Une nouvelle classe de graphes : les hypotriangulés

M.-C. Costa[1], C. Picouleau[2], and H. Topart[2]

[1] ENSTA UMA (CEDRIC), 32 boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15 (France).
Marie-Christine.Costa@ensta.fr
[2] CEDRIC-CNAM, 292 rue Saint-Martin, 75141 Paris cedex 03, France
chp@cnam.fr, Helene.Topart@cnam.fr

1 Introduction

Nous introduisons une nouvelle classe de graphes, les graphes *hypotriangulés* : pour tout chemin de longueur 2, il existe soit une corde, soit un autre chemin de longueur 2, qui relie ses extrémités. On construit ainsi des réseaux qui sont fiables dans le cas où soit un lien soit un noeud est défaillant.

2 Définitions et premières propriétés

On notera $G = (V, E)$ un graphe simple non-orienté où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. On note $n = |V|$, $m = |E|$ et δ le degré minimum d'un sommet de G.

Definition 1. *G est hypotriangulé si pour toute paire de sommets $\{a, b\} \in V^2$ telle que $[a, y, b]$ est un P_3, on a $[a, b] \in E$ ou il existe $z \neq y$ tel que $[a, z, b]$ est un P_3.*

On obtient aisément les définitions équivalentes suivantes.

- G est hypotriangulé ssi tout P_3 est inclus dans un C_3 ou un C_4 ;
- G est hypotriangulé ssi $\forall u, v \in V, u \neq v, |N(u) \cap N(v)| = 1 \Rightarrow [u, v] \in E$.

On montre les premiers résultats suivants :

- Les graphes complets K_n et les graphes bipartis complets K_{n_1,n_2} pour $n_1, n_2 \geq 2$ sont hypotriangulés ;
- les graphes hypotriangulés ne sont pas nécessairement parfait ;
- il existe des graphes triangulés qui ne sont pas hypotriangulés ;
- il existe des graphes hypotriangulés qui ne sont pas triangulés ;
- pour tout k, il existe des graphes hypotriangulés de diamètre k ;
- pour tout k, il existe des graphes hypotriangulés ayant un trou de taille k.

Si G est un graphe hypotriangulé avec $n \geq 3$, alors

- $\delta \geq 2$ et G n'a pas de sommet d'articulation (donc G n'a pas d'isthme).

3 Les graphes hypotriangulés minimum

Dans cette section, on s'intéresse au problème de déterminer, pour tout n, l'ensemble des graphes hypotriangulés *connexes* possédant un nombre minimum d'arêtes. Nous les appelerons *graphes hypotriangulés minimum*.

On considère $n \geq 4$, puisque pour $n = 2$ (respectivement $n = 3$) le seul graphe hypotriangulé à n sommets est K_2 (respectivement K_3).

Théorème 1 *Un graphe connexe hypotriangulé minimum G avec $n \geq 4$ vérifie $m = 2n - 4$, G est biparti et $\delta = 2$ ou 3. De plus, si $\delta = 3$ alors G est le cube.*

On distingue parmi les sommets de G les sommets internes au graphe I et les sommets pendants P. On définit alors la transformation $G \mapsto \widetilde{2G}$. Voir Figure 1.

Théorème 2 *Si G est un graphe hypotriangulé minimum avec $\delta = 2$, alors $G = \widetilde{2T}$ où T est un arbre.*

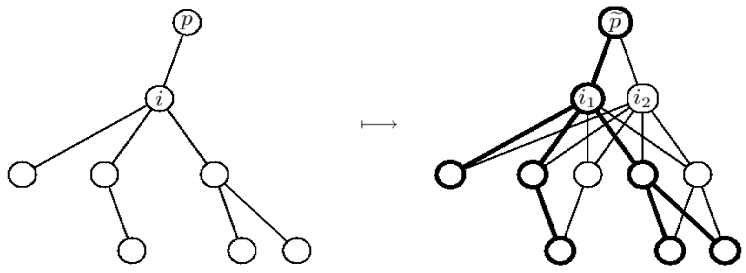

Fig. 1. Un arbre T et le graphe $\widetilde{2T}$ correspondant

4 Résultats de complexité

Les problèmes Hamiltonien, Clique, Stable et Coloration sont $\mathcal{NP}$-complets dans les graphes hypotriangulés.

Références

[1] Claude Berge, *Graphes*, Gauthier-Villars (Paris, 1983)

[2] M. R. Garey, D. S. Johnson, *"Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completness"*, W. H. Freeman (San Francisco, 1979)

[3] DIMACS Book Series, Published by the American Mathematical Society, *Volume Fifty Three : "Robust Communication Networks : Interconnection and Survivability"*, Editors : Nathaniel Dean, D. Frank Hsu and R. Rav (2000)