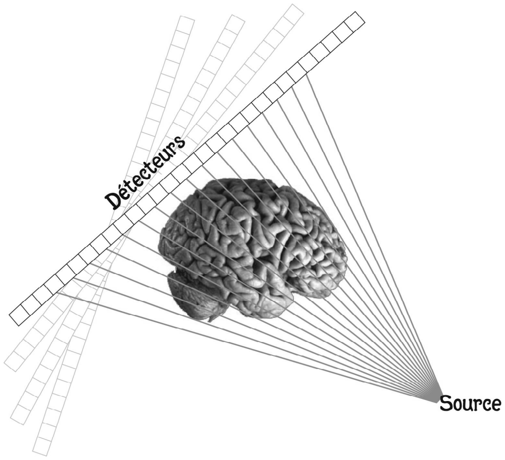
Article invité

La tomographie discrète : quid ?

Christophe Picouleau [1]
chp@cnam.fr

Tomographie nom masc. (du grec Tomê : coupe, section - Graphein : écrire) Cartographie d'un paramètre interne à un objet, selon un ou plusieurs plans de coupes, à partir de mesures externes et de calculs. Applications : - sondage des océans, des couches géologiques, - astrophysique, - imagerie médicale.



Laissons aussi s'exprimer Maurice Nivat pionnier de la discipline : «La tomographie est l'art de reconstituer une image à partir d'informations fragmentaires et locales et son utilité n'est pas à démontrer, tous les malades qui ont vu leur mal détecté au scanner ou à l'IRM sont là pour en témoigner. L'histoire assez longue de la tomographie à usage médical est fascinante par le mélange de difficultés purement mathématiques et d'innovations technologiques qui la constitue depuis pas loin d'un siècle. La tomographie discrète, elle est beaucoup plus récente puisque le terme même a été employé pour la 1ère fois en 1994. L'image est alors constituée de pixels et les données sont les sommes pondérées des pixels appartenant à des parties de l'image. Pourtant les premiers résultats remontent aux années 50, ce sont ceux de Ryser sur l'existence de matrices à coefficients 0 ou 1 ayant des sommes données en lignes et en colonnes.»

Originellement la tomographie a pour objet la reconstruction de corps continus tridimensionnels. Depuis un peu plus d'une décennie, les tomographes discrets se sont principalement attachés à reconstruire des structures discrètes du plan. De mon point de vue, ceci tient à deux facteurs : d'abord, les problèmes sont souvent de complexité calculatoire difficile dès la dimension deux, et ensuite, comme nous le verrons un peu plus bas, les applications de la tomographie discrète en dimension deux sont nombreuses et variées.

Concernant le nombre et les angles des projections à partir desquelles nous désirons construire une image, dans les applications concrètes de l'imagerie médicale, de la géophysique, de la mécanique des matériaux, les contraintes physiques des différentes techniques de mesure - rayons X, raisonnance magnétique, ondes mécaniques,...- font que les projections obtenues de l'objet à reconstruire sont en nombre généralement important et les angles entre ces projections peuvent être très variés. Je me restreindrai ici aux problèmes pour lesquels les données sont les deux projections orthogonales : la projection horizontale et la verticale. Comme je l'illustrerai par la suite, même avec cette restriction, la tomographie discrète est source de nombreux problèmes de la recherche opérationnelle.

Reconstruction d'une matrice binaire

Il est couramment admis que le premier problème de tomographie discrète, étudié par H. Ryser à la fin des années 50 est la reconstruction d'une matrice binaire.

La projection horizontale d'une matrice binaire est le vecteur $H = (h_1, \ldots, h_m)$ où h_i est la somme des éléments de la ligne i. De façon analogue, la projection verticale est le vecteur $V = (v_1, \ldots, v_n)$ où les sommes sont calculées par colonne.

