

Tableaux multiples et données évolutives

N. Niang Keita niang@cnam.fr

Gilbert Saporta gilbert.saporta@cnam.fr

GRUPE D'ÉTUDE ET DE RÉFLEXION INTERRÉGIONAL

L'ANALYSE DES DONNÉES ÉVOLUTIVES

méthodes et applications



ÉDITIONS TECHNIP

Plan

1. Généralités
2. Double ACP
3. STATIS
4. AFM

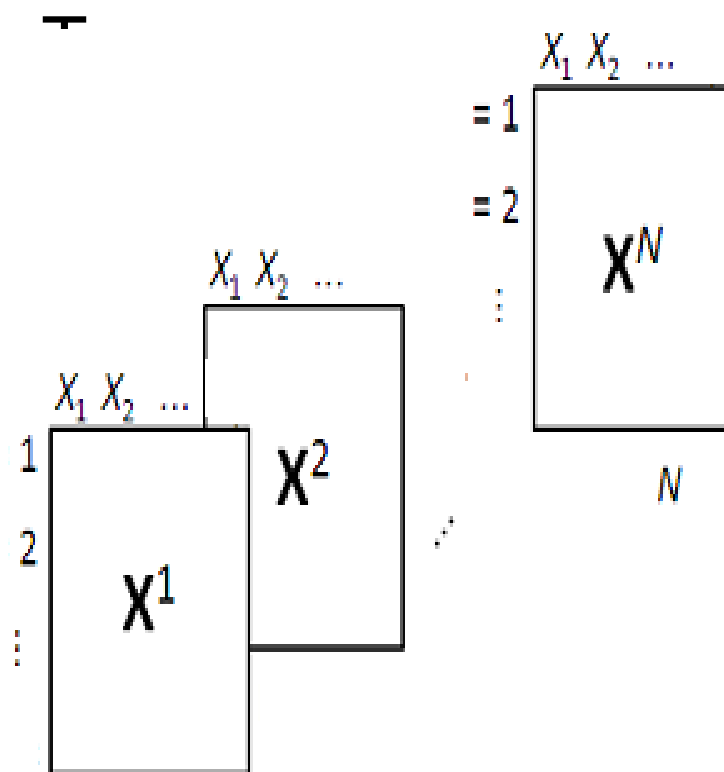
- 1 Généralités

- Suite de tableaux individusxvariablesxtemps

- temps discret $1, 2, \dots, t$,

- « données de panels

- données « cubiques »



1 Généralités

- Cadre général: méthodes d'analyse simultanée de plusieurs tableaux de données
- Plusieurs situations:
 - p_t variables mesurées sur n_t individus à différentes dates: données évolutives
 - p_t variables mesurées sur n_t individus à différentes occasions (non temporel)
 - Plusieurs tableaux de contingence ou de proximités

1 Généralités

- Plusieurs méthodes:
 - STATIS, STATIS DUALE
 - AFM
 - DACP
 - + AUTRES ANGLO SAXONS

- 1 **Généralités**
- **Etude classique d'un tableau**: l'ACP associe au tableau un ensemble de représentation graphiques (cercle de corrélations, plans factoriels)
- **Plusieurs tableaux**: études séparées → trop de représentations indépendantes, pas pertinent; d'où:
- Recherche d'un **ensemble unique de représentation, un résumé global, un compromis** des tableaux

4 étapes:

- **Interstructure** : étude globale des différences entre tableaux
- **Compromis** : résumer les tableaux en un seul représentatif selon certains critères
- **Intrastructure** : étude fine des différences entre tableaux
- **Trajectoires** : évolution des individus ou variables suivant les tableaux

2. La double ACP (Bouroche, J.M., 1975)

- ACP n°1: nuage des centres de gravité g_t comme étude de l'**interstructure**
- Recherche de l'**intrastructure**
 - ACP de chaque tableau: T systèmes d'axes
 - Système d'axes **compromis** maximise l'inertie de la somme des projections de chaque nuage = somme des inerties après centrage

double ACP (suite)

- Axes **compromis** : vecteurs propres de $\sum_{t=1}^T \mathbf{V}_t$
- ACP n°2: ACP de la concaténation verticale (superposition) des X_t centrés

X_1
X_2
X_T

double ACP: exemple

- Crimes et délits en 9 catégories pour l'ensemble des départements métropolitains, par année de 1974 à 1993
 - VO : vols et recels
 - FX : faux et escroqueries
 - DF: délits financiers
 - CH: chèques sans provisions
 - CR: coups, règlements de comptes, traumatismes
 - ST: stupéfiants
 - DD: destructions et dégradations
 - ET : délits à la police des étrangers
 - DV : divers

Tableau 5.1 Centres de gravités des tableaux analysés ²

Années	VO	FX	DF	CH	CR	ST	DD	ET
1974	15,46	1,31	0,27	3,31	1,41	0,040	1,06	0,088
1975	16,84	1,51	0,24	2,64	1,45	0,056	1,27	0,092
1976	16,44	1,63	0,27	2,11	1,44	0,068	1,25	0,076
1977	18,14	1,98	0,31	3,39	1,56	0,090	1,55	0,093
1978	18,26	2,13	0,37	3,88	1,54	0,123	1,70	0,113
1979	19,90	2,35	0,40	4,34	1,64	0,185	1,98	0,134
1980	21,89	2,67	0,44	5,90	1,74	0,201	2,41	0,179
1981	23,56	3,08	0,45	7,00	1,81	0,275	2,68	0,203
1982	27,20	3,88	0,73	8,33	1,86	0,388	3,18	0,158
1983	28,41	4,32	0,70	8,41	1,93	0,371	3,24	0,346
1984	30,18	4,53	0,95	7,64	1,95	0,401	3,39	0,341
1985	30,65	4,68	0,84	6,46	1,97	0,499	3,26	0,369
1986	28,72	4,74	0,66	4,89	1,78	0,727	2,98	0,375
1987	27,64	4,80	0,45	4,42	1,72	0,699	3,02	0,364
1988	27,18	4,54	0,50	3,96	1,88	0,666	2,98	0,365
1989	28,34	4,84	0,35	3,90	1,99	0,682	3,26	0,414
1990	30,99	5,17	0,34	3,58	2,03	0,741	3,77	0,366
1991	32,98	5,64	0,43	3,01	2,14	0,828	4,29	0,449
1992	34,76	5,14	0,38	0,35	2,21	0,955	4,99	0,501
1993	35,13	5,29	0,500	0,056	2,32	0,976	5,39	0,511

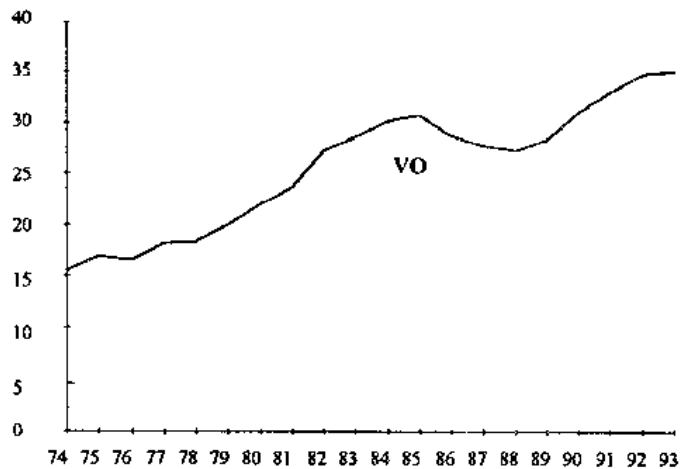


Fig. 5.8 *Évolution de la variable VO (vols et recels) en France métropolitaine.*

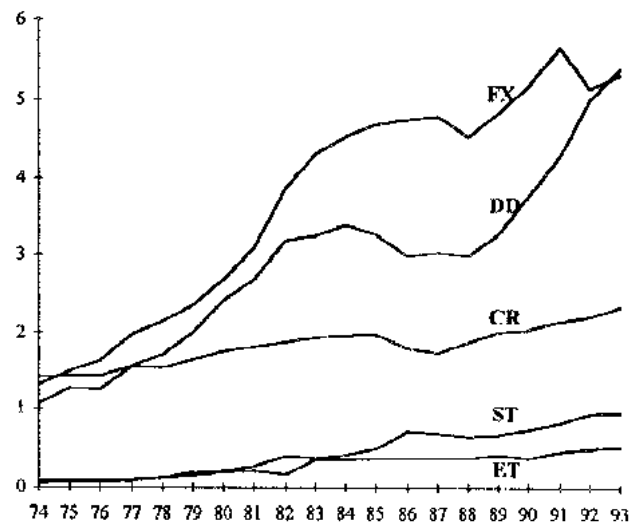


Fig. 5.9 *Évolution des variables ST, ET, FX, CR et DD en France métropolitaine.*

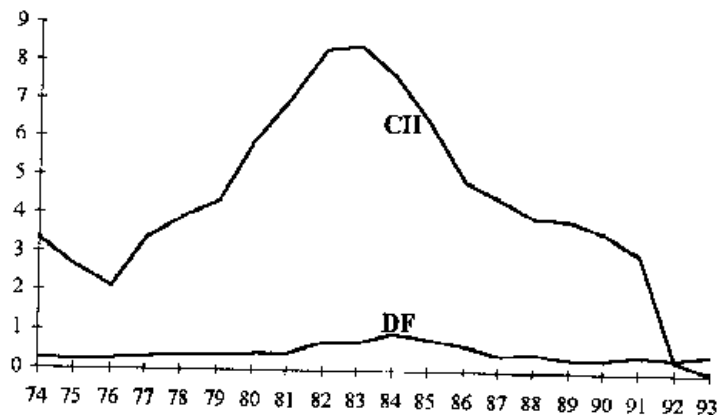


Fig. 5.7 *Évolution des variables CH et DF en France métropolitaine (criminalité financière).*

Tableau 5.2 Valeurs propres de l'interstructure déterminée par la DACP

Axes	Valeurs propres	% d'inertie	% cumulé
1	5,87	73,42	73,42
2	1,70	21,27	94,70
3	0,19	2,31	97,01
4	0,17	2,10	99,11

