) 3
(fun x -> fun y -> x+y) 3
```

Syntaxe

Grammaire extrêmement minimale :

$e ::=$	x		Variable
	$\mid \lambda x.e$		$\lambda -$ « Abstraction »
	$\mid e\ e$		Application fonction/argument

Ex :

- $\lambda x.x$, $\lambda x.y$, $\lambda x.x\ x$, $\lambda x.(x\ x)$, $(\lambda x.x)\ x$,
- $\lambda x.(\lambda y.(x\ x))y$
- Terme = arbre
- Parenthèses pour « désambiguer » l'écriture linéaire.

Parenthèses

- Application associe à gauche.
  - $x\ y\ z = (x\ y)\ z$ (et pas $x\ (y\ z)$)
- Application $>$ abstraction
  - $\lambda x.x\ x = \lambda x.(x\ x)$ (et pas $(\lambda x.x)\ x$)
  - $\lambda x.x\ y\ x = \lambda x.((x\ y)\ x)$
- $\lambda x.\lambda y.\lambda z.e = \lambda x.(\lambda y.(\lambda z.e))$ (pas d'autre choix)

Abus de notation (que j'éviterai autant que possible)

- $\lambda xyz.e = \lambda x.\lambda y.\lambda z.e$
- $xy = x\ y$ Si clair que xy pas un nom de variable

Réduction / calcul

Une seule règle de calcul :

$$(\lambda x.t)\ u \to_\beta t[x \leftarrow u]$$

$t[x \leftarrow u] \equiv$ t « dans lequel toutes les occurrences libres de x sont remplacées par u »

Ex :
- $(\lambda x.(x\ y))\ z \to_\beta z\ y$
- $(\lambda x.x\ y)\ z \to_\beta z\ y$
- $(\lambda x.x\ y\ x)\ z \to_\beta z\ y\ z$
- $(\lambda x.x\ y\ (\lambda x.x\ t))\ z \to_\beta (x\ y\ (\lambda x.x\ t))[x \leftarrow z]$
  $= z\ y\ (\lambda x.x\ t)$

Réduction / collision de variable

$(\lambda x.\lambda y y.x\ y y)\ y y \to_\beta (\lambda y.x\ y)[x \leftarrow y] \equiv \lambda y.y\ y$ NON, confusion de deux y différents

$\equiv (\lambda x.\lambda z z.x\ z z)\ y \to_\beta (\lambda z.x\ z)[x \leftarrow y] \equiv \lambda z.y\ z$ *OUI*

- En revanche : $(\lambda x.x\ y)\ y \to_\beta y\ y$ OK
- α-équivalence : renommage des variables *liées*

$$\lambda x.t \equiv_\alpha \lambda z.(t[x \leftarrow z])$$

Variables libres

$FV(t)$: Ensemble des variables ayant une occurrence libre dans t :

$$\begin{array}{lcl} FV(x) & = & \{x\} \\ FV(t_1\ t_2) & = & FV(t_1) \cup FV(t_2) \\ FV(\lambda x.t) & = & FV(t) \setminus \{x\} \end{array}$$

(Définition par induction)

Substitutions des variables libres (sans capture)

Par *induction* sur les termes :

$$\begin{array}{rl} x[x \leftarrow t] \equiv & t \\ x[y \leftarrow t] \equiv & x \qquad (\text{si } x \neq y) \\ (t_1\ t_2)[x \leftarrow t] \equiv & (t_1[x \leftarrow t])\ (t_2[x \leftarrow t]) \\ (\lambda x.t)[x \leftarrow u] \equiv & t \\ (\lambda x.t)[y \leftarrow u] \equiv & \lambda x.(t[y \leftarrow u]) \quad \text{si } x \neq y \text{ et si x} \notin \text{FV(u)} \end{array}$$

β-équivalence

$$t =_\beta u \text{ ssi } t \leftrightarrow_\beta^* u$$

- $(\lambda x.(\lambda y.x)\ z)\ t \to_\beta (\lambda y.t)\ z$
  $(\lambda x.(\lambda y.x)\ z)\ t \to_\beta (\lambda x.x)\ t$
- $(\lambda x.(\lambda y.x)\ z)\ t =_\beta (\lambda y.t)\ z =_\beta (\lambda x.x)\ t$

Propiétés du λ–*calcul*

- Unicité de la forme normale
- Pas de terminaison systématique
- Stratégies de réduction
- Terminaison sur les termes « bien typés »
- Vous verrez ça plus tard dans le cours

Codage des booléens

Idée : true = « THEN », false = « ELSE »

- $TRUE := \lambda x.\lambda y.x$ $\quad$ $FALSE := \lambda x.\lambda y.y$
  $TRUE\ t_1\ t_2 \rightarrow_\beta t_1$ $\quad$ $FALSE\ t_1\ t_2 \rightarrow_\beta t_2$
- IFTHENELSE $:= \lambda p.\lambda a.\lambda b.p\ a\ b$
  IFTHENELSE $TRUE\ t_1\ t_2 \rightarrow_\beta TRUE\ t_1\ t_2 \rightarrow_\beta t_1$
  IFTHENELSE $FALSE\ t_1\ t_2 \rightarrow_\beta FALSE\ t_1\ t_2 \rightarrow_\beta t_2$

Exercice : AND, OR et NOT.

