Master Parisien de Recherche Opérationnelle

Examen de l'UE *Bases de l'Optimisation dans les Graphes*

Cédric Bentz

6 novembre 2024

Même si vous ne savez pas démontrer un résultat correspondant à une des questions d'une partie, vous pouvez néanmoins réutiliser ce résultat dans les questions suivantes de cette partie. La Partie I est indépendante des autres.

Stables (et autres) dans les graphes d'intervalles

On s'intéresse ici aux propriétés des stables dans les graphes d'intervalles.

On rappelle qu'un **stable** (ou **ensemble stable**) dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents, et qu'une **clique** est le complémentaire d'un stable (donc un sous-graphe complet).

Par ailleurs, un *graphe d'intervalles* à n sommets est un graphe qu'on peut construire à partir d'un ensemble de n intervalles réels, notés $[d_1, f_1], \ldots, [d_n, f_n]$ (avec $d_i < f_i$ pour tout i, où d_i est le *début* de i, et f_i est sa *fin*) : dans la suite, on supposera sans perte de généralité que $d_i \neq d_j$, $d_i \neq f_j$, $f_i \neq d_j$ et $f_i \neq f_j$ pour tous $i \neq j$. À chacun de ces n intervalles est alors associé un sommet du graphe (et inversement), et deux sommets quelconques sont reliés par une arête si et seulement si les intervalles correspondants ont une intersection non vide. On notera $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ les $2n$ éléments (tous différents par hypothèse) de $\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{d_i, f_i\}$ triés par ordre croissant : chaque ensemble $[e_j, e_{j+1}]$ sera appelé "fenêtre" (par analogie avec des fenêtres de temps). On dira qu'un intervalle $[d_i, f_i]$ *traverse* une fenêtre $[e_j, e_{j+1}]$ si et seulement si $[d_i, f_i]\cap]e_j, e_{j+1}[\neq \emptyset$.

Un exemple illustratif, représentant un graphe d'intervalles à 7 sommets (et 10 arêtes), désignés par les lettres A à G, est donné en page suivante. Une représentation par intervalles associée, dans laquelle chacun des 7 sommets est associé à un intervalle désigné par la même lettre, est également fournie.

Dans toute la suite, étant donné un graphe $G = (S, A)$ à n sommets, on associera à chaque sommet i de S (c'est-à-dire à chaque intervalle de la représentation par intervalles associée, si G est un graphe d'intervalles) une variable 0–1 x_i, qui vaudra 1 si le sommet i appartient à un stable de taille maximum, et 0 sinon. De même, on utilisera les notations suivantes :

- $\alpha(G)$: taille maximum d'un stable dans G.
- $\rho(G)$: taille minimum d'une couverture par les cliques des sommets de G.
- $\rho'(G)$: taille minimum d'une couverture par les arêtes des sommets de G.

En particulier, calculer $\rho(G)$ revient à déterminer la taille minimum d'un ensemble de cliques de G tel que tout sommet de S appartient à au moins une de ces cliques. De même, calculer $\rho'(G)$ revient à déterminer la taille minimum d'un sous-ensemble d'arêtes $A' \subseteq A$ tel que tout sommet de S est une extrémité d'au moins une arête de A'. Si G est sans sommets isolés, alors on a $\rho'(G) \leq |A|$.

Partie I : formulations classiques

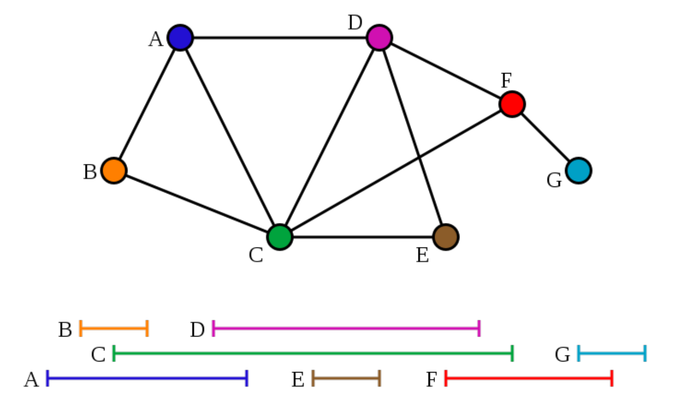
On rappelle que la formulation suivante est un PLNE modélisant le calcul de $\alpha(G)$, la taille maximum d'un stable dans un graphe $G = (S, A)$:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in S} x_i \\ \text{sous les contraintes que} \quad & \\ & x_i + x_j \leq 1 \qquad \text{pour toute arête } ij \in A \\ & x_i \in \{0, 1\} \qquad \text{pour tout sommet } i \in S \end{aligned}$$

Question I.1 : Montrer que, si le graphe G est sans sommets isolés, alors la contrainte $x_i \in \{0, 1\}$ peut être remplacée par $x_i \in \mathbb{N}$ pour tout sommet i, puis, après avoir appliqué cette modification, écrire le programme linéaire dual de la relaxation continue de ce PLNE lorsque G est sans sommets isolés.

Question I.2 : Montrer alors que, si les variables duales sont supposées être entières, la valeur optimale de ce programme linéaire dual est égale à $\rho'(G)$.

On considère à présent le graphe d'intervalles à 7 sommets suivant :



(On note $A = [d_1, f_1]$, $B = [d_2, f_2]$, $C = [d_3, f_3]$, etc. On a alors $e_1 = d_1$, $e_2 = d_2$, $e_3 = d_3$, $e_4 = f_2$, etc. On peut par exemple remarquer que l'intervalle $B = [d_2, f_2]$ ne traverse que les fenêtres $[e_2, e_3]$ et $[e_3, e_4]$.)