[1] Chaire de Recherche Opérationnelle - Laboratoire CEDRIC
Conservatoire National des Arts et Métiers

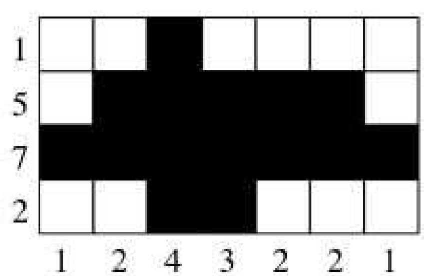
3	1	1	1	0	0
4	0	1	1	1	1
2	1	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0
	2	4	3	2	1

La problématique est alors la suivante : étant données les projections $H = (h_1, \ldots, h_m)$ et $V = (v_1, \ldots, v_n)$

1. **Existence :** Existe-t-il une matrice binaire M ayant pour projections H et V ?
2. **Reconstruction :** Déterminer un algorithme *efficace* donnant M.
3. **Unicité :** La solution M est-elle unique ?

Ces questions ont été résolues par H. Ryser et des algorithmes polynomiaux y répondent.

Il est certaines données pour lesquelles le nombre de matrices solution est exponentiel. Ainsi les $n!$ matrices matrices de permutation de dimension n ont leurs projections $H = V = (1, \ldots, 1)$. Dans ce cas, l'énumération explicite n'étant pas opérationnelle, le tomographe discret s'attache alors à ajouter des contraintes de structure aux matrices qu'il cherche à obtenir. Ceci est souvent générateur de difficultés algorithmiques supplémentaires puisque les solutions fournies par H. Ryser ne sont plus nécessairement opératoires car ne garantissant pas que les matrices obtenues satisfassent ces contraintes additionnelles.



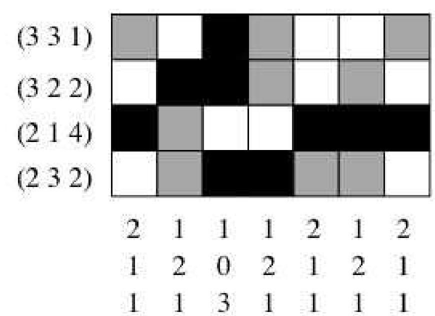
Un polyomino horizontalement et verticalement convexe est un ensemble connexe de cellules tel que toute droite horizontale ou verticale du plan intersecte le polyomino en un intervalle unique. Ainsi, un polyomino horizontalement et verticalement convexe peut être considéré comme l'analogue discret d'un corps convexe de dimension deux.

Les tomographes discrets se sont intéressés au problème de reconstruire un polyomino horizontalement et verticalement convexe à partir de H et V. Si pour ce problème des algorithmes efficaces existent, il a également été montré que la reconstruction d'un polyomino horizontalement ou verticalement convexe est un problème calculatoire difficile.

Certaines applications, en cristallographie, correspondent également à des problèmes de reconstruction de matrices binaires. Dans ce contexte les '1' et '0' de la matrice correspondent au positionnement des atomes dans le cristal ou le quasi-cristal et la nature de chaque cristal donne le positionnement relatif des atomes. C'est pourquoi les problèmes de reconstruction de matrice binaire imposant diverses contraintes de périodicité ou d'adjacence des '0' et '1' sont l'objet de plusieurs publications récentes.

Reconstruction d'une matrice colorée

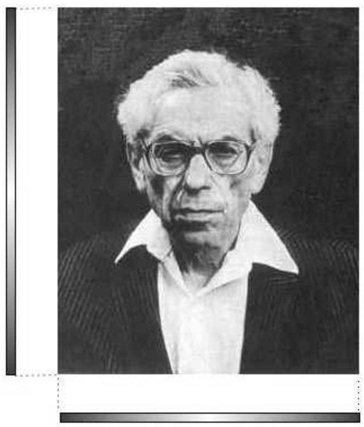
Une matrice binaire correspond à une image en noir et blanc dans laquelle chaque pixel est associé à une coordonnée de la matrice. Pour une image utilisant k couleurs, les projections sont définies comme étant le nombre de pixels de chacune des couleurs dans chacune des lignes et des colonnes.