Tableau 5.3 Aides à l'interprétation de l'ACP des centres de gravité

Années	Axe 1				Axe 2			
	Coord	Ctr	Cos ²	Qlt	Coord	Ctr	Cos ²	Qlt
74	-3,85	12,6	96,3	96,3	-0,7	1,5	3,2	99,5
75	-3,58	10,9	92	92	-1,03	3,1	7,6	99,6
76	-3,58	10,9	90,2	90,2	-1,1	3,6	8,6	98,7
77	-2,97	7,5	95,7	95,7	-0,57	1	3,5	99,3
78	-2,75	6,4	98,7	98,7	-0,25	0,2	0,8	99,5
79	-2,16	4	98,6	98,6	-0,07	0	0,1	98,7
80	-1,47	1,8	78,6	78,6	0,54	0,9	10,7	89,3
81	-0,9	0,7	35,5	35,5	0,86	2,2	32,9	68,4
82	0,12	0	0,3	0,3	2,21	14,4	87,7	88
83	0,92	0,7	15,5	15,5	2,07	12,6	78,6	94,1
84	1,45	1,8	22,1	22,1	2,62	20,1	72,3	94,4
85	1,63	2,3	41,7	41,7	1,82	9,8	52	93,7
86	1,28	1,4	53,5	53,5	0,6	1,1	11,9	65,4
87	0,86	0,6	38,5	38,5	-0,24	0,2	2,9	41,5
88	1,01	0,9	73,8	73,8	-0,22	0,1	3,6	77,4
89	1,45	1,8	62,4	62,4	-0,79	1,8	18,3	80,7
90	1,9	3,1	71,8	71,8	-0,92	2,5	16,8	88,6
91	2,95	7,4	89,6	89,6	-0,92	2,5	8,8	98,4
92	3,56	10,8	73,4	73,4	-2,09	12,8	25,2	98,6
93	4,12	14,5	79,8	79,8	-1,83	9,8	15,7	95,4

Abréviations :

Coord : coordonnée du tableau sur l'axe;

Ctr : contribution relative du tableau à l'inertie expliquée par l'axe;

Cos² : qualité de représentation sur l'axe;

Qlt : qualité de représentation sur le sous-espace engendré par l'axe et les axes précédents

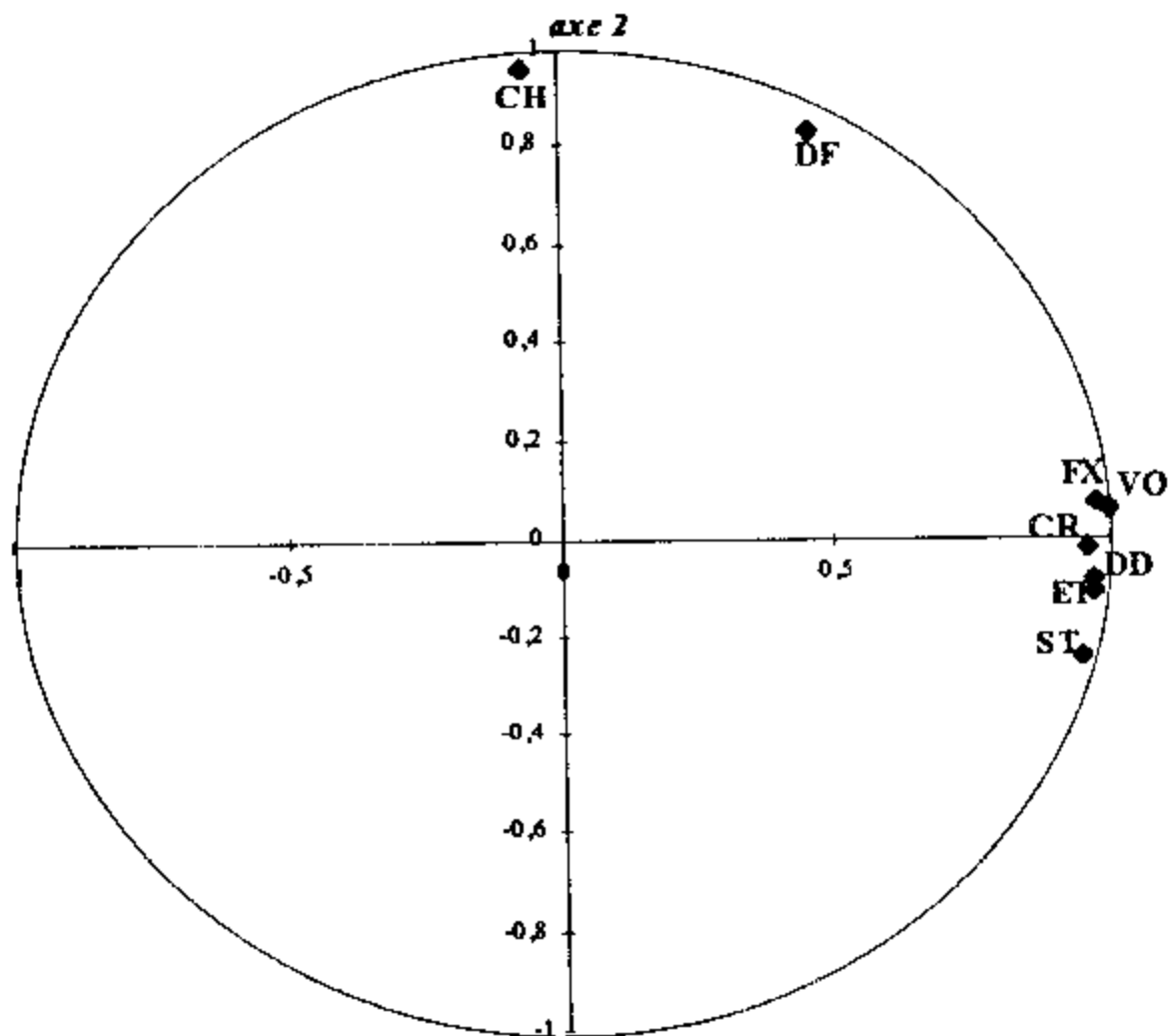


Fig. 5.5 Représentation des corrélations des variables dans le plan 1-2 (interstructure de la DACP).

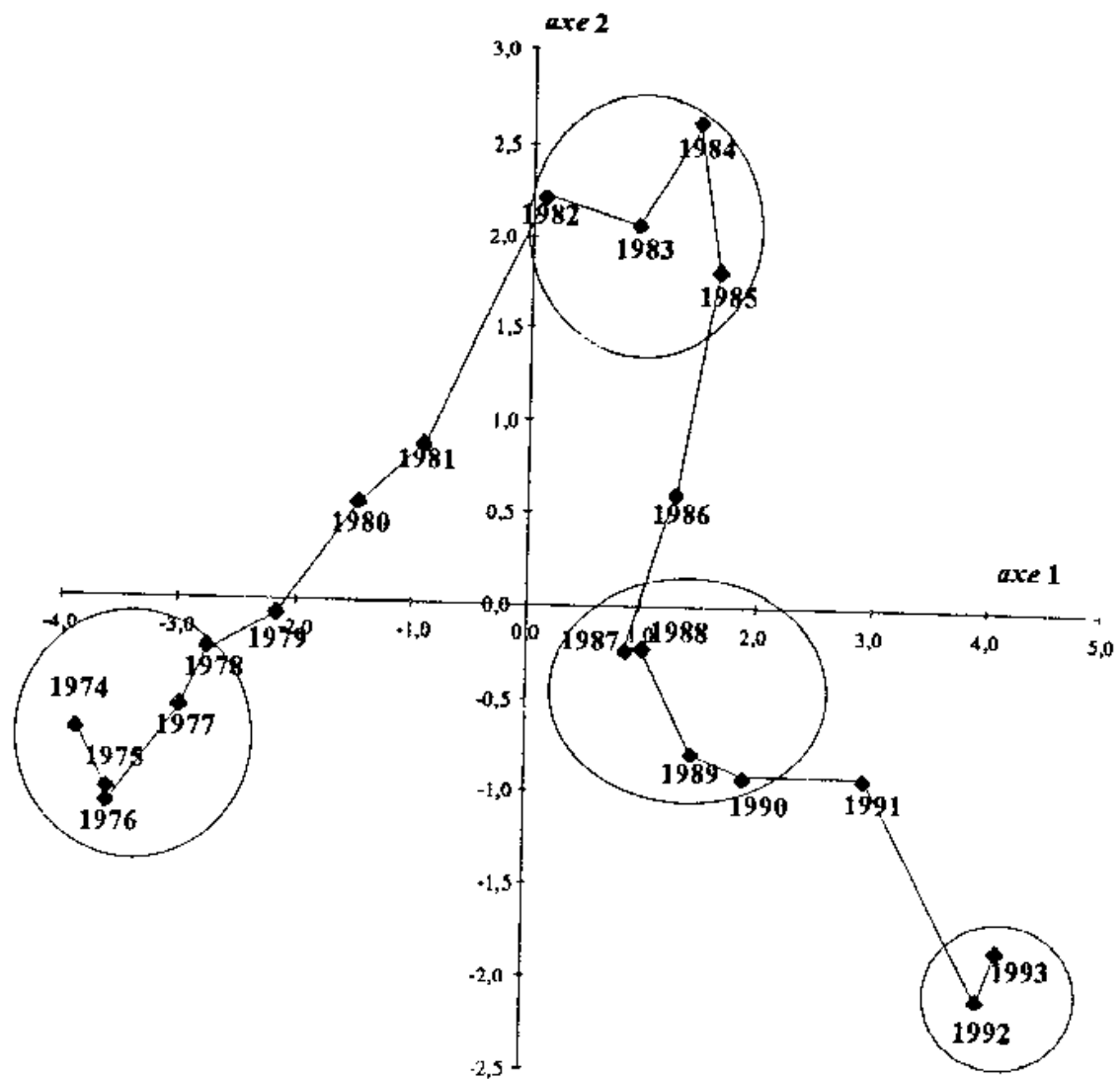


Fig. 5.6 Représentation des tableaux dans le plan 1-2 (interstructure).

