Stabilité des probèmes NP-complets

C. Picouleau

CEDRIC - CNAM, 292 rue Saint-Martin, 75003 Paris
chp@cnam.fr

Mots-clés : NP-complet, graphes, ordonnancements, approximation.

Un problème NP-complet Π consiste en la donnée d'une instance I et d'une question Q, nous noterons $\Pi = (I, Q)$; $\Pi \in NP$ donc pour toute instance I de Π pour laquelle la réponse à Q est 'oui', il existe un certificat S à partir duquel un algorithme déterministe peut vérifier en temps polynomial que la réponse à Q est effectivement 'oui' ([1]). Nous considérons les problèmes NP-complets $\tilde{\Pi} = (\tilde{I}, \tilde{Q})$ avec $\tilde{I} = (I_1, I_2, S)$ où $\| I_1 - I_2 \|_L \leq k$ pour une norme L et $k > 0$ fixé et minimum dans un sens que nous préciserons plus loin, où I_1 et I_2 sont deux instances d'un problème NP-complet $\Pi = (I, Q)$, S est un certificat pour l'instance I_1 pour laquelle la réponse à Q est 'oui', et $\tilde{Q}$ est la question Q posée pour I_2. Nous appelerons $\tilde{\Pi}$, 'problème de stabilité associé à Π'.

Prenons comme premier exemple le problème NP-complet de la coloration des sommets d'un graphe : $coloration = (I, Q)$ où l'instance I est constituée d'un graphe G et d'un entier naturel k et la question Q est 'existe-t-il une coloration des sommets de G avec au plus k couleurs ?'. Le problème de stabilité correspondant est $stabilite - coloration = (\tilde{I}, \tilde{Q})$ où $\tilde{I} = (I_1, I_2, S)$ avec pour instance I_1 un graphe G_1 et k, pour instance I_2 le graphe G_2 obtenu en supprimant une arête prédéfinie de G_1, et S est une k-coloration des sommets de G_1. Ainsi G_1 et G_2 ne différant que par une seule arête, la distance de Hamming entre les deux représentations matricielles des deux graphes est inférieure à un; la question $\tilde{Q}$ est 'existe-t-il une coloration des sommets de G_2 avec au plus $k-1$ couleurs ?'. Nous montrons que $stabilite - coloration$ est NP-complet. Ainsi la donnée d'un certificat pour G_1 n'aide en rien la recherche d'une coloration pour G_2 bien que les deux graphes soient *très voisins*.

Considérons le probème du cycle hamiltonien pour second exemple; le problème est noté $CH = (I, Q)$ avec pour instance I un graphe G et pour question Q 'G est-il hamiltonien ?'. Le probème $stabilite - CH$ a pour instance $\tilde{I} = (I_1, I_2, S)$ avec pour I_1 un graphe G_1, pour I_2 le graphe G_2 obtenu en supprimant une arête prédéfinie de G_1, et S est un cycle hamiltonien de G_1. La question $\tilde{Q} = Q$. Nous montrons que $stabilite - CH$ est NP-complet. Ainsi comme pour le problème précédent la donnée d'un certificat pour G_1 n'aide pas la recherche d'un certificat pour G_2. Notons que pour cet exemple, si G_2 est obtenu en ajoutant une arête à G_1, le problème de stabilité obtenu ainsi serait trivialement polynomial (S est aussi un certificat pour G_2).

Nous montrons ([2],[3]) ce même type de résultat pour de nombreux problèmes NP-complets : SAT, Bin-Packing, Partition, Clique, Stable, ordonnancements UET, ordonnancements $UET - UCT$, etc...

Nous ferons apparaître des liens existant entre certains de ces problèmes de stabilité et les problèmes NP-complets d'unicité d'une solution pour les problèmes NP-complets. Nous essairons faire ressortir les difficultés apparaissant dans l'élaboration d'une preuve générale de NP-complétude pour l'ensemble des probèmes $stabilite - \Pi$ où Π est NP-complet.

Nous nous intéresserons aux problèmes d'optimisation associés à ces différents problèmes. Nous montrons que pour de nombreux problèmes (Bin-Packing, Clique, Stable, ordonnancements UET, ordonnancements $UET-UCT$,...) il est aisé d'obtenir un algorithme polynomial avec garantie absolue de performance pour l'instance I_2.

[1] Garey M. R. and Johnson D. S.*Computers and Intractability, a Guide to the Theory of NP-Completeness*, ed. Freeman,1979.
[2] C. Picouleau, "Small perturbations on some NP-complete scheduling problems", *Rapport CEDRIC 00-09*, 2000.
[3] C. Picouleau et A. Samyn, "Perturbations des données pour des problèmes NP-complets", *Mémoire DEA IRO* 2001.