Le problème qui se pose au tomographe est de reconstruire l'image en couleur à partir des deux projections orthogonales H et V. Si pour $k = 2$ couleurs (noir et blanc) le problème est résolu efficacement, il n'en va pas de même à partir de $k = 4$ puisque décider de l'existence d'une image quatre chromatique est un problème $NP-$complet. Il est à noter que pour $k = 3$ la complexité calculatoire n'est toujours pas élucidée malgré l'acharnement avec lequel les tomographes discrets travaillent à ce problème.

La reconstruction d'une matrice colorée est également un problème d'emploi du temps dans lequel chaque ligne de la matrice correspond à une classe et chaque colonne à une période de l'année universitaire. Si une couleur est associée à chacun des professeurs et chaque cours a une durée d'une heure, les projections horizontales sont le nombre de cours que chaque classe doit recevoir (subir) de chacun des professeurs et les projections verticales sont le nombre d'heures de disponibilté de chaque professeur pendant chacune des périodes. Le problème consiste alors à construire une matrice colorée (un emploi du temps) correspondant à ces projections.

La compression de données et le problème de l'unicité



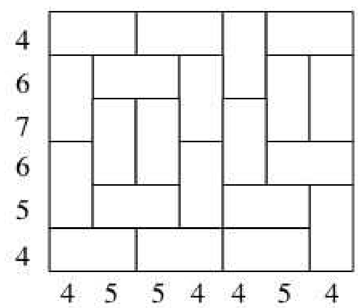
La tomographie discrète a également des applications en compression de données : une image numérique est composée de m lignes et n colonnes, soit $m.n$ pixels chacun ayant une couleur parmi k. Sans traitement préalable, l'espace nécessaire au stockage d'une image est de l'ordre de $O(mn)$, le nombre de couleurs étant fixé. Le stockage des projections orthogonales de l'image nécessite un espace moindre, $O(m+n)$.

Les projections de départ sont obtenues à partir d'une image et le problème de l'existence d'une solution ne se pose pas : un algorithme de reconstruction va fournir *une* image. Mais l'image obtenue risque fort de ne pas ressembler à l'image d'origine car deux projections sont rarement suffisantes pour assurer l'unicité de l'image reconstruite. L'étude de l'unicité de la solution d'un problème de reconstruction à partir d'un *petit* nombre de projections et d'informations *a priori* sur la nature de l'image cherchée (convexité, périodicité,...) est génératrice de problèmes particulièrement riches tant du point de vue théorique que pour leurs applications en compression de données.

Reconstruction d'un pavage

Le modèle des *dimères* est une construction mathématique représentative de certains aspects du comportement d'un ensemble d'atomes dans un cristal. Il est utilisé pour étudier mathématiquement certains phénomènes naturels, comme le ferromagnétisme dans un métal ou les lignes de flux d'un champ magnétique dans un matériau à basse température. Il se rapproche du fameux modèle d'Ising, modèle mathématique utilisé pour le ferromagnétisme. Une des formes du modèle des dimères est représentée géométriquement par les pavages aléatoires d'un grand échiquier, où les pavés (dominos) sont des rectangles couvrant deux carrés.

Les projections orthogonales d'un pavage sont définies comme étant le nombre de pavés distincts - dans le cas des dimères les pavés sont des dominos - apparaissant dans chacune des lignes et colonnes. La reconstruction efficace d'un pavage à partir de ces projections est d'une grande importance dans le domaine de la physique des matériaux. Je fais remarquer ici que la complexité calculatoire de ce problème est inconnue.



