Relaxations Lagrangienne et Semidéfinie de Programmes Quadratiques

A. Faye[1] et F. Roupin[2]

[1] CEDRIC, CNAM-IIE, 18 allée Jean Rostand 91025 Evry Cedex, France
fayea@iie.cnam.fr
[2] CEDRIC, CNAM-IIE, 18 allée Jean Rostand 91025 Evry Cedex, France
roupin@iie.cnam.fr

Soit le programme quadratique suivant :

$$(\text{Pb}) \min_x x^tQx + c^tx \text{ s.c.} \begin{cases} x^tA_ix + d_i^tx = b_i \ i \in I^= \\ x^tA_ix + d_i^tx \leq b_i \ i \in I^\leq \\ Ax = b \end{cases}$$

où x est un vecteur réel de dimension n, $I = I^= \cup I^\leq$ est un ensemble d'indices allant de 1 à m (le nombre de contraintes quadratiques), Q, A_i ($\forall i \in I$) sont des matrices réelles symétriques $n \times n$, c et d_i ($\forall i \in I$) sont des vecteurs réels de dimension n, b est un vecteur réel de dimension p, et A une matrice réelle $p \times n$. Le cas booléen peut être vu comme un cas particulier de (Pb) où l'on considère les contraintes $x_i^2 = x_i$ pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$.

Dans [3] les auteurs montrent (à l'aide de la dualité lagrangienne), que plusieurs relaxations de programmes quadratiques en 0-1 (et en particulier certaines relaxations semidéfinies) sont équivalentes. De plus, une formulation comme relaxation semidéfinie de la relaxation lagrangienne partielle de (Pb) lorsque x est booléen et où les contraintes $Ax = b$ sont maintenues est proposée dans [2].

Nous obtenons un résultat semblable dans le cas plus général d'un programme quadratique quelconque (i.e. (Pb)) en montrant qu'une relaxation semidéfinie équivalente à la relaxation lagrangienne partielle (les contraintes linéaires $Ax = b$ sont maintenues) peut être obtenue en ajoutant à la relaxation semidéfinie standard $p \times n$ contraintes quadratiques construites à partir des contraintes linéaires.

Notre résultat présente un avantage pratique (même dans le cas booléen) par rapport aux travaux présentés dans [2]. En effet, bien que les deux relaxations semidéfinies soient équivalentes dans ce cas, il existe un point admissible de la relaxation lagrangienne correspondant à notre relaxation semidéfinie qui atteint la valeur optimale. Ceci a des conséquences sur la résolution numérique des programmes semidéfinis correspondants.

Enfin, plusieurs "recettes" ont été proposées pour élaborer des relaxations semidéfinies pour (Pb) dans le cas booléen. Nos travaux permettent d'interpréter ces recettes en termes de relaxations lagrangiennes. Nous illustrons ce dernier point grâce au problème K-CLUSTER (recherche du sous-graphe de taille k de densité maximale) en donnant une réinterpréation des relaxations semidéfinies proposées dans [1], [4], et [5].

Références

1. Q. Han,Y. Ye, et J. Zhang : An improved rounded Method and Semidefinite Programming Relaxation for Graph Partition. *Mathematical Programming* Vol. 92 No. 3 :509-535, 2002.
2. C. Lemaréchal, F. Oustry : Semidefinite relaxations and Lagrangian duality with application to combinatorial optimization. RC-3710 INRIA, 1999.
3. S. Poljack, F. Rendl et H. Wolkowicz. A recipe for semidefinite relaxations for (0,1)-quadratic programming. *Journal of Global Optimization* 7 :51-73, 1995.
4. F. Roupin. From linear to semidefinite programming : an algorithm to obtain semidefinite relaxations for bivalent quadratic problems. *Journal of Combinatorial Optimization* 8(4) :469-493, 2004.
5. U. Feige, M. Langberg. Approximation Algorithms for Maximization Problems Arising in Graph Partitioning. *Journal of Algorithms* 41(2) :174-211, 2001.