Exercice : Codage de AND et OR

- $AND := ?\ \lambda p.\lambda q.p\ q\ p$
  « p et q » = « si p alors q sinon false »
  « p et q » = « si p alors q sinon p »
  $\lambda p.\lambda q.$ IFTHENELSE $p\ q\ p$
  $\lambda p.\lambda q.p\ q\ p$

- $OR := ?\ \lambda p.\lambda q.p\ p\ q$
  « p ou q » = « si p alors true sinon q »
  « p ou q » = « si p alors p sinon q »
  $\lambda p.\lambda q.$ IFTHENELSE $p\ p\ q$
  $\lambda p.\lambda q.p\ p\ q$

Exercice : Codage de NOT

- $NOT := ?\ \lambda p.\lambda x.\lambda y.p\ y\ x$ Doit transformer $\lambda x.\lambda y.x$ en $\lambda x.\lambda y.y$ et vice-versa.
  $(?)\ (\lambda x.\lambda y.x) \rightarrow_\beta \lambda x.\lambda y.y$
  $(\lambda p.?)(\lambda x.\lambda y.x) \rightarrow_\beta \lambda x.\lambda y.y$
  $(\lambda p.\lambda x.\lambda y.?)(\lambda x.\lambda y.x) \rightarrow_\beta \lambda x.\lambda y.y$
  $(\lambda p.\lambda x.\lambda y.p\ y\ ?)(\lambda x.\lambda y.x) \rightarrow_\beta \lambda x.\lambda y.y$ OK !
  Vice versa :
  $(\lambda p.\lambda x.\lambda y.p\ y\ ?)(\lambda x.\lambda y.y) \rightarrow_\beta \lambda x.\lambda y.x$
  $(\lambda p.\lambda x.\lambda y.p\ y\ x)(\lambda x.\lambda y.y) \rightarrow_\beta \lambda x.\lambda y.x$ OK !

Codage des entiers (Church)

n = fonction $f \mapsto f^n$, où f est une fonction

- $0 := \lambda f.\lambda x.x$
- $1 := \lambda f.\lambda x.f\ x$
- $2 := \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x)$
- $3 := \lambda f.\lambda x.f\ (f\ (f\ x))$
- ...

Ex : Codage du successeur

- Successeur ?
  $SUCC\ N \to^*_\beta N+1$ $SUCC := \lambda n.\lambda f.\lambda x.f\ (n\ f\ x)$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda f.\lambda x.f^n\ x)\\
&((\lambda f.\lambda x.f^n\ x)\ f\ x) &&\to^*_\beta && (f^n\ x)\\
&f\ ((\lambda f.\lambda x.f^n\ x)\ f\ x) &&\to^*_\beta && f\ (f^n\ x)\\
&\lambda f.\lambda x.\ f\ ((\lambda f.\lambda x.f^n\ x)\ f\ x) &&\to^*_\beta && \lambda f.\lambda x.\ f\ (f^n\ x)\\
&(\lambda n.\ \lambda f.\lambda x.\ f\ (n\ \ f\ x))\ N &&\to^*_\beta && N+1
\end{aligned}
$$

- Addition ?

Ex : Codage de l'addition

?

Codage du test à zéro

?

Ex : Codage de la multiplication

?

