Multicoupes dans les graphes orientés de largeur d'arbre bornée et les cactus : complexité et inapproximabilité

Cédric Bentz

CEDRIC-CNAM
292, Rue Saint-Martin
75141 Paris Cedex 03, France
cedric.bentz@cnam.fr

1 Introduction

Nous étudions du point de vue de la complexité et de l'approximation polynomiale le problème classique de la *multicoupe minimum* (MCM), un problème fondamental de la théorie des graphes, et pour lequel on connaît de nombreuses applications [2]. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté ou non, soit $f : E \to \mathbb{N}^*$ une *fonction de pondération* sur les arêtes (ou les arcs), et soit $\mathcal{L}$ une liste de couples de sommets *terminaux* (source s_i, puits s'_i). MCM consiste à sélectionner un ensemble d'arêtes (ou d'arcs) de poids minimum dont la suppression assure qu'il n'existe aucun chemin de s_i à s'_i pour tout i. Le problème de la *coupe multiterminale minimum* (CMTM) est un cas particulier de MCM où, étant donné un ensemble de sommets $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_{|\mathcal{T}|}\}$, les couples de terminaux sont (t_i, t_j) pour $i \neq j$.

Pour $|\mathcal{L}| = 1$, MCM est équivalent au problème de la *coupe minimum*, et est donc polynomial. Néanmoins, MCM et CMTM deviennent $\mathcal{NP}$-difficiles (et même APX-difficiles, voir une définition ci-après) dès que $|\mathcal{L}| = 3$ et $|\mathcal{T}| = 3$ respectivement [3]. En outre, MCM est APX-difficile (c'est-à-dire qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que concevoir un algorithme $(1 + \epsilon)$–approché pour ce problème est en soit un problème $\mathcal{NP}$-difficile) même dans les étoiles non pondérées [4], et CMTM est $\mathcal{NP}$-difficile dans les graphes planaires [3]. En comparaison, MCM est polynomial dans les arbres orientés [2], et CMTM est polynomial dans les graphes orientés sans circuit [2] et, d'après [3], dans les graphes de largeur d'arbre bornée (voir une définition dans [6]). Enfin, il existe un schéma d'approximation polynomial (PTAS) pour MCM dans les graphes non orientés qui sont non pondérés et de largeur d'arbre et de degré maximum bornés, mais, si l'une des trois hypothèses (non pondération, largeur d'arbre bornée, degré maximum borné) n'est pas vérifiée, le problème devient APX-difficile (et non plus simplement $\mathcal{NP}$-difficile) [1].

Il existe également une variante de MCM (et CMTM) où on requiert d'enlever des sommets (terminaux ou non) et non plus des arêtes (problèmes MCMS et CMTMS respectivement). Dans [1], il est également prouvé que MCMS est polynomial dans les arbres non pondérés et admet un PTAS dans les graphes non pondérés de largeur d'arbre bornée. En outre, il y est montré que ce problème est $\mathcal{NP}$-difficile dans les graphes séries-parallèles (c'est-à-dire les graphes de largeur d'arbre 2) non pondérés de degré maximum 3.

2 Nos résultats

Nous montrons d'abord que MCMS est $\mathcal{NP}$-difficile dans les cactus non pondérés de largeur de chemin (voir [6]) et de degré maximum bornés (alors qu'il est polynomial dans les arbres non pondérés), un cactus étant un graphe non orienté dans lequel toute arête appartient à au plus un cycle. Encuite, nous prouvons que, contrairement à CMTM, MCM est $\mathcal{NP}$-difficile dans les graphes orientés sans circuit (même si le graphe non orienté sous-jacent est un cactus non pondéré de degré maximum borné), alors qu'il est polynomial dans les arbres orientés. Enfin, nous montrons que MCM est APX-difficile dans les graphes orientés non pondérés de largeur d'arbre et de degré maximum bornés, alors que le cas non orienté admet un PTAS.

Graphes non orientés. Nous montrons que MCMS est $\mathcal{NP}$-difficile dans les cactus non pondérés de largeur de chemin et de degré maximum bornés en adaptant la preuve de $\mathcal{NP}$-difficulté de MCM dans les arbres binaires non pondérés donnée dans [1].

Graphes orientés. Comme dans [1], pour les graphes orientés, nous utilisons la définition de la notion de largeur d'arbre donnée dans [5], qui est différente de la notion non orientée. Rappelons simplement que les graphes orientés sans circuit sont les graphes de largeur d'arbre orientée 0.

Pour montrer que MCM reste $\mathcal{NP}$-difficile dans les graphes orientés sans circuit, nous adaptons, encore une fois, la preuve donnée dans [1] pour montrer la $\mathcal{NP}$-difficulté de MCM dans les arbres binaires non pondérés. Cette réduction étant donnée pour des graphes non orientés, la difficulté de notre approche est de parvenir à orienter la construction utilisée dans la preuve. Enfin, pour prouver que MCM est APX-difficile dans les graphes orientés non pondérés de largeur d'arbre et de degré maximum bornés, nous présentons une réduction préservant l'approximation à partir du problème de Couverture Par Les Sommets dans les graphes de degré maximum borné, qui est APX-difficile. Nous montrons d'abord comment réduire ce problème à CMTMS dans les graphes orientés sans circuit, puis comment réduire ce problème auxiliaire à notre problème initial.

Références

1. G. Călinescu, C.G. Fernandes et B. Reed. Multicuts in unweighted graphs and digraphs with bounded degree and bounded tree-width. Journal of Algorithms 48 (2003) 333–359.
2. M.-C. Costa, L. Létocart et F. Roupin. Minimal multicut and maximal integer multiflow : a survey. Eur. J. of Oper. Res. 162 (2005) 55–69.
3. E. Dahlhaus, D.S. Johnson, C.H. Papadimitriou, P.D. Seymour et M. Yannakakis. The complexity of multiterminal cuts. SIAM J. Comput. 23 (1994) 864–894.
4. N. Garg, V.V. Vazirani et M. Yannakakis. Primal-dual approximation algorithms for integral flow and multicut in trees. Algorithmica 18 (1997) 3–20.
5. T. Johnson, N. Robertson, P.D. Seymour et R. Thomas. Directed Tree-width. Journal of Combinatorial Theory Series B, 82 (2001) 138–154.
6. N. Robertson et P.D. Seymour. Graph minors II : Algorithmic aspects of tree-width. Journal of Algorithms 7 (1986) 309–322.