Tableau 5.4 Valeurs propres de l'infrastructure (DACP)

Axes	Valeurs propres	% d'inertie	% cumulé
1	3,13	39,18	39,18
2	1,11	13,89	53,07
3	0,97	12,19	65,26
4	0,83	10,34	75,59
5	0,73	9,12	84,71
6	0,58	7,31	92,02
7	0,39	4,90	96,92
8	0,25	3,08	100

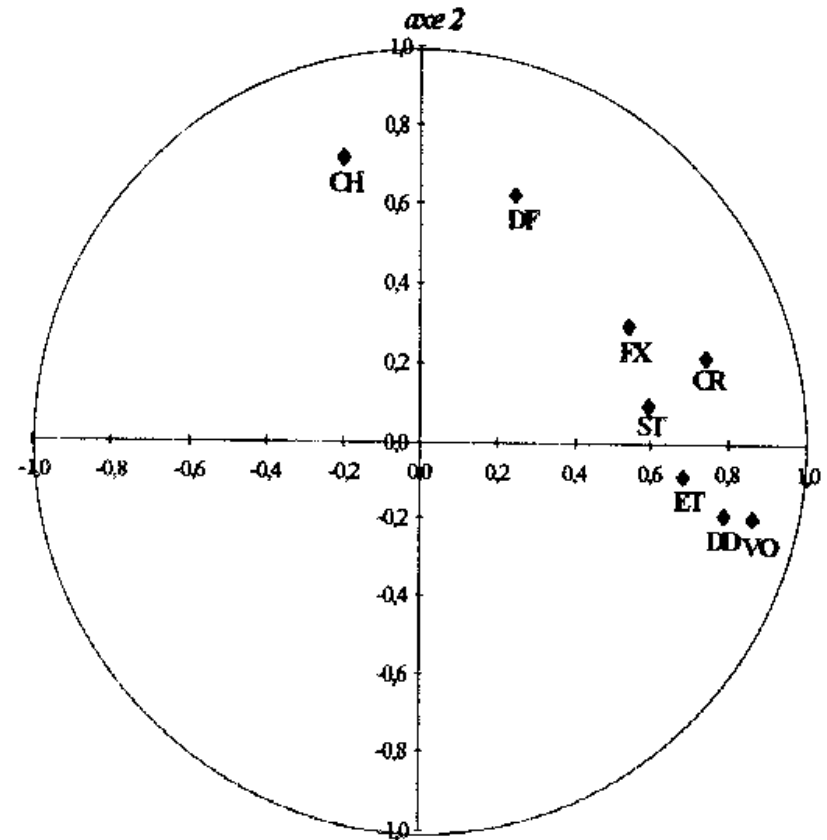


Fig. 5.10 Corrélations des variables dans le plan 1-2.

La Corse (20)

La trajectoire de la Corse se situe dans le coin supérieur droit du plan principal. En Corse, les variables corrélées avec l'axe 1 sont, pour la plupart, supérieures à la moyenne nationale. En particulier, le **taux de « destructions et dégradations »** est souvent très supérieur au taux observé en France métropolitaine.

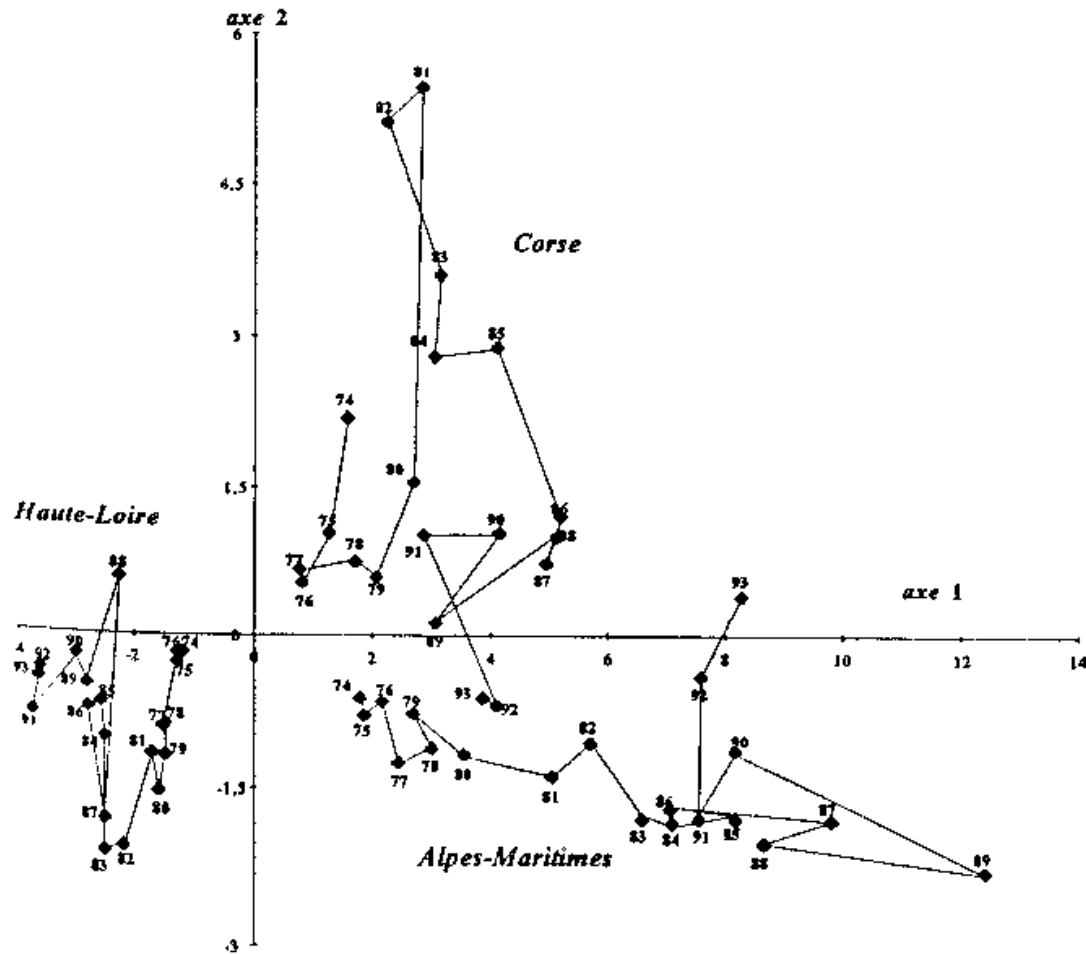


Fig. 5.12 Trajectoires des départements 06, 20 et 43.

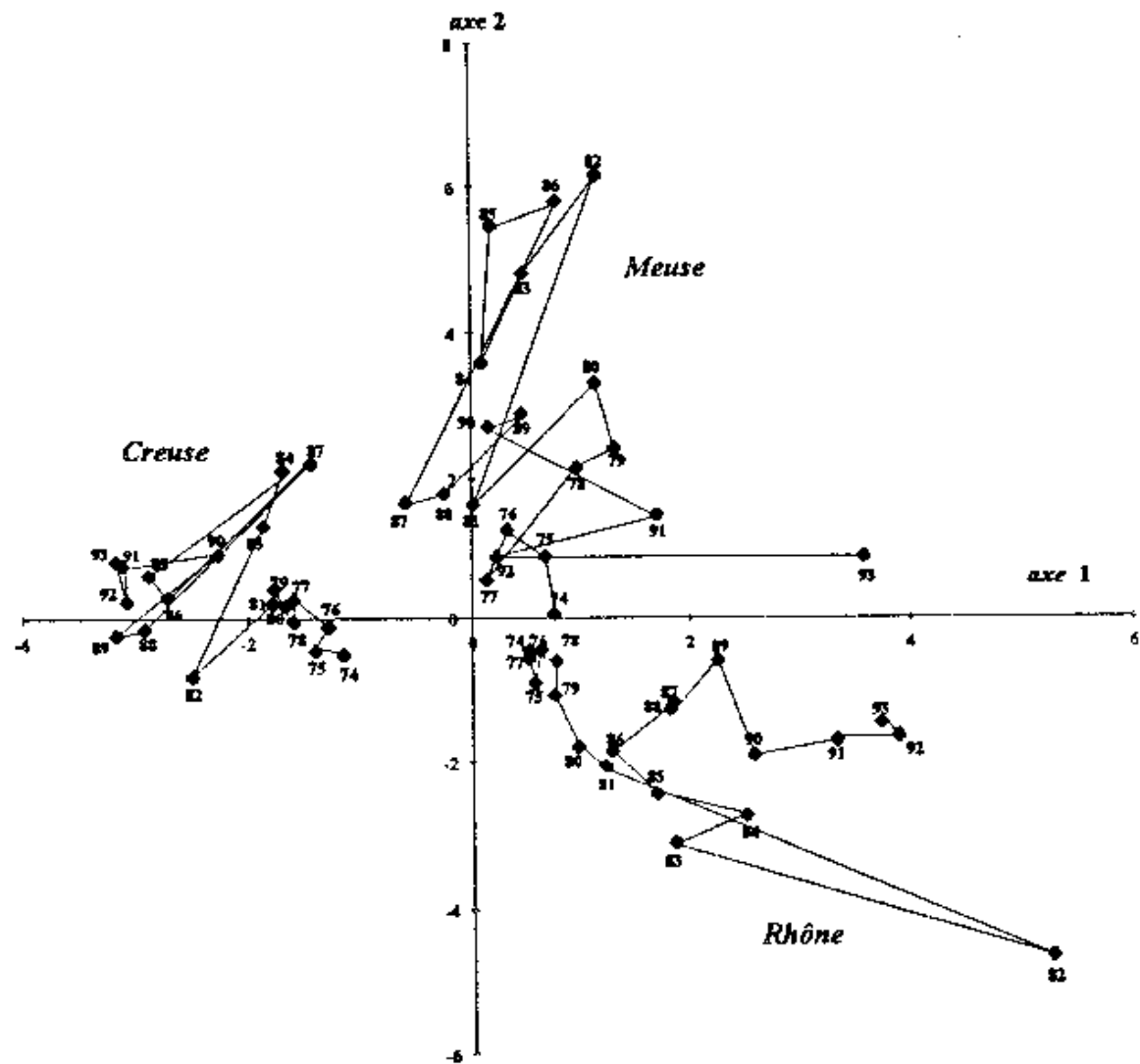
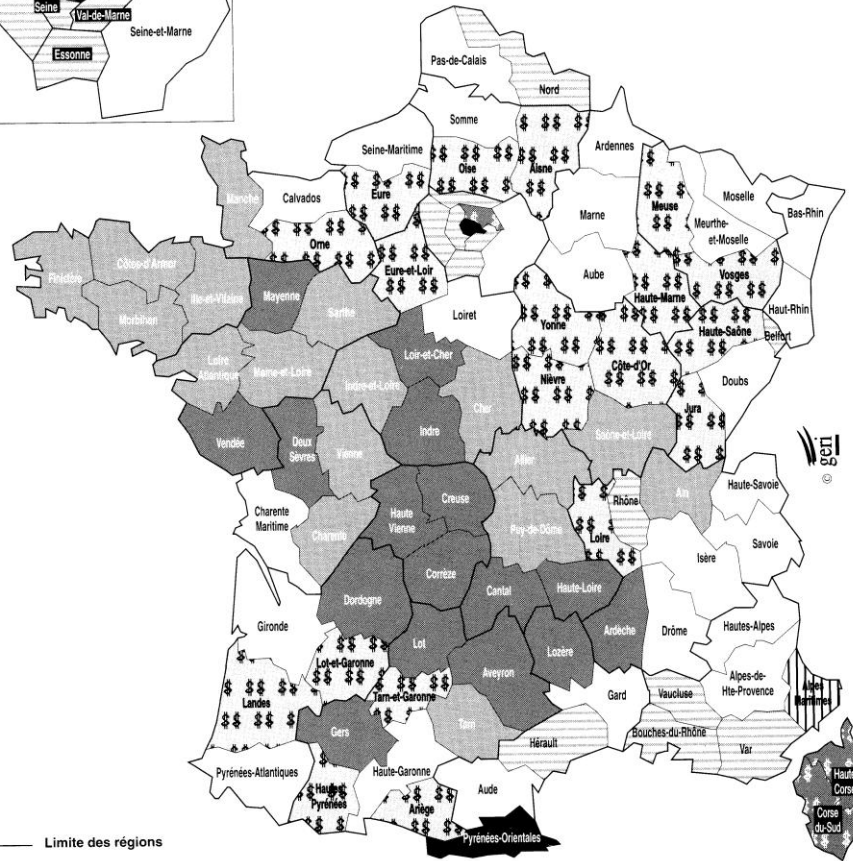
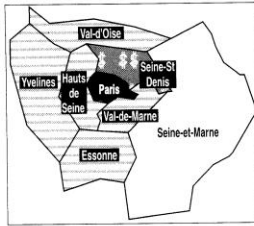
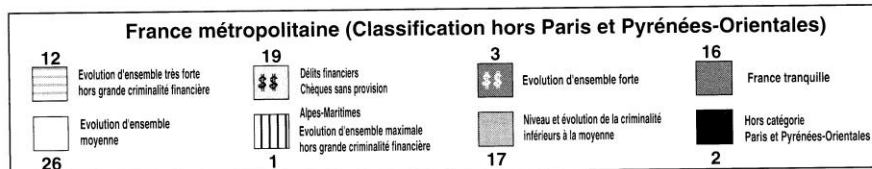