paires et listes

$PAIR := \lambda x.\lambda y.\lambda f.f\ x\ y$
$FIRST := \lambda p.p\ TRUE$
$SECOND := \lambda p.p\ FALSE$
$NIL := ?$
$NULL := ?$

Récursion

- Appliquer une fonction à elle-même
- Semble (à tord) impossible
- Impossible sauf si argument d'une fonction
- Et qu'on l'applique elle-même

$$\begin{aligned} & (\lambda f.f\ f)(\lambda f.f\ f)(\lambda f.f\ f) \\ \to_\beta\ & (\lambda f.f\ f)(\lambda f.f\ f) \\ \to_\beta\ & (\lambda f.f\ f)(\lambda f.f\ f) \\ \to_\beta\ & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\lambda f.1+f\ f)(\lambda f.1+f\ f)(\lambda f.1+f\ f) \\ \to_\beta\ & 1+(\lambda f.1+f\ f)(\lambda f.1+f\ f) \\ \to_\beta\ & 1+1+(\lambda f.1+f\ f)(\lambda f.1+f\ f) \\ \to_\beta\ & \dots \end{aligned}$$

Factorielle

- Équation récursive :
  `F(n) = if n=0 then 1 else n×F(n-1)`
  `F =λn. if n=0 then 1 else n×F (n-1)`
- F auto-argument
  `λF.λn. if n=0 then 1 else n × F F (n-1)`
- Appliquée à elle-même
  `F:=`
  `(λF.λn.if n=0 then 1 else n×F F (n-1))  λF.λn.if n=0 then 1 else n×F F (n-1)`
  ou bien :
  `F:=(λx.x x) (λF.λn.if n=0 then 1 else n × F F (n-1))`

Ex : Factorielle de 3

- On note :
  `G := if n=0 then 1 else n × F F (n-1)`
  `F := (λF.λn.G) (λF.λn.G)`
- Calcul de `F 3`
  `F 3 = (λF.λn.G) (λF.λn.G) 3`
  $\rightarrow_\beta$ `(λn.G[F←λF.λn.G]) 3`
  $\rightarrow_\beta$ `(λn.if n=0 then 1 else n × (λF.λn.G) (λF.λn.G) (n-1)) 3`
  $\rightarrow_\beta$ `(if 3=0 then 1 else 3 × (λF.λn.G) (λF.λn.G) 2)`
  $\rightarrow_\beta^*$ `3 × (λF.λn.G) (λF.λn.G) 2`
  $\equiv$ `3 × F 2`

Ex : Factorielle de 2

- Calcul de `F 2`
  `F 2 = (λF.λn.G) (λF.λn.G) 2`
  $\rightarrow_\beta$ `(λn.G[F←λF.λn.G]) 2`
  $\rightarrow_\beta$ `(λn.if n=0 then 1 else n × (λF.λn.G) (λF.λn.G) (n-1)) 2`
  $\rightarrow_\beta$ `(if 2=0 then 1 else 2 × (λF.λn.G) (λF.λn.G) 1)`
  $\rightarrow_\beta^*$ `2 × (λF.λn.G) (λF.λn.G) 1`
  $\equiv$ `2 × F 1`

Ex : Factorielle de 1

- Calcul de `F 1`
  `F 1 = (λF.λn.G) (λF.λn.G) 1`
  $\rightarrow_\beta$ `(λn.G[F←λF.λn.G]) 1`
  $\rightarrow_\beta$ `(λn.if n=0 then 1 else n × (λF.λn.G) (λF.λn.G) (n-0)) 1`
  $\rightarrow_\beta$ `(if 1=0 then 1 else 1 × (λF.λn.G) (λF.λn.G) 0)`
  $\rightarrow_\beta^*$ `1 × (λF.λn.G) (λF.λn.G) 0`
  $\equiv$ `1 × F 0`

Ex : Factorielle de 0

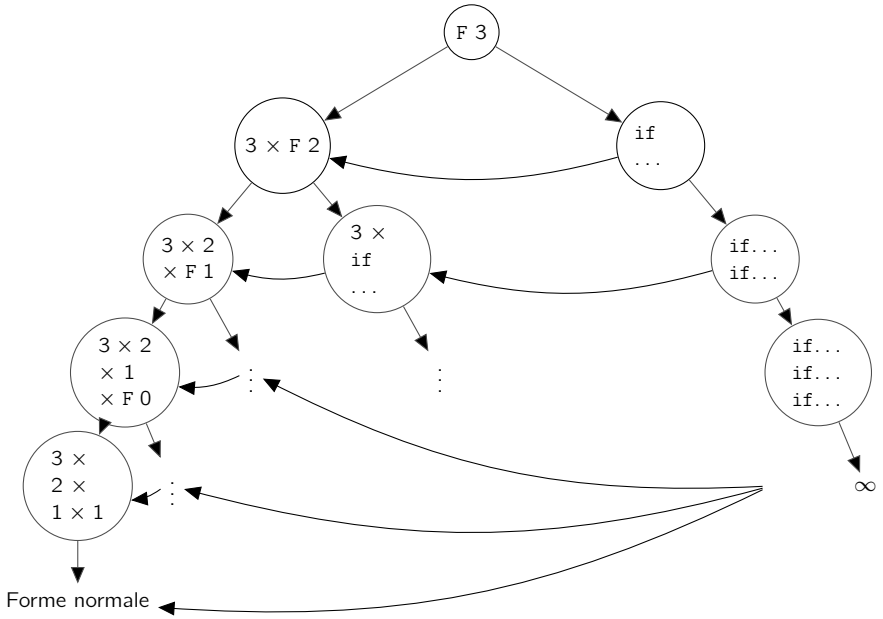
- Calcul de `F 0`
  `F 0 = (λF.λn.G) (λF.λn.G) 0`
  $\rightarrow_\beta$ `(λn.G[F←λF.λn.G]) 0`
  $\rightarrow_\beta$ `(λn.if n=0 then 1 else n × (λF.λn.G) (λF.λn.G) (n-0)) 0`
  $\rightarrow_\beta$ `(if 0=0 then 1 else 0 × (λF.λn.G) (λF.λn.G) 0)`
  $\rightarrow_\beta^*$ `1`

Quid si autre stratégie de réduction ?