Un problème d'emploi du temps

De nombreuses entreprises se trouvent confrontées au problème suivant : d'une part, la charge journalière de travail varie chaque jour, et, d'autre part, du fait de l'extension du travail à temps partiel, le nombre de journées de travail des employés est lui aussi fluctuant. Ainsi, connaissant h_i, le nombre de journées de repos de l'employé i pour une période de n jours et v_j le nombre d'employés au repos le jour j, le problème de l'entreprise consiste à affecter les journées de repos à chacun de ses employés en respectant les quantités h_i et v_j. Le problème est alors celui de la reconstruction d'une matrice binaire à partir de ses projections orthogonales.

À cela s'ajoutent les deux contraintes suivantes issues du code du travail : tout jour de repos d'un employé doit être précédé ou suivi d'un autre jour de repos ; un employé ne peut en aucun cas travailler plus de k jours successifs sans prendre de repos (k est un paramètre fixé par la convention collective).

Afin d'illustrer la difficulté du problème une fois ces dernières contraintes prises en compte, je signale au lecteur qu'à ma connaissance ce problème n'est bien résolu que pour une entreprise n'employant que deux personnes.

Une application agricole

Je vais conclure par un dernier exemple que je vous livre tel qu'il m'a été présenté (il fait l'objet d'un contrat entre l'état malgache et une grande école de commerce). Vous serez convaincus qu'il est du ressort de la recherche opérationnelle et de la tomographie discrète.

Application : projet malgache de développement agricole et de lutte contre le défrichement des forêts primaires.

Un agriculteur souhaite planifier ses rotations culturales sur un horizon donné de manière à couvrir ses besoins saisonniers tout en minimisant l'espace agricole nécessaire pour sa production. Dans le cas où l'exploitation est morcelée en un ensemble de parcelles de même surface et où une seule culture peut être produite sur une parcelle à une saison donnée, nous avons un problème de tomographie consistant à paver un rectangle de longueur fixée H, où H est le nombre de saisons de l'horizon, par des tuiles horizontales de largeur 1 et de longueur associée à une séquence possible de jachères/cultures (ex : jachère-riz-haricot). À chaque tuile est associé pour chaque unité de longueur le rendement en tonnes de chaque culture, et l'objectif est de paver le rectangle de telle sorte que sa hauteur (nombre de lignes = nombre de parcelles utilisées) soit minimale et que les contraintes de couverture des besoins par colonne (saison) soient satisfaites.

Pour qui veut gagner des euros

J'offre la somme de 1000 euros à qui déterminera la complexité de l'un des problèmes suivants :

1. Reconstruction d'un pavage d'un rectangle par des dominos à partir des projections orthogonales
2. Reconstruction d'une matrice tricolorée à partir des projections orthogonales

J'offre la somme de 100 euros à qui déterminera la complexité du problème d'emploi du temps pour une entreprise ayant trois employés lorsque le paramètre k fait partie de l'instance du problème (voir plus haut la description précise du problème).

N.B. : ces offres ne sont valables que dans la mesure où la preuve fournie n'est pas un corollaire immédiat d'une hypothétique preuve de $P = NP$.

Si l'un des résultats proposés a pour conséquence $P \neq NP$ (ou $P = NP$), l'auteur (ou les auteurs) de la preuve s'engage à ne pas réclamer son prix et à investir 1000 euros sous forme de bière offerte aux participants du premier congrès ROADEF qui suivra la réception de son prix de 1 000 000 $ décerné par le Clay Mathematics Institute.

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Laurent Alfandari, Cédric Bentz et Maurice Nivat pour leur contribution plus ou moins indirecte à la rédaction de cet article.

Références

[1] G. Herman et A.Kuba, *Discrete Tomography : Foundations, Algorithms and Applications*, ed. Birkhauser, 1999.

[2] IWCIA 2003-Ninth International Workshop on Combinatorial Image Analysis, *Discrete Applied Mathematics* (151), 1-246, 2005.

[3] Proceedings of the Workshop on Discrete Tomography and its Applications, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* (20), 1-622, 2005.