Fig. 5.13 Trajectoires des départements 23, 55 et 69.

Ile-de-France



— Limite des régions



Base de données GERI - Source : Ministère de l'intérieur et de l'aménagement du territoire
Lecture : le chiffre inscrit au-dessus ou en-dessous des carrés de légende correspond au nombre de départements du groupe

Carte 5.1 Niveau, évolution et caractéristiques de la criminalité selon les départements de 1974 à 1993

3. La méthode STATIS_{(Escoufier et L'Hermier des Plantes (1976) + C.Lavit)}

- Structuration de Tableaux A Trois Indices de la Statistique
- permet l'exploration simultanée de plusieurs tableaux de données quantitatives:
- n individus et p variables → STATIS
 - Privilégie la position des individus

STATIS

- Idées essentielles de la méthode:
 - recherche d'une réponse à la question: les distances entre individus sont elles stables d'un tableaux à un autre ?
 - Nécessité de trouver une structure commune aux études ou **intrastructure**

Rappels d'ACP

- ACP classique : triplet (\mathbf{X} , \mathbf{M} , \mathbf{D})
 - facteurs principaux : $\mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$
 - composantes principales : $\mathbf{c} = \mathbf{X}\mathbf{u}$

$$\mathbf{M}\mathbf{X}'\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

$$\mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{X}'\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{X}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}$$

\mathbf{W} =matrice des produits scalaires entre individus

Composantes principales $\mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}$

Etude de l'interstructure : analyse globale

- ACP particulière: 3 phases
 - Définir un objet représentatif
 - Définir une métrique pour distances entre objets
 - Trouver une image des objets représentatifs

Interstructure, objet représentatif: W_t

- $W_t = X_t M_t X_t'$ caractérise (X_t, M_t, D)
 - W_t contient les produits scalaires entre individus = tous les liens inter-individus
 - ses vecteurs propres sont les composantes principales
 - permet de reconstruire la géométrie du nuage
 - “Opérateur d’Escoufier”

- Métrique de l'ACP:

définit une distance entre objets

Produit scalaire de Hilbert Schmidt:

$$\mathbf{S}_{tt'} = \langle \mathbf{W}_t | \mathbf{W}_{t'} \rangle_{HS} = Tr (\mathbf{D}\mathbf{W}_t \mathbf{D}\mathbf{W}_{t'})$$

Si les objets \mathbf{W}_t ont des normes très différentes, on utilise le cosinus associé:

$$RV_{t,t'} = \langle \mathbf{W}_t | \mathbf{W}_{t'} \rangle / \sqrt{Tr[(\mathbf{D}\mathbf{W}_t)^2] Tr[(\mathbf{D}\mathbf{W}_{t'})^2]}$$

- **RV coefficient de corrélation vectoriel**
 - mesure la liaison entre deux tableaux de données portant sur les mêmes individus
 - $RV=1$ si les nuages associés sont homothétiques
 - RV positif ou nul

- **STATIS: une ACP particulière**
 - Individu (ou "supervariable") = W_t = objet représentatif d'un tableau
 - Matrice de corrélation = S = Matrice des coefficients RV (produits scalaires entre objets normés W_t)
 - Composante principale = vecteur propre de **S**
 - Facteur taille car tous les RV sont positifs

Interstructure image représentative des objets

- **ACP de \mathbf{S}**

Les vecteurs propres de \mathbf{S} associés aux deux plus grandes valeurs propres permettent la représentation des objets $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_T$ sur un plan factoriel :

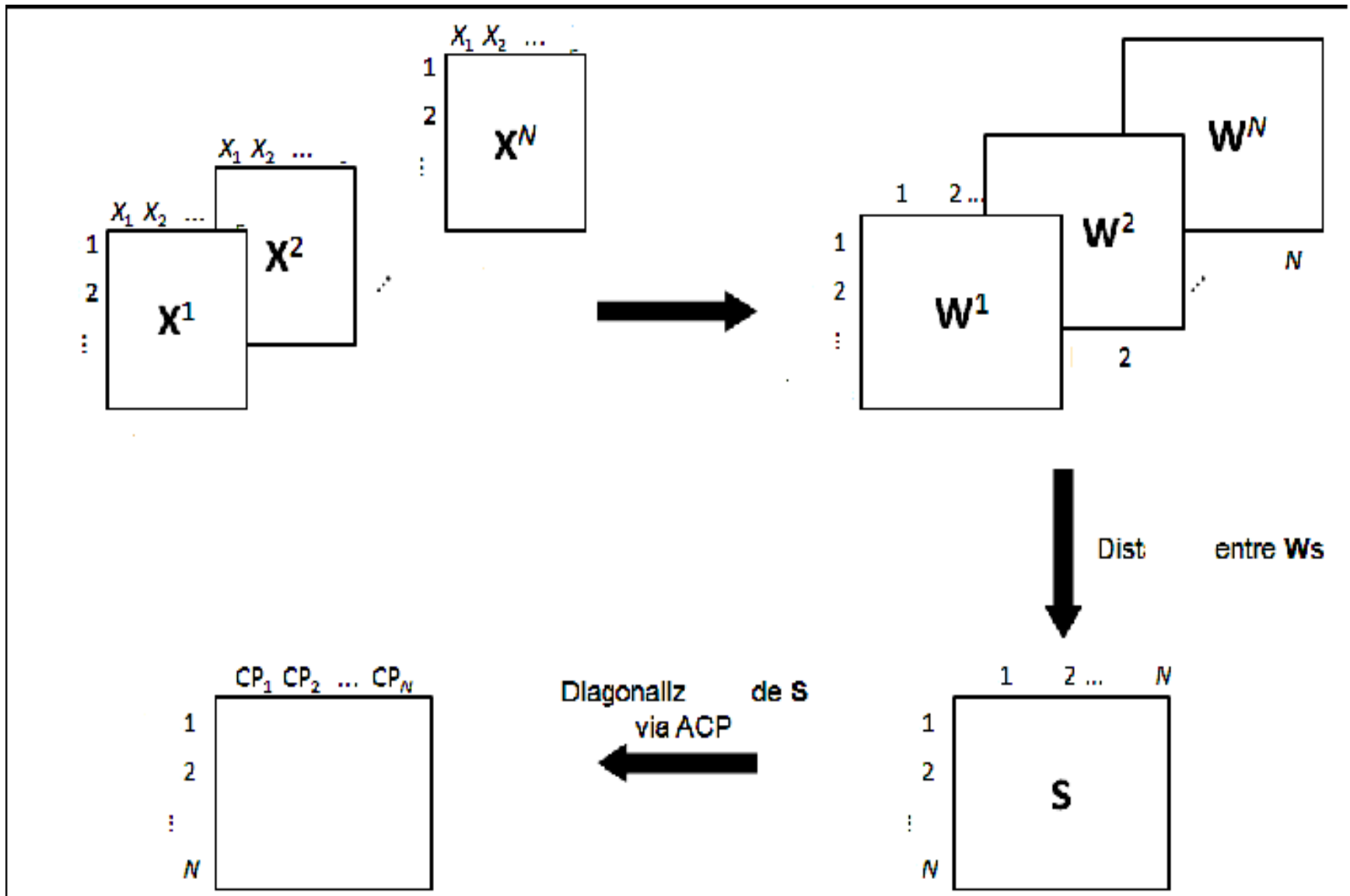
- Les coordonnées des \mathbf{W}_t sur l'axe i sont contenues dans $\mathbf{c}_{t,i}$:

$$\mathbf{c}_{t,i} = \sqrt{\lambda_i} \mathbf{u}_i$$

$i^{\text{ème}}$ valeur propre de \mathbf{S}

$i^{\text{ème}}$ vecteur propre de \mathbf{S}

STATIS - Résumé Interstructure



Compromis-Intrastructure

Interstructure = analyse globale

mise en évidence de ressemblances ou différences globales entre tableaux sans les expliquer.