```
F 3 =   (λF.λn.G) (λF.λn.G) 3
 →β     (λn.G[F←λF.λn.G]) 3
  ≡     (λn.if n=0 then 1 else n × (λF.λn.G) (λF.λn.G) (n-1)) 3
 →β     (λn.if n=0 then 1 else n × (λn.G[F ← λF.λn.G]) (n-1)) 3
  ≡     (λn.if n=0 then 1 else n ×
          (λn.if n=0 then 1 else n × (λF.λn.G) (λF.λn.G) (n-1))
                                                        (n-1)) 3
```

. . . Calcul infini

Confluence faible



Récursion moins ad hoc ?

- Définition de la factorielle ad hoc
- Existe-t-il un mécanisme plus systématique ? Oui
- *Opérateurs de point fixe*
- P t.q. $P\ f =_\beta f\ (P\ f)$
- $P\ f\ x =_\beta (f\ (P\ f))x =_\beta (f\ (f\ (P\ f)))x\ \ldots$
- Boucle infinie potentielle
- Stratégie : dépliage « suffisant » de la récursion

Exemples d'opérateur de point fixe

$$\mathbf{Y} = \lambda f.((\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x)))$$

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{Y}\ g \\ = & \lambda f.((\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x)))\ g \\ \rightarrow_\beta & (\lambda x.g\ (x\ x))\ (\lambda x.g\ (x\ x)) \\ \rightarrow_\beta & g\ ((\lambda x.g\ (x\ x))\ (\lambda x.g\ (x\ x))) \\ \leftarrow_\beta & g\ (\lambda f.((\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x)))g) \\ = & g\ (\mathbf{Y}\ g) \end{array}$$

Factorielle

$G = \lambda r.\lambda n.(\text{IFTHENELSE (ISZERO } n) \; 1 \; (n * (r \; (n-1)))$

$(Y \; G) \; 3 =_\beta (G \; (G \; (G \; (Y \; G)))) \; 3$

$$\left(G \left(G \left(\left(\lambda r.\lambda n. \begin{pmatrix} \text{IFTHENELSE (ISZERO } n) \\ 1 \\ (n * r \; (n-1)) \end{pmatrix}\right) (Y \; G)\right)\right)\right) 3$$

$$\dots$$

$$\left(\lambda n. \left(\begin{pmatrix} \text{IFTHENELSE (ISZERO } n) \\ 1 \\ \left(n * \left(\lambda n. \left(\begin{pmatrix} \text{IFTHENELSE (ISZERO } n) \\ 1 \\ \left(n * (\lambda n. \begin{pmatrix} \text{IFTHENELSE (ISZERO } n) \\ 1 \\ (n * (Y \; G) \; (n-1)) \end{pmatrix}) \; (n-1)\right) \end{pmatrix}\right) (n-1)\right) \end{pmatrix}\right)\right) 3$$

$$\dots$$

$$3 * 2 * \begin{pmatrix} \text{IFTHENELSE (ISZERO } 1) \\ 1 \\ (1 * (Y \; G) \; (1-1)) \end{pmatrix}$$

Exercice : réduction infinie

- Montrez que le calcul de factorielle de 3 peut ne pas terminer

stratégies de réduction

- *Ordre applicatif* : à droite d'abord, en profondeur d'abord.
- *Appel par valeur* = à droite d'abord, en tête d'abord (Ocaml)
- *Normale* : à gauche d'abord, en tête d'abord (termine toujours, pas efficace)
- *Appel par nom* = Normale mais pas de réduction sous les λ
- *Paresseux* = Normale mais partage des redex dupliqué (Haskell)

Normale : Termine toujours si il existe une forme normale

Autres opérateurs de point fixe

- **Y** Boucle en stratégie appel par valeur
- **Y** Ok en paresseux
- **Z** $= \lambda f.(\lambda x.f \; (\lambda y.x \; x \; y))(\lambda x.f \; (\lambda y.x \; x \; y))$
- **Z** OK en appel par valeur

Op. de point fixe : dans quels calculs ?

