Le problème de la multicoupe minimum dans les graphes planaires et les graphes de largeur d'arbre bornée

Cédric Bentz

CEDRIC-CNAM, 292, rue Saint-Martin, 75003 Paris
cedric.bentz@cnam.fr

Etant donnés un graphe non orienté $G = (V, E)$ dont les arêtes sont pondérées et k couples (source s_i, puits s'_i) de sommets, *le problème de la multicoupe minimum* (PMCM) consiste à sélectionner un ensemble d'arêtes de poids minimum dont la suppression sépare s_i de s'_i pour tout i. Si k est fixé, nous noterons ce problème PMCM$_k$. *Le problème de la coupe multiterminale minimum* (PCMTM) est un problème particulier de multicoupe minimum dans lequel, étant donnés p sommets *terminaux* $t_1, \ldots, t_p$, les couples source-puits sont (t_i, t_j) pour $1 \leq i < j \leq p$.

PMCM est $\mathcal{NP}$-difficile et APX-difficile (c'est-à-dire qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que trouver une solution $(1 + \epsilon)$-approchée pour PMCM est $\mathcal{NP}$-difficile) même dans les arbres non pondérés de hauteur 1 [3], mais est polynomial dans les arbres si k est fixé (en examinant simplement tous les ensembles de k arêtes, puisque dans ce cas une multicoupe optimale ne contient pas plus de k arêtes). De surcroît, il existe un schéma d'approximation polynomial pour PMCM dans les graphes ayant un degré et une largeur d'arbre bornés [1], mais le problème devient APX-difficile (et non plus seulement $\mathcal{NP}$-difficile) dès qu'une des trois hypothèses n'est plus vérifiée.

Dans cette communication, nous montrons que PMCM$_k$ est polynomial dans les graphes de largeur d'arbre bornée et dans les graphes planaires, alors que, dans chaque cas, il devient $\mathcal{NP}$-difficile dès qu'une des deux hypothèses n'est plus vérifiée [2,3].

Pour démontrer ces résultats, nous nous appuyons sur une idée de [2] : résoudre ce problème peut se faire en résolvant un certain nombre d'instances de PCMTM dans un graphe auxiliaire.

Nous montrons d'abord que, lorsque le graphe est de largeur d'arbre bornée, il suffit de résoudre $\frac{(\sqrt{2k}+1)^{2k}}{(\sqrt{2k}+1)!}$ instances de PCMTM, et, si k est fixé, le graphe auxiliaire est également de largeur d'arbre bornée. Comme, d'après [2], PCMTM est polynomial dans les graphes de largeur d'arbre bornée par des techniques standards de programmation dynamique, cela implique que PMCM$_k$ est également polynomial dans les graphes de largeur d'arbre bornée.

Ensuite, nous étudions PMCM$_k$ dans les graphes planaires. Dans ce cas, le graphe auxiliaire n'est pas nécessairement planaire, donc la technique précédente ne peut pas s'appliquer directement. Néanmoins, nous montrons que PMCM se ramène alors à la résolution d'un certain nombre d'instances du Problème de Coupe Multiterminale Colorée Minimum (ou PCMTCM) [2], qui généralise PCMTM. Dans ce problème, on cherche non plus à séparer des terminaux deux à deux, mais des ensembles de terminaux deux à deux.

Bien que ce problème reste $\mathcal{NP}$-difficile dans les graphes planaires même si le nombre d'ensembles de terminaux est fixé [2], nous montrons que les instances que nous avons à résoudre ont une structure particulière, puisque l'on connait à l'avance le nombre de composantes connexes que comptera toute solution optimale. Sous ces hypothèses, nous montrons que les techniques développées dans [5] pour résoudre PCMTM peuvent être adaptées pour résoudre PCMTCM, mais le nombre d'instances de PCMTCM à résoudre pour obtenir une solution optimale de PMCM$_k$ est sensiblement plus important que dans le cas des graphes de largeur d'arbre bornée. Par ailleurs, ce résultat généralise le résultat bien connu que PCMTM est polynomial dans les graphes planaires si p est fixé [2,4,5].

Enfin, nous discuterons des possibilités d'extension de la méthode utilisée pour résoudre PMCM$_k$ dans les graphes planaires à d'autres problèmes (certains cas particuliers de PCMTCM, par exemple).

Références

1. G. Călinescu, C.G. Fernandes and B. Reed. Multicuts in unweighted graphs and digraphs with bounded degree and bounded tree-width. Journal of Algorithms 48 (2003) 333–359.
2. E. Dahlhaus, D.S. Johnson, C.H. Papadimitriou, P.D. Seymour and M. Yannakakis. The complexity of multiterminal cuts. SIAM Journal on Computing 23 (1994) 864–894.
3. N. Garg, V.V. Vazirani and M. Yannakakis. Primal-dual approximation algorithms for integral flow and multicut in trees. Algorithmica 18 (1997) 3–20.
4. D. Hartvigsen. The planar multiterminal cut problem. Discrete Applied Mathematics 85 (1998) 203–222.
5. W.-C. Yeh. A simple algorithm for the planar multiway cut problem. Journal of Algorithms 39 (2001) 68–77.