Objectif de la suite = analyse plus fine pour expliquer

Deux étapes:

- * recherche d'un point de repère= **compromis**
- * étude de **l'intrastructure**

Recherche d'un compromis

Compromis = bon résumé, de même nature que les objets

solution: W_{CO} moyenne pondérée des W_t

$$W_{CO} = \sum_{t=1}^T \alpha_t W_t$$

Les coefficients sont tels que W_{CO} soit le plus corrélé avec les W_t

En ACP usuelle, la première composante principale vérifie un principe d'association maximale

$$\max \sum_{j=1}^p r^2(c; x_j) \quad \text{avec } c = \sum_{j=1}^p \alpha_j x_j$$

Ici on prendra pour α_j les composantes (toutes positives) du premier vecteur propre de S

Recherche d'un compromis

Matrice compromis W_{CO}

$$W_{CO} = \sum_{t=1}^T \alpha_t W_t$$

$$\alpha_t = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} u_1^{(t)}$$

$t^{\text{ème}}$ élément du 1^{er} vecteur propre de **S**

1^{ère} valeur propre de **S**

$$W_t = X_t M X_t'$$

Matrice de données initiales

- Wco est encore un opérateur d'Escoufier car les α_j sont non négatifs
- Wco est donc associé à un tableau de données "compromis" X tel que $Wco = XMX'$

- ACP de $\mathbf{X} = \boxed{\sqrt{\alpha_1} \mathbf{X}_1} \boxed{\sqrt{\alpha_2} \mathbf{X}_2} \dots \boxed{\sqrt{\alpha_T} \mathbf{X}_T}$

- Pondération des tableaux

Recherche d'un compromis

4 cas:

- * **Wt ont des normes voisines et des grands RV:** existence d'une structure commune bien décrite par le compromis
- * **un Wt différent des autres:** il intervient peu dans la construction du compromis, robuste
- * **Wt normes trop différentes:** il faut normer
- * **Wt très différents, RV faibles:** pas de structure commune

Statis: exemple

- Elections présidentielles de 1969 à 1988
 - résultats par département

En 1969 :

GI1¹ : Vote Defferre
DI1 : Vote Poher + Vote Pompidou
GP1 : Vote Rocard + Vote Duclos + Vote Krivine
AT1 : Vote Ducatel
NP1 : Votes blancs et nuls + Abstention
CN2² : Vote Poher

DI2 : Vote Pompidou
NP2 : Votes blancs et nuls + Abstention

En 1974 :

GI1 : Vote Mitterrand
DI1 : Vote Giscard + Vote Muller + Vote Royer + Vote Chaban
GP1 : Vote Laguiller + Vote Krivine
DP1 : Vote Le Pen + Vote Renouvin *(droite protestataire)*
AT1 : Vote Héraud + Vote Sebag + Vote Dumont
NP1 : Votes blancs et nuls + Abstention
GI2 : Vote Mitterrand
DI2 : Vote Giscard d'Estaing
NP2 : Votes blancs et nuls + Abstention

En 1981 :

GI1 : Vote Mitterrand + Vote Crépeau
DI1 : Vote Giscard + Vote Chirac + Vote Debré + Vote Garaud
GP1 : Vote Laguiller + Vote Marchais + Vote Bouchardeau
AT1 : Vote Lalonde
NP1 : Votes blancs et nuls + Abstention
GI2 : Vote Mitterrand
DI2 : Vote Giscard d'Estaing
NP2 : Votes blancs et nuls + Abstention

En 1988 :

GI1 : Vote Mitterrand
DI1 : Vote Barre + Vote Chirac
GP1 : Vote Lajoinie + Vote Juquin + Vote Laguiller + Vote Boussel
DP1 : Vote Le Pen
AT1 : Vote Waechter
NP1 : Votes blancs et nuls + Abstention
GI2 : Vote Mitterrand
DI2 : Vote Chirac
NP2 : Votes blancs et nuls + Abstention

Tableau 3.1 Statistiques élémentaires sur les tableaux de données

Scrutin 1969

(en %)	GI1	DI1	GP1	AT1	NP1	DI2	CN2	NP2
Moyenne	3,74	52,77	19,48	0,98	23,04	37,79	28,33	33,88
Écart-type	1,07	5,83	5,18	0,23	1,68	5,35	4,37	5,36

Scrutin 1974

(en %)	GI1	DI1	GP1	DP1	AT1	NP1	DI2	GI2	NP2
Moyenne	36,33	43,41	2,46	0,78	0,98	15,81	44,19	42,86	12,95
Écart-type	5,55	5,58	0,49	0,18	0,36	1,68	5,83	6,13	1,42

Scrutin 1981

(en %)	GI1	DI1	GP1	AT1	NP1	DI2	GI2	NP2
Moyenne	23,12	39,61	14,84	1,21	19,36	40,35	44,10	15,54
Écart-type	2,92	4,75	3,94	0,55	2,01	4,84	4,94	1,61

Scrutin 1988

(en %)	GI1	DI1	GP1	DP1	AT1	NP1	DI2	GI2	NP2
Moyenne	27,70	29,66	9,16	11,09	3,12	19,26	37,78	44,51	17,71
Écart-type	3,42	4,05	2,61	3,30	0,83	1,65	3,94	4,19	1,96

Tableau 3.2 *Matrice des coefficients RV*

Années	1969	1974	1981	1988
1969	1,000	0,571	0,576	0,490
1974	0,571	1,000	0,710	0,622
1981	0,576	0,710	1,000	0,746
1988	0,490	0,622	0,746	1,000

Tableau 3.3 *Valeurs propres de l'interstructure*

Axes	Valeurs propres	% d'inertie	% cumulé
1	2,87	71,66	71,66
2	0,54	13,53	85,19
3	0,36	9,04	94,24
4	0,23	5,76	100

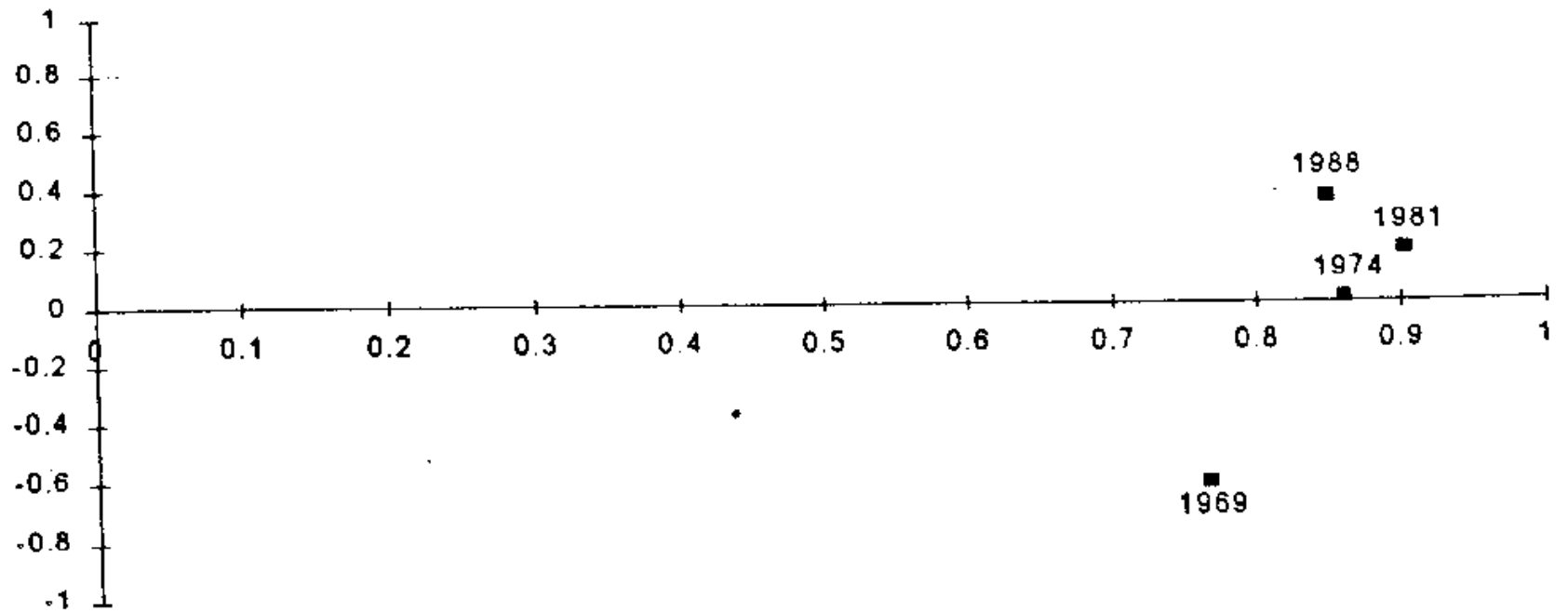


Fig. 3.10 Représentation de l'interstructure.