L'ensemble des OPF est

- Infini (récursivement énumérablement) dans le λ-calcul non typé
- Vide dans le λ-calcul simplement typé (que vous verrez plus tard)
- Non vide dans certains λ-calculs à typage plus puissant (ex : F_ω)

Références

- Cours D. Pichardie (très bien)
  `http://www.irisa.fr/celtique/pichardie/teaching/L3/LOG/`
- Wikipedia (pas mal)

Fonctions récursives primitives

- Décrire les fonctions sur $\mathbb{N}$
  - Autres ensembles récursivement énumérables : codage
  - Définir la récurrence/récursion facilement
- Fonctions d'arité quelconque

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_k \text{, où : } \mathcal{F}_k = \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

- Fonction de base + *Opérateurs* (composition, récursion, *minimisation*)

Fonction récursive de base

- **Fonction zéro** 0 (d'arité 0) : $0() = 0$
- **Fonction successeur** σ : $\sigma(n) = n + 1$
- **Projections** π_i^k : $\pi_i^k(n_1,\ldots,n_k) = n_i$

Exemples

- Fonction identité : $Id = \pi_1^1$ $Id(n) = \pi_1^1(n) = n$
- Fonction $fst = \pi_1^2$ $fst(n,m) = \pi_1^2(n,m) = n$
- Fonction $snd = \pi_2^2$ $snd(n,m) = \pi_2^2(n,m) = m$

Opérateurs de composition

- f d'arité p,
- $g_1,\ldots,g_p$ d'arité q,
- **Opérateur de composition** $\mathcal{C}(f,(g_1,\ldots,g_p))$:

$$\mathcal{C}(f,(g_1,\ldots,g_p))(n_1,\ldots,n_q) \equiv f\left(g_1(n_1,\ldots,n_q),\ldots,g_p(n_1,\ldots,n_q)\right)$$

Exemples

$$\begin{array}{lll} \mathcal{C}(f,(g_1,\ldots,g_p))\ (n_1,\ldots,n_q) & \equiv & f\left(g_1(n_1,\ldots,n_q),\ldots,g_p(n_1,\ldots,n_q)\right) \\ \mathcal{C}(\sigma,(0))\ () & \equiv & \sigma\left(0()\right) \\ \mathcal{C}(\sigma,(1))\ () & \equiv & \sigma\left(1()\right) \end{array}$$

- Fonction $1 = \mathcal{C}(\sigma,(0))$ $\sigma(0()) = 1$
- Fonction $2 = \mathcal{C}(\sigma,(1))$ $\sigma(1()) = 2$

Exemples

f d'arité 0 $\rightarrow$ pas de g_i donc arité quelconque

$$\begin{array}{lll} \mathcal{C}(f,(g_1,\ldots,g_p)) & (n_1,\ldots,n_q) & \equiv f\,(g_1(n_1,\ldots,n_q),\ldots,g_p(n_1,\ldots,n_q)) \\ \mathcal{C}(0,()) & (n) & \equiv 0() \\ \mathcal{C}(0,()) & (n,m) & \equiv 0() \end{array}$$

- Fonction $0^1(n) = \mathcal{C}(0,())$ (pas de g_i) $\quad 0^1(n) = 0()$
- Fonction $1^1(n) = \mathcal{C}(\sigma, 0^1)$ $\quad 1^1(n) = \sigma(0()) = 1$
- Fonction $2^1(n) = \mathcal{C}(\sigma, 1^1)$ $\quad 2^1(n) = \sigma(\sigma(0())) = 2$
- Fonction $0^2(n,m) = \mathcal{C}(0,())$ (pas de g_i) $\quad 0^2(n,m) = 0()$

Exemples

$$\begin{array}{lll} \mathcal{C}(f,(g_1,\ldots,g_p)) & (n_1,\ldots,n_q) & \equiv f\,(g_1(n_1,\ldots,n_q),\ldots,g_p(n_1,\ldots,n_q)) \\ \mathcal{C}(\sigma,(\sigma)) & (n) & \equiv \sigma\,(\sigma(n)) \end{array}$$

- Fonction $+2(n) = \mathcal{C}(\sigma,\sigma)$ $\quad +2(n) = n+2$

Opérateurs de récursion

- f d'arité p
- g d'arité $p+2$,
- **Opérateur de récursion** $\mathcal{R}(f,g)$:

$$\mathcal{R}(f,g)(n_1,\ldots,n_p,i) \equiv \begin{cases} f(n_1,\ldots,n_p) & \text{si } i = 0 \\ g(n_1,\ldots,n_p,m,\mathcal{R}(f,g)(n_1,\ldots,n_p,m)) & \text{si } i = m+1 \end{cases}$$

- Autrement dit si $\vec{n} = n_1,\ldots,n_p$:

