ELEMENTS D'ANALYSE MULTIVARIEE ET SIMULATIONS - EXERCICES

Exercice 1

Soient X, Y et Z, 3 variables aléatoires réelles indépendantes gaussiennes centrées réduites (loi N(0, 1)). On définit les variables aléatoires U = X+Y+Z et V = X-Y.

Quelle est la loi du couple (U, V) ? Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?

Exercice 2

Soit $\mathbf{Z} \sim N_p(0, I_p)$ un vecteur aléatoire normal de dimension p et $\mathbf{Y} = A\mathbf{Z} + c$ une transformation linéaire de **Z** , où A est une matrice de dimension $dim(A) = k \times p$ et $c \in R^k$.

Montrez que $\mathbf{Y} \sim N_k(c, AA^t)$

Exercice 3

Soient 2 populations P_1 et P_2 bidimensionnelles normalement distribuées selon les lois suivantes :

$$P_1 \sim N_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}\right) \quad \text{et } P_2 \sim N_2\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

Tracer sommairement les ellipses d'isodensité correspondant à un niveau de probabilité 0.95.

On utilisera le fait que $P(\chi_2^2 < 6) = 0.95$

Exercice 4

On suppose que l'on dispose de n observations d'une loi normale $N(\mu;\sigma^2)$.

1) Donner les expressions de l'intervalle de confiance à 95% pour la moyenne et de l'intervalle de tolérance pour une valeur future dans le cas où l'écart type est connu.
2) Reprendre la question précédente en supposant que l'écart type est inconnu.

Exercice 5

On suppose un échantillon bivarié de moyenne $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de variance $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Donner les expressions des ellipsoïdes de confiance et de tolérance de probabilité 0,975 pour un échantillon de taille n = 50.

On utilisera le fait que $P(F_{2,48} < 4) = 0,975$.

Exercice 6 *Données infarctus.*

Tester l'égalité des moyennes des 2 groupes en utilisant les résultats fournis par SAS.

Exercice 7 *Simulation*

1- Calculer la période de la méthode de Lehmer lorsque m = 7, r_0 = 3 et a = 4.

2- A partir d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires, on obtient une variable aléatoire $R \sim U[0;1]$, comment obtenir une variable aléatoire $S \sim Cauchy$ en utilisant la méthode de l'anamorphose.

Rappel : La densité de probabilité d'une loi de Cauchy est : $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

3- On cherche à obtenir une variable aléatoire suivant une distribution de Poisson. Comment obtenir cette variable à partir de variables uniformes ?

Indices : On passera par une somme de lois exponentielles.

Exercice 8 *Le bootstrap*

On simule B échantillons bootstrap à partir d'un échantillon de distribution inconnue.

1- On veut créer un intervalle de confiance bootstrap basé sur les percentiles. Quelles bornes de la distribution bootstrap doit-on utiliser pour un intervalle de confiance à 90 % ?

2- Soit un échantillon (X_1,..,X_n) de données, θ un paramètre d'intérêt de distribution inconnue et T une statistique pour estimer ce paramètre. Décrire le processus afin d'estimer le biais, la variance, l'intervalle de confiance à 95% et la distribution d'échantillonnage de T par la méthode du bootstrap.