Structures géométriques de l'apprentissage machine pour les groupes de Lie : Gradient naturel, métrique de Fisher-Koszul-Souriau et Thermodynamique des groupes de Lie

Frédéric BARBARESCO – THALES – frederic.barbaresco@thalesgroup.com

Résumé : L'objet de l'exposé concerne les structures géométriques élémentaires de l'apprentissage machine, fondées sur le « gradient naturel » de la « Géométrie de l'Information », qui rend invariant par changement de paramétrisation le gradient d'apprentissage dans les réseaux de neurones par le biais de la matrice de Fisher. Après cette introduction exposant le « gradient naturel » [1] et ses extensions récentes aux réseaux de neurones profonds [2], nous développons de nouvelles méthodes pour étendre l'approche à des espaces plus abstraits et en particulier les groupes de Lie (matriciels).

L'apprentissage profond a été étendu récemment avec succès aux graphes, mais le thème émergent « (Matrix) Lie Group Machine Learning » [14][18][15][16][20][21] est une extension particulièrement intéressante pour les applications industrielles : reconnaissance de mouvements/cinématiques (série temporelle d'éléments du groupes SE(3)), reconnaissances de postures/gestes articulés [3](série temporelle de vecteurs d'éléments du groupe SO(3)), reconnaissance micro-Doppler [12](série temporelle d'éléments du groupe SU(1,1)) et en robotique (éléments de sous-groupes du groupe affine Aff(n)).

Nous exposerons l'extension de la notion de métrique de Fisher par le mathématicien Jean-Louis Koszul [4][6][17] sur les cônes convexes saillants. Pour l'extension de l'apprentissage machine aux groupes de Lie, nous présenterons les outils issues de la physique statistique à travers le modèle du physicien Jean-Marie Souriau de la « Thermodynamique des groupes de Lie » [7][8][19][22] basé sur la géométrie symplectique (application moment, 2 forme KKS « Kirillov-Kostant-Souriau » dans le cas non-équivariant [5], le cocycle symplectique de Souriau, les méthodes des orbites coadjointes [9] issues de la théorie des représentations de Kirillov des groupes de Lie [10][11]).

Nous terminerons par une illustration d'apprentissage machine pour les exemples canoniques de groupes de Lie matriciels classiques tels que les groupes SU(1,1)[13][23] (cas équivariant à cohomologie nulle), et le groupe SE(3) (cas non-équivariant à cohomologie non-nulle)[13].

Références :

1. Shun-ichi Amari, Information Geometry and Its Applications, Applied Mathematical Sciences, SPRINGER, 2016
2. Yann Ollivier, Riemannian metrics for neural networks I: Feedforward networks, Information and Inference 4, n°2, 108–153, 2015
3. Zhiwu Huang, Chengde Wan, Thomas Probst, Luc Van Gool, Deep Learning on Lie Groups for Skeleton-based Action Recognition, Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2017
4. Jean-Louis Koszul, Trajectoires Convexes de Groupes Affines Unimodulaires. In Essays on Topology and Related Topics; Springer: Berlin, Germany, pp. 105–110, 1970
5. Jean-Louis Koszul, Introduction to Symplectic Geometry, SRINGER, 2019
6. Frédéric Barbaresco, Jean-Louis Koszul and the Elementary Structures of Information Geometry, Geometric Structures of Information, pp 333-392, SPRINGER, 2018
7. Jean-Marie Souriau, Structure des systèmes dynamiques, Dunod, 1969
8. Jean-Marie Souriau, Mécanique statistique, groupes de Lie et cosmologie, Colloques int. du CNRS numéro 237. Aix-en-Provence, France, 24–28, pp. 59–113, 1974
9. Alain Guichardet, La méthode des orbites: historiques, principes, résultats. Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, vol. 4, Cassini, pp. 33–59, 2010
10. Koichi Tojo, Taro Yoshino, On a method to construct exponential families by representation theory. In: Nielsen, F., Barbaresco, F. (eds.) GSI 2019. LNCS, vol. 11712, SPRINGER, 2019
11. Frédéric Barbaresco, Higher order geometric theory of information and heat based on polysymplectic geometry of Souriau lie groups thermodynamics and their contextures: the bedrock for lie group machine learning. MDPI Entropy 20 (11), 840, 2018, Special Issue "Joseph Fourier 250th Birthday: Modern Fourier Analysis and Fourier Heat Equation in Information Sciences for the XXIst century"
12. Frédéric Barbaresco, Lie Group Machine Learning and Gibbs Density on Poincaré Unit Disk from Souriau Lie Groups Thermodynamics and SU(1,1) Coadjoint Orbits. In: Nielsen, F., Barbaresco, F. (eds.) GSI 2019. LNCS, vol. 11712, SPRINGER, 2019
13. Frédéric Barbaresco, Application exponentielle de matrice par l'extension de l'algorithme de Jean-Marie Souriau, utilisable pour le tir géodésique et l'apprentissage machine pour les groupes de Lie, Colloque GRETSI 2019, Lille, 2019
14. Li Fanzhang, Zhang Li, Zhang, Zhao, Lie Group Machine Learning, DE GRUYTER, Nov. 2018
15. Nina Miolane, Johan Mathe, Claire Donnat, Mikael Jorda, Xavier Pennec, GEOMSTATS: a Python Package for Riemannian Geometry in Machine Learning, Preprint NIPS2018, arXiv:1805.08308, Nov. 2018, https://github.com/geomstats/geomstats
16. Trimestre LABEX CIMI « Statistics with Geometry & Topology », Toulouse, 2019, https://perso.math.univ-toulouse.fr/statistics-geometry-and-topology/
17. Workshop "Foundations of Geometric Structures of Information: Cartan – Koszul – Souriau", 4-6 Feb 2019 Montpellier, https://fgsi2019.sciencesconf.org/
18. Frédéric Barbaresco, Elena Cellodoni, François Gay-Balmaz & Joël Bensoam, Special Issue MDPI Entropy "Lie Group Machine Learning and Lie Group Structure Preserving Integrators", https://www.mdpi.com/journal/entropy/special_issues/Lie_group
19. Conférence CNRS/Université Paris-Diderot, "SOURIAU 2019", https://www.youtube.com/watch?v=93hFolIBo0Q ; http://souriau2019.fr/
20. Alexis Arnaudon, Alessandro Barp and So Takao, Irreversible Langevin MCMC on Lie Groups, In: Nielsen, F., Barbaresco, F. (eds.) GSI 2019. LNCS, vol. 11712, SPRINGER, 2019
21. 4ème conference SMF GSI'19 "Geometric Science of Information, session "Lie Group Machine Learning", ENAC, Toulouse, 27-29 Aout 2019, https://www.see.asso.fr/en/file/27078/download/44745 ; https://www.springer.com/gp/book/9783030269791
22. Charles-Michel Marle. From Tools in Symplectic and Poisson Geometry to J.-M. Souriau's Theories of Statistical Mechanics and Thermodynamics. MDPI Entropy, 18, 370, 2016
23. Charles-Michel Marle, Projection stéréographique et moments, hal-02157930, version 1, Juin 2019