$$\mathcal{R}(f,g) = h \text{ t.q. } \begin{cases} h(\vec{n},0) & \equiv f(\vec{n}) \\ h(\vec{n},m+1) & \equiv g(\vec{n},m,h(\vec{n},m)) \end{cases}$$

Exemple : +

$$\mathcal{R}(f,g) = h \text{ t.q. } \begin{cases} h(\vec{n},0) & \equiv f(\vec{n}) \\ h(\vec{n},m+1) & \equiv g(\vec{n},m,h(\vec{n},m)) \end{cases}$$

- Addition :

$$\begin{array}{lll} +(n_1,0) & = & n_1\pi^1_1(n_1) \\ +(n_1,n_2+1) & = & 1 + (+(n_1,n_2))\ \ \sigma(+(n_1,n_2)) \\ & & \sigma(\pi^3_3(n_1,n_2,+(n_1,n_2))) \\ & & \mathcal{C}(\sigma,(\pi^3_3))\,(n_1,n_2,+(n_1,n_2)) \end{array}$$

- Fonction $+ = \mathcal{R}(\pi^1_1,(\mathcal{C}(\sigma,(\pi^3_3))))$

Abus de notation

- Plus lisible : infixe + projections implicites :

$$n_1{+}n_2 \equiv \begin{cases} n_1 + 0 & = & n_1 & \in \mathcal{F}(n_1) \\ n_1 + (n_2 + 1) & = & \sigma(n_1 + n_2) & \in \mathcal{F}(n_1, n_2, (n_1 + n_2)) \end{cases}$$

- Attention aux abus

Exercice : $-$, $\times$

$$\mathcal{R}(f, g) = h \text{ t.q. } \begin{cases} h(\vec{n}, 0) & \equiv & f(\vec{n}) \\ h(\vec{n}, m+1) & \equiv & g(\vec{n}, m, h(\vec{n}, m)) \end{cases}$$

$$n_1{-}n_2 \equiv \begin{cases} n_1 - 0 & = & n_1 \\ n_1 - (n_2 + 1) & = & pred(\pi^3_3(n_1, n_2, (n_1 - n_2)))(n_1 - n_2) - 1 \end{cases}$$

$$prec(m) \equiv \begin{cases} pred(0) & = & 0 \\ pred(m+1) & = & m\pi^2_1(m, pred(m)) \end{cases}$$

- $prec = \mathcal{R}(0, \pi^2_1)$
- $moins = \mathcal{R}(\pi^1_1, \mathcal{C}(pred, (\pi^3_3)))$

Fonctions récursives primitives

Ensemble des fonctions récursives primitives défini comme **le plus petit ensemble** *PR* tel que :

- Les fonctions récursives de base (0,σ,π^k_i) sont dans *PR*
- *PR* est clos par composition
- *PR* est clos par récursion primitive.

Limite des fonction prim. réc.

- $\exists d$ fonction calculable pas primitive récursive (diagonalisation) :

$$d(n) \equiv f_n + 1 \text{ avec } \mathcal{F} = \{f_1, f_2 \ldots\}$$

- $\forall n, d(n) \neq f_n(n)$
- Pourtant calculable facilement car $\mathcal{F}$ réc. énum. :

$d =$ **begin**
énumérer les f_i jusqu'à f_n ;
évaluer $v = f_n(n)$;
retourner $v + 1$
end

Minimisation

- Opérateur supplémentaire
- Permet la « récurrence vers le haut »

$$\mu i.q(n_1,\ldots,n_p) \equiv \begin{cases} \text{Le plus petit } i \text{ t.q. q}(n_1,\ldots,n_p,\text{i})=1 \\ 0 \text{ si il n'existe pas de tel } i \end{cases}$$

- Permet les énumérations non bornée (diagonalisation)

Fonction récursive partielles

$$\mu i.q(n_1,\ldots,n_p) \equiv \begin{cases} \text{Le plus petit } i \text{ t.q. q}(n_1,\ldots,n_p,\text{i})=1 \\ 0 \text{ il n'existe pas de tel } i \end{cases}$$

- i n'existe pas toujours → énumérations infinies
  - Fonctions non calculables
  - ⇒ Fonction récursive *partielles*
- « il existe toujours de tel i »
  - ⇒ Fonction récursive *totales* sinon

Référence

Cours de JF Raskin(Univ. Libre Bruxelles
www.ulb.ac.be/di/ssd/jfr/slides-calculabilite-complexite.pdf)

Correspondance F.R. ⇒ λ-calcul

Théorème : $\forall f$ récursive partielle $\Rightarrow \exists$ un λ-terme f_λ t.q. :

- Si f est définie en $(n_1,\ldots,n_k)$ alors $f_\lambda\ \overline{n_1}\ldots\overline{n_k}$ a pour forme normale : $\overline{f(n_1\ldots n_k)}$.
- Sinon, $f_\lambda\ \overline{n_1}\ldots\overline{n_k}$ n'a pas de forme normale.