Question I.3 : Montrer, en les explicitant, qu'il existe dans ce graphe G un stable de taille 3 et une couverture par les arêtes des sommets de G de taille 4.

Question I.4 : Montrer ensuite que ces deux solutions sont optimales, en montrant que les valeurs optimales des relaxations continues des deux PLNE calculant $\alpha(G)$ et $\rho'(G)$ sont toutes deux égales à $\frac{7}{2}$ dans ce graphe G.

Question I.5 : En déduire, **en détaillant bien l'ensemble de vos arguments**, que, dans les graphes d'intervalles, les matrices des contraintes associées à ces deux PLNE ne sont pas nécessairement totalement unimodulaires.

Partie II : formulations spécifiques aux graphes d'intervalles

On s'intéresse dans cette partie à des formulations PLNE alternatives, spécifiques au cas des graphes d'intervalles (contrairement à celles étudiées en Partie I).

Question II.1 : Montrer que, dans tout graphe $G = (S, A)$, un ensemble $S' \subseteq S$ est un stable pour G si et seulement si, pour tout $K \subseteq S$ qui forme **une clique maximale au sens de l'inclusion** dans G, on a $|S' \cap K| \leq 1$.

Question II.2 : Montrer que, dans tout graphe d'intervalles G, toute clique maximale au sens de l'inclusion est composée de tous les intervalles $[d_i, f_i]$ traversant une des fenêtres $[e_j, e_{j+1}]$. Montrer également que l'inverse n'est pas toujours vrai : les intervalles $[d_i, f_i]$ traversant une fenêtre $[e_j, e_{j+1}]$ donnée ne forment pas nécessairement une clique maximale au sens de l'inclusion.

Question II.3 : Déduire des deux questions précédentes qu'un ensemble d'intervalles forme un stable dans un graphe d'intervalles G si et seulement si, pour toute fenêtre $[e_j, e_{j+1}]$, il contient au plus un intervalle traversant $[e_j, e_{j+1}]$, **en détaillant bien tous les arguments utilisés**. Utiliser ensuite cette observation pour obtenir une formulation PLNE pour calculer $\alpha(G)$ dans tout graphe d'intervalles G, avec une contrainte par fenêtre $[e_j, e_{j+1}]$.

Question II.4 : Écrire le programme linéaire dual de la relaxation continue de ce PLNE (sans oublier de prendre en compte les contraintes primales $x_i \in \{0, 1\}$).

Question II.5 : Montrer ensuite que, si les variables duales sont supposées être entières, la valeur optimale de ce programme linéaire dual est égale à $\rho(G)$.

Partie III : des matrices totalement unimodulaires

Dans cette partie, on cherche à établir des propriétés structurelles des matrices des contraintes associées aux deux PLNE obtenus en Partie II.

Question III.1 : Montrer que la matrice des contraintes du PLNE de la **Question II.3** a la propriété que, sur chaque colonne, les 1 apparaissent de façon consécutive. (Cette propriété sur les colonnes est appelée *propriété des 1 consécutifs*, et une matrice ayant cette propriété est appelée **matrice d'intervalle**.)

Question III.2 : À l'aide de la caractérisation de Ghouila-Houri, montrer que toute matrice d'intervalle (dans laquelle, par définition, chaque élément vaut soit 0, soit 1, les 1 apparaissant de façon consécutive sur chacune des colonnes de la matrice) est en réalité une matrice totalement unimodulaire.

(La **Question III.2** est indépendante des autres questions et parties.)

Question III.3 : En déduire ensuite, **en détaillant bien tous vos arguments**, que, dans tout graphe d'intervalles G, on a toujours : $\alpha(G) = \rho(G)$.

Préciser, en justifiant bien votre réponse, la valeur commune ainsi obtenue pour $\alpha(G)$ et $\rho(G)$ dans le graphe d'intervalles à 7 sommets de la page 2.

Partie IV : polynomialité des problèmes du stable de poids maximum, de la clique de poids maximum et du transversal de poids minimum dans les graphes d'intervalles

On suppose dans toute cette partie que chaque sommet i du graphe G considéré est muni d'un poids **rationnel** $p_i > 0$: le **poids** d'un stable, d'une clique ou d'un transversal est alors la somme des poids de ses sommets.

On suppose également qu'il existe un algorithme polynomial que l'on pourra utiliser et qui, pour tout graphe d'intervalles G, peut construire le graphe à partir de sa représentation par intervalles, et, réciproquement, peut construire une représentation par intervalles à partir du graphe lui-même.

Question IV.1 : Montrer, à l'aide des deux parties précédentes, que le problème consistant à déterminer le poids maximum d'un stable dans un graphe d'intervalles G est polynomial, en détaillant bien tous les arguments utilisés.

Question IV.2 : Montrer ensuite que le problème consistant à déterminer un stable de poids maximum (et donc plus seulement le poids d'un tel stable) dans un graphe d'intervalles G est également polynomial. **Une fois de plus, on détaillera bien l'ensemble des arguments utilisés**.

Question IV.3 : Montrer, à l'aide des définitions du cours, que, dans tout graphe $G = (S, A)$, un sous-ensemble $S' \subseteq S$ est un stable si et seulement si $S \setminus S'$ est un transversal, puis en déduire, à l'aide de la **Question IV.1**, que le problème consistant à déterminer un transversal de poids minimum dans un graphe d'intervalles G est polynomial, en justifiant bien votre réponse.

Question IV.4 : Montrer enfin, à l'aide de la **Question II.2**, que le problème consistant à déterminer une clique de poids maximum dans un graphe d'intervalles G est polynomial, en détaillant bien l'ensemble des arguments utilisés.