Intrastructure image représentative des points compromis

- **ACP de W_{co}**
- Les vecteurs propres de W_{co} associés aux deux plus grandes valeurs propres fournissent une image euclidienne des points compromis
 - Les coordonnées compromises sur l'axe i sont contenues dans le vecteur $\mathbf{c}_{CO,i}$:

$$\mathbf{c}_{CO,i} = \sqrt{\delta_i} \mathbf{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\delta_i}} \mathbf{W}_{co} \mathbf{v}_i$$

$i^{\text{ème}}$ valeur propre de \mathbf{W}_{co}

$i^{\text{ème}}$ vecteur propre de \mathbf{W}_{co}

Tableau 3.5 Valeurs propres de l'infrastructure

Axes	Valeurs propres	% d'inertie	% cumulé
1	0,753	31,68	31,68
2	0,480	20,19	51,88
3	0,257	10,81	62,68
4	0,208	8,74	71,42
5	0,166	6,97	78,39
6	0,106	4,44	82,83
7	0,097	4,07	86,90
8	0,074	3,12	90,02

Intrastructure : corrélation variables-compromis

- Chaque composante principale du compromis est un **vecteur à n dimension**, n étant le nombre d'individus des tableaux initiaux.
- Calcul de leurs **corrélations avec les variables initiales** des tableaux X_t
- Représentation des **cercles de corrélation**
- **Interprétation des axes pour expliquer les positions compromis des individus**

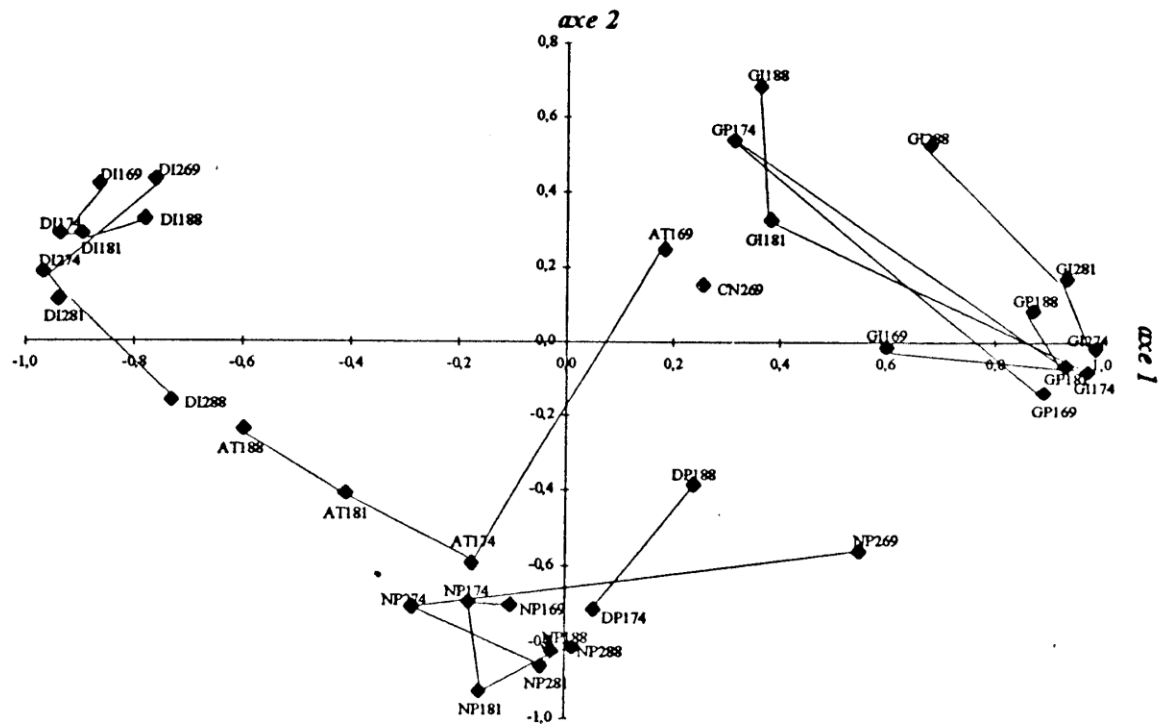


Fig. 3.11 Corrélations des variables dans le plan 1-2.

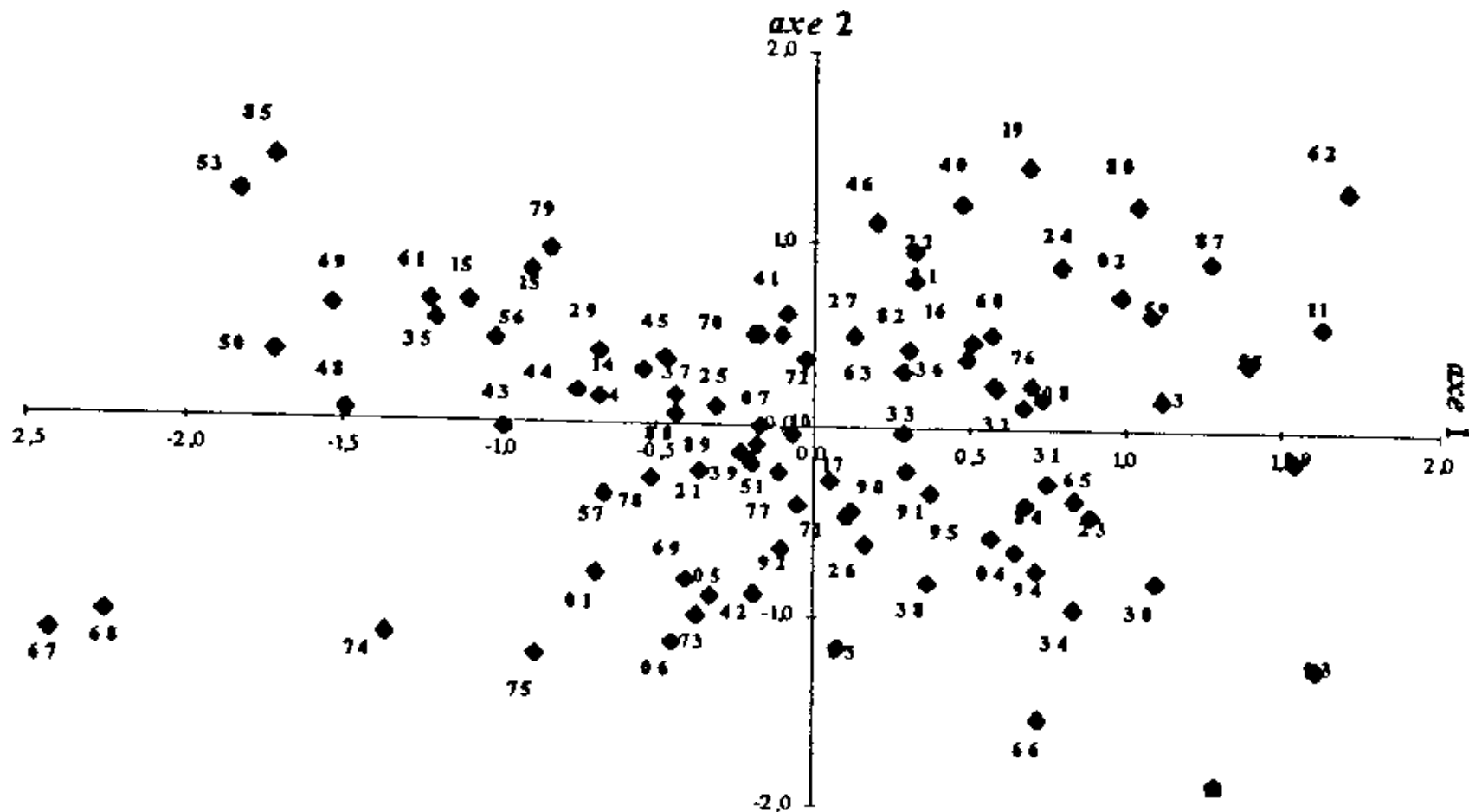
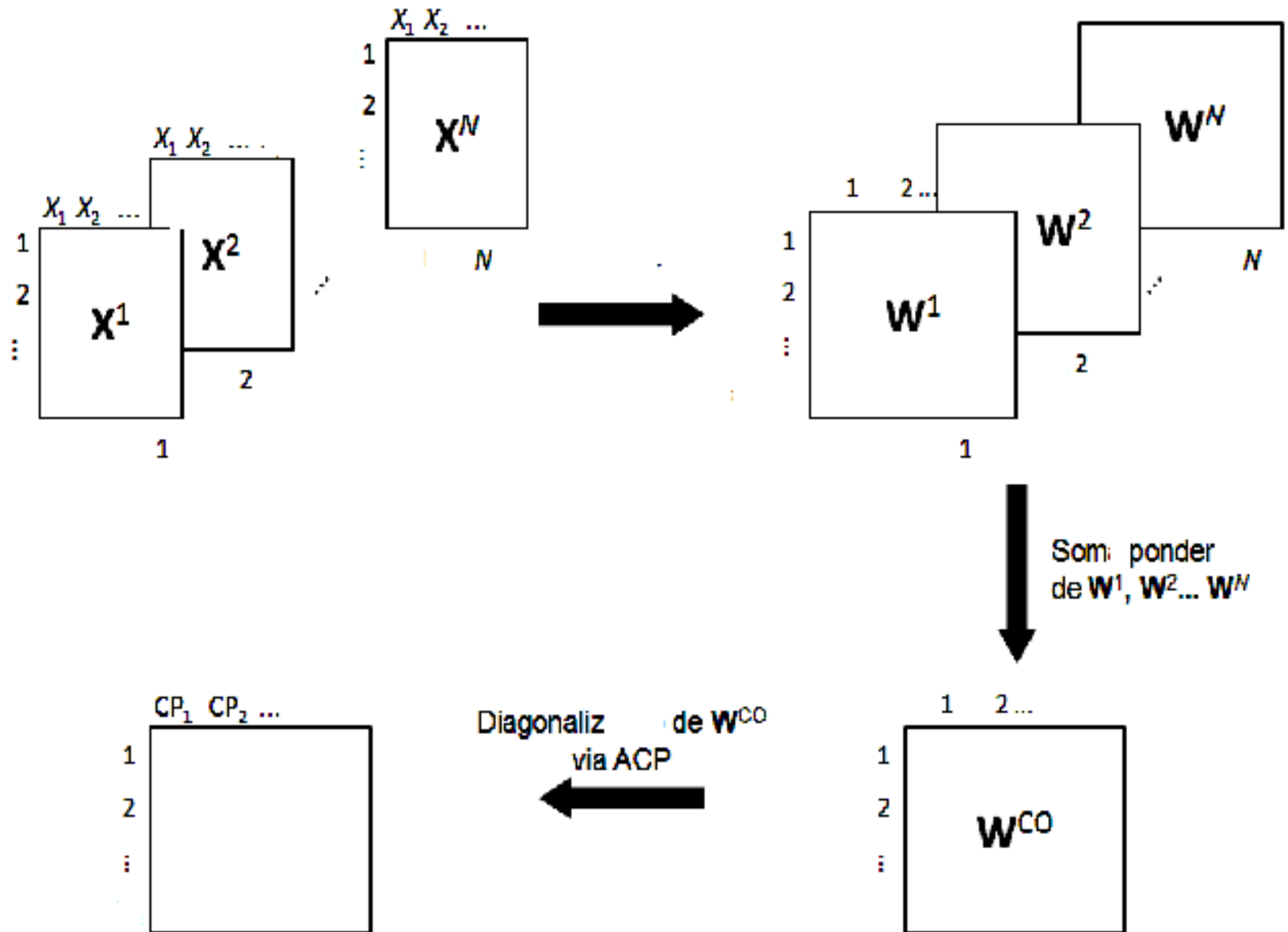


Fig. 3.13 Positions-compromis des individus dans le plan 1-2.