Où $\overline{n}$ désigne l'entier de Church correspondant à n.

Fonctions de base

- $0 \rightsquigarrow \overline{0}$ (rappel : $\overline{0} = \lambda f.\lambda y.y$)
- $\sigma \rightsquigarrow SUCC$ ($SUCC = \lambda n.\lambda f.\lambda x.f\ n\ f\ x$)
- $\pi_i^k \rightsquigarrow \lambda x_1\ldots\lambda x_i\ldots\lambda x_k.x_i$

Composition

- $\mathcal{C}(X,(\Phi^1\ldots\Phi^m)) \rightsquigarrow \lambda\vec{x}.(X_\lambda(\Phi^1_\lambda\ \vec{x})\ldots(\Phi^m_\lambda\ \vec{x}))$
- Ex : $\mathcal{C}(\pi_1^2,(\sigma,\pi_1^1)) \rightsquigarrow \lambda x_1.((\lambda x_2.\lambda x_3.x_2)\ (SUCC\ x_1)\ ((\lambda x.x)\ x_1))$
- Petit problème : si Φ^i ne termine pas, $\mathcal{C}$ peut terminer quand même
- Astuce : $Eval(f) = \lambda x.((x\ (\lambda z.z))\ f\ x)$ (x doit s'évaluer en $\lambda y,\ldots$)
- Ex : $\lambda x_1.(Eval(\overline{0})(\Phi_i)) = \lambda x_1.\lambda x.((x\ (\lambda z.z))\ \overline{0}\ x)$

Récursion

$$\mathcal{R}(f,g) = h \text{ t.q. } \begin{cases} h(\vec{n},0) & \equiv & f(\vec{n}) \\ h(\vec{n},m+1) & \equiv & g(\vec{n},m,h(\vec{n},m)) \end{cases}$$

- On cherche h_λ t.q.

$$h_\lambda \equiv_\beta \lambda\vec{n}.\lambda m.\ \text{IFTHENELSE (ISZERO } m) \ (f_\lambda\ \vec{n}) \ (g_\lambda\ \vec{n}\ (\text{PRED } m)\ (h_\lambda\ \vec{n}\ (\text{PRED } m)))$$

Récursion

- On cherche h_λ t.q.

$$h_\lambda \equiv_\beta \underbrace{\begin{array}{l}(\lambda h.\lambda \vec{n}.\lambda m.\\ \quad \text{IFTHENELSE (ISZERO } m)\\ \quad\quad (f_\lambda\ \vec{n})\\ \quad\quad (g_\lambda\ \vec{n}\ (\text{PRED } m)\ (h_\lambda\ \vec{n}\ (\text{PRED } m))))\ h_\lambda\end{array}}_{h_\lambda \equiv_\beta (\lambda h.t_h)\ h_\lambda}$$

- Opérateur de point fixe **Y** t.q. : $\mathbf{Y}\ t \equiv_\beta t\ (\mathbf{Y}\ t)$
- Solution $\boxed{h_\lambda = \mathbf{Y}\ (\lambda h.t_h)} \equiv_\beta (\lambda h.t_h)\ (\mathbf{Y}\ (\lambda h.t_h)) = (\lambda h.t_h)\ h_\lambda$. OK.

Minimisation

- On veut définir :

$$\mu_i.q(n_1,\ldots,n_p) \equiv \begin{cases} \text{Le plus petit } i \text{ t.q. q}(n_1,\ldots,n_p,\text{i})=1 \\ 0 \text{ si il n'existe pas de tel } i \end{cases}$$

- Récursivement en partant de zéro : $\mu i.q(n_1,\ldots,n_p) = h(0)$ avec :

$$\begin{cases} h(i) \equiv i \text{ si q}(n_1,\ldots,n_p,\text{i})=1 \\ h(i+1) \text{ sinon} \end{cases}$$

- Opérateur de point fixe

Minimisation

$$\begin{cases} h(i) \equiv i \text{ si q}(n_1,\ldots,n_p,\text{i})=1 \\ h(i+1) \text{ sinon} \end{cases}$$

- On cherche h_λ t.q.

$$h_\lambda \equiv_\beta \underbrace{\begin{array}{l}(\lambda h.\lambda \vec{n}.\lambda m.\\ \quad \text{IFTHENELSE (ISZERO } (q\ \vec{n}\ m))\\ \quad\quad (h_\lambda\ \vec{n}\ (SUCC\ m)))\ h_\lambda\\ \quad\quad m\end{array}}_{h_\lambda \equiv_\beta (\lambda h.u_h)\ h_\lambda}$$

- Opérateur de point fixe **Y** t.q. : $\mathbf{Y}\ t \equiv_\beta t\ (\mathbf{Y}\ t)$
- Solution $\boxed{h_\lambda = \mathbf{Y}\ (\lambda h.u_h)}$

Exercice

- Définir une fonction récursive $SUP2$ t.q. $SUP_2(n) = 1$ ssi $n > 2$.
- Définir un λ-terme $SUP2_\lambda$ t.q. $(SUP2_\lambda\ \overline{n}) \to^*_\beta TRUE$ ssi $\overline{n} > 2$.
- Définir un λ-terme correspondant à $\mu i.(\lambda i.(SUP_2\ (SUCC\ i)))$
- Effectuer le calcul en stratégie normale

Rappel définition M.T.

$$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$$

- Q ensemble (fini) d'états, $F \subset Q$ états finaux, $q_0 \in Q$ état initial
- Σ Alphabet (fini) du ruban
- δ programme (ensemble d'instructions)
- Instruction i : $(Q \times \Sigma) \times (Q \times \Sigma \times \{\leftarrow, \rightarrow, -\})$
  ((état, symb. lu), (état, symb. écrit, déplacement))
- Configuration (q, k, w) : état courant $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ contenu ruban courant, $k \in \mathbb{N}$ position curseur (ruban infini à droite seulement)
- Transition : $(q, k, w) \mapsto (q', k', w')$.

Codage

- Fonctions récursive : seulement les entiers.
- **Lemme** : Sur alphabet fini Σ, coder le ruban par des entiers naturels (Gödelisation).
- **Preuve** :
  - Supposons $|\Sigma| = k$
  - Codage gd de $\Sigma = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$:
    - $gd : \Sigma \to \{1, \ldots, k\}$
    - $gd : s_i \mapsto i$
  - Codage d'une chaîne $w = a_1 \ldots a_l$ comme un entier en base k :

$$gd(w) = \sum_{i=0}^{l} k^{(l-i)} gd(a_i)$$

  Ex : $s_2 s_4 \mapsto k^2.2 + k^1 * 4$
  - Important : Codage injectif et *lui-même calculable*.

Extension du codage au configuration d'un M.T.

- Même codage mais sur un alphabet plus grand :
- $\sigma' = \Sigma \cup \{q_0, \ldots, q_m\}$
- $gd(q, k, w) = gd(w_1 \ldots w_{k-1} q w_k \ldots w_n)$
  (k : position curseur dans le ruban).

Énoncé du théorème

- **Théorème** : Soit M une M.T. calculant la fonction $f_M : \Sigma^* \to \Sigma^*$, il existe une fonction μ-calculable f telle que :

$$\forall w \in \Sigma^*, gd(f_M(q_0, 0, w)) = f(gd(q_0, 0, w)).$$

- Remarque : **une** machine $\rightsquigarrow$ **une** fonction récursive.

Fonctions récursives nécessaires

- f = composition (C(f,g)) sur fonctions récursives plus basiques.
- Arguments et résultats : entiers codant ruban ou configuration

Fonctions récursives nécessaires

- $init : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ gd(w) \mapsto \text{config. initiale de } M \text{ sur } w \\ gd(w) \mapsto gd(q_0, 0, w) \end{cases}$
- Récursive :
  $gd(q_0, 0, w) \equiv gd(q_0 w) \equiv |\Sigma|^{|w|}.gd(w)) \equiv$ simple multiplication.

- *ConfigSuiv* :
  $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ gd(q, k, w) \mapsto \text{config. suivante de } M \text{ depuis config. } w \\ gd(q, k, w) \mapsto gd(q', k', w') \end{cases}$
- Récursive :
  - Extraire curseur q (divisions par puissances de $|\sigma|$)
  - Extraire symbole s qui suit q (re-division)
  - Appliquer transition correspondant à s et q
  - Reconstruire préfixe du ruban (multiplication)

- *NStep* :
$$\begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (gd(q,k,w),n) \mapsto \text{config. après } n \text{ étape de } M \text{ depuis config. } w \\ (gd(q,k,w),n) \mapsto gd(q',k',w') \end{cases}$$
- Récursive : Opérateur de récursion :
$$\begin{cases} NStep(x,0) & = & x \\ NStep(x,n+1) & = & ConfigSuiv(NStep(x,n)) \end{cases}$$

- *Stop* : $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ (gd(q,k,w)) \mapsto \begin{array}{l} 1 \text{ si } q \text{ final} \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \end{cases}$
- Récursive : test $q \in Q_{\text{finaux}}$

- *Sortie* : $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ gd(w) \mapsto \text{contenu du ruban dans config. (finale) } w \\ gd(q_0,0,w) \mapsto gd(w) \end{cases}$
- Récursive : enlève juste q dans w (division).

$$f(x) = Sortie(NStep(init(x), NbDePas(x)))$$

où : $NbDePas(x) = \mu_i.Stop(NStep(Init(x), i))$