STATIS - Intrastructure



STATIS - Trajectoires des individus

- Méthode: technique des points supplémentaires:

Représentation sur l'image euclidienne compromis des N nuages des individus

$$\mathbf{c}_{CO\ t,i} = \frac{1}{\sqrt{\delta_i}} \mathbf{W}_t \mathbf{v}_i$$

- **Remarque** : $\mathbf{c}_{CO,i}$ est le "centre de gravité" des points $\mathbf{c}_{CO\ t,i}$

STATIS - Trajectoires des individus

- Objectif :

- Mise en évidence des écarts entre les W_t et avec le compromis au niveau individuel
- Détection des individus responsables des écarts entre tableaux

- Définition :

- On place les différentes positions d'un individu tel qu'il est décrit par chaque étude. Ces différentes positions définissent sa trajectoire

Interprétation des trajectoires

- Deux classes de trajectoires des individus :
 - **Peu étendue autour de sa position compromis** = individus dont l'évolution suit l'évolution moyenne, écart par rapport à la moyenne régulier d'un tableau à l'autre
 - **Trajectoire de grande amplitude** = changement de structure suivant les tableaux, différence avec l'évolution moyenne

Rque: si les axes du compromis sont bien corrélés avec les variables on pourra expliquer les axes par les variables et on interprètera de façon détaillée les trajectoires des individus

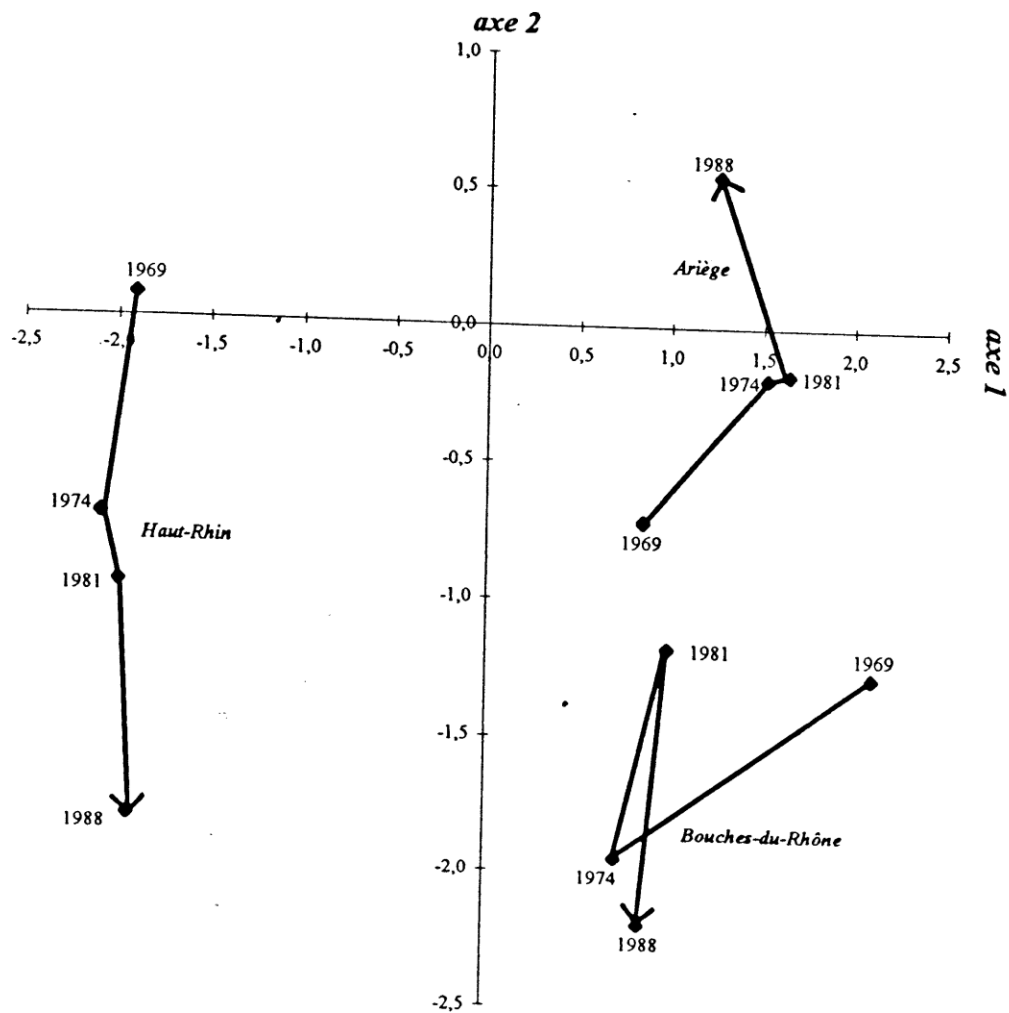
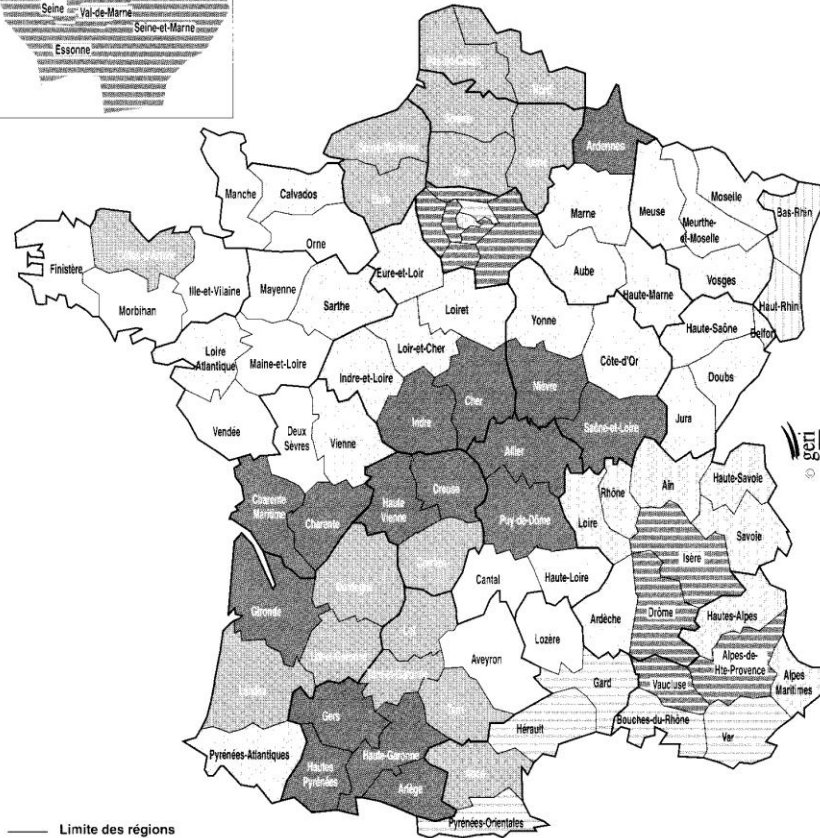
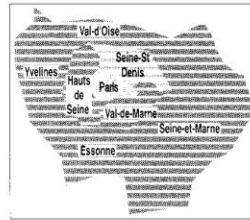


Fig. 3.15 Trajectoires de trois départements dans le plan 1-2.

Ile-de-France



	C1 : gauche (GP forte)		C2 : gauche évoluant vers DP et NP.		C3 : GP évoluant vers DP et NP.		C4 : opinion moyenne évoluant vers DP.
	C5 : DI forte avec percée de la DP.		C6 : opinion moyenne sur la période		C7 : DI sur la période		C8 : gauche sur la période

Détail des abréviations : C pour Classe ; DI pour Droite Institutionnelle ; DP pour Droite Protestataire ; GI pour Gauche Institutionnelle ; GP pour Gauche Protestataire ; NP pour Non Participation.

Base de données GERI- Source : Journal Officiel de la République Française

Carte 3.1 Traits dominants des choix électoraux
 Situation relative des départements sur la période
 pour les élections présidentielles de 1969, 1974, 1981 et 1988

4 . Méthode AFM

- Analyse **F**actorielle **M**ultiple (B.Escofier et J.Pagès)
- permet l'étude d'un ensemble d'individus décrits par plusieurs groupes de variables **quantitatives ou qualitatives:**
- Groupes = mesures à différents instants
sous tableaux d'un tableau
(issus d'un regroupement selon certains critères)

AFM : analyse factorielle multiple

- Comme STATIS:
 - Comparaison globale des groupes de variables: **interstructure**
 - Comparaison des nuages représentant le même ensemble d'individus: **intrastructure et image compromis**
 - Mais ici juxtaposition des tableaux avec :
- Idée de base = pondération des groupes de variables pour équilibrer leur influence dans l'analyse globale

AFM : analyse factorielle multiple

- Dans la juxtaposition des N tableaux,
 - * plus le nombre de variables est grand, plus le tableau aura une grande influence sur les résultats
 - * plus les variables d'un tableau sont liées (forte structure) plus ce tableau influence le compromis
- Une autre manière de pondérer les tableaux: égaliser les premières valeurs propres de chaque ACP

AFM

- Objet représentatif $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(t)}}} \mathbf{W}_t$
- Compromis $\sum_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(t)}}} \mathbf{W}_t$
- Intrastructure ACP de

$$\mathbf{X} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(1)}}} \mathbf{X}_1} \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(2)}}} \mathbf{X}_2} \dots \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(T)}}} \mathbf{X}_T}$$

Tableau 4.1 Les quatre premières valeurs propres des objets $W_i D$

Tableau 1969

Axes	Inertie	Pourcentage	Cumul
1	2,25	45,03	45,03
2	1,32	26,37	71,41
3	0,77	15,36	86,77
4	0,66	13,23	99,99

Tableau 1974

Axes	Inertie	Pourcentage	Cumul
1	2,16	35,96	35,96
2	1,63	27,24	63,20
3	1,04	17,40	80,64
4	0,67	11,16	91,80

Tableau 1981

Axes	Inertie	Pourcentage	Cumul
1	2,07	41,44	41,44
2	1,31	26,15	67,59
3	0,98	19,52	87,11
4	0,64	12,89	99,99

Tableau 1988

Axes	Inertie	Pourcentage	Cumul
1	2,16	35,96	35,96
2	1,79	19,79	65,76
3	0,95	15,85	81,61
4	0,71	11,82	93,42

*Tableau 4.2 Les 7 premières valeurs propres
de l'intrastructure de l'AFM*

Axes	Inertie	Pourcentage	Cumul
1	3,54	34,77	34,77
2	2,30	22,60	57,37
3	1,16	11,36	68,73
4	0,84	8,20	76,92
5	0,50	4,95	81,87
6	0,45	4,39	86,26
7	0,34	3,36	89,62

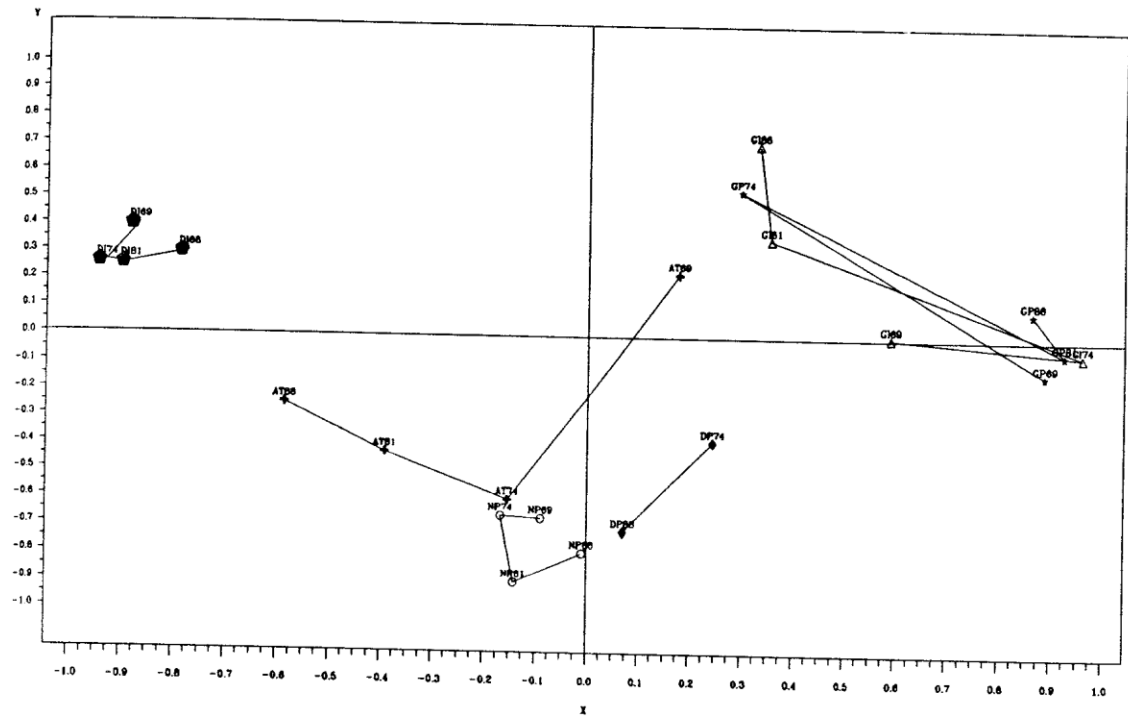


Fig. 4.4 Corrélations des variables dans le plan 1-2.

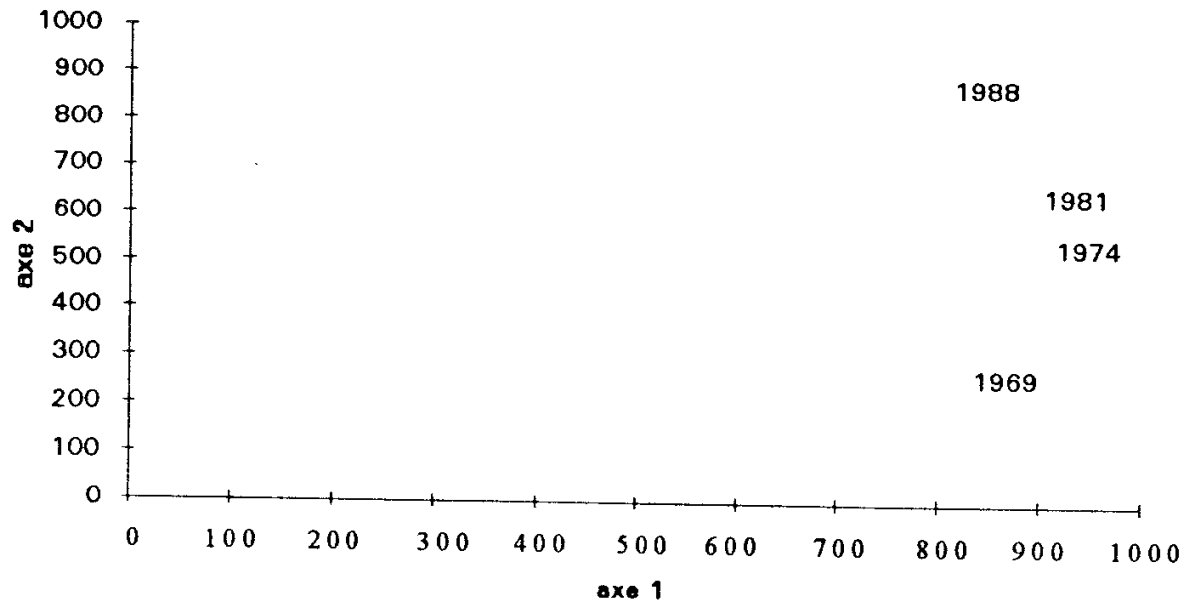


Fig. 4.6 Représentation de l'intrastructure de l'AFM dans le plan 1-2.

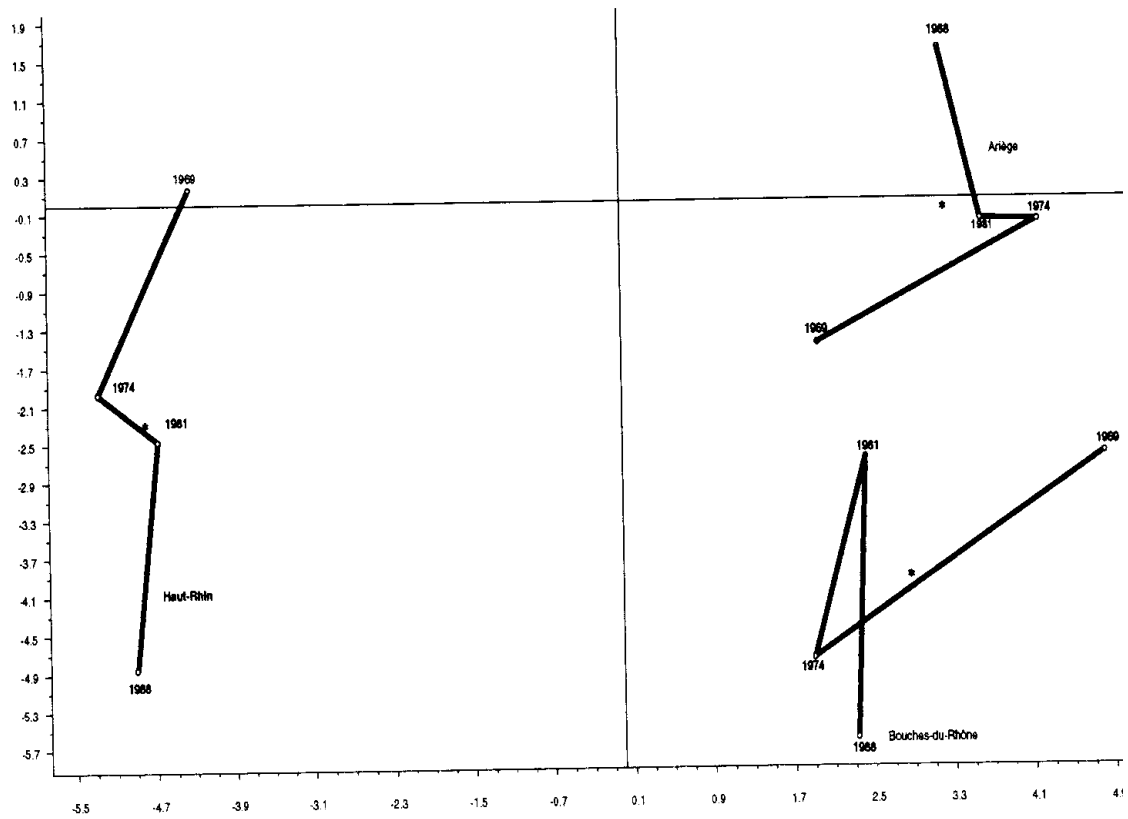


Fig. 4.9 Trajectoires issues de l'AFM.

1

Remarques et extensions

- La double ACP : T tableaux où les individus ne sont pas forcément les mêmes, mais variables identiques
- STATIS et AFM T tableaux avec des variables éventuellement différentes mais les mêmes individus
- STATIS duale pour comparer des matrices de variance

Références

- Bry, X. *Analyses factorielles multiples*, Economica, 1996
- Escofier, B., Pagès, J. *Analyses factorielles simples et multiples*, 4^{ème} édition, Dunod , 2008
- Kroonenberg, P., *Applied Multiway Data Analysis*, Wiley, 2008
- Lavit, C., *Analyse conjointe de tableaux quantitatifs*, Masson, 1998