Corrigé des exercices

Exercice 1 :

On cherche la loi du couple (U,V), on a :

$$E(U) = E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 0$$

$$E(V) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0$$

et d'autre part,

$$\mathrm{var}(U) = \mathrm{var}(X+Y+Z) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + \mathrm{var}(Z) = 3$$

$$\mathrm{var}(V) = \mathrm{var}(X-Y) = E((X-Y)^2) - E\left(X-Y\right)^2 = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) = 2$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(U,V) &= E(UV) - E(U)E(V) = E((X+Y+Z)(X-Y)) \\ &= E(X^2) - E(Y^2) + E(XZ) - E(YZ) = \mathrm{var}(X) - \mathrm{var}(Y) = 0\end{aligned}$$

donc

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

Comme cette loi est normale alors comme les covariances sont nulles alors les variables U et V sont indépendantes.

Exercice 2 :

La combinaison linéaire d'une variable aléatoire multinormale est multinormale.

On a $E(Y) = E(AZ+c) = E(AZ) + c = AE(Z) + c$.
Pour la variance,

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{var}(AZ+c) = \mathrm{var}(AZ) \\ &= E((AZ)^2) = E(AZZ^T A^T) \\ &= AE(ZZ^T)A^T = A\,\mathrm{var}(Z)A^T \\ &= AI_p A^T = AA^T\end{aligned}$$

<u>Exercice 3 :</u>

Afin de trouver l'ellipsoïde d'isodensité, on utilise la distance de Mahalanobis, celle-ci suit une loi du χ_p^2 à p degré de liberté (p étant la dimension du vecteur traité, ici p=2). On calcule donc dans le premier cas :

$$D^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} (x\, y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$$

Comme $D^2 \sim \chi_2^2$, on veut $P(\mathbf{x} \in E_k) = 0{,}95 \Rightarrow P(x < \chi_2^2) = P(x < 6) = 0{,}95$, le k vaudra 6, on veut donc résoudre :

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2\sqrt{6}}\right)^2 = 1$$

Une ellipse de centre (0,0) et de rayon 2,45 sur les x et 4,9 sur les y.

De même pour $P_{2.}$

On obtient $\frac{(x-2)^2}{4} + (y-2)^2 = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{2\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$

Une ellipsoïde de centre (2,2) et de raton 4,9 sur les x et 2,45 sur les y.

<u>Exercice 4 :</u>

1) On a $\hat{\mu} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, on aura donc $\pi = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$, on utilise

$P(-u_{1-\alpha/2} \le \pi \le u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$

On obtient un IC : $\left[\hat{\mu} - 1{,}96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}; \hat{\mu} + 1{,}96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$

Pour l'intervalle de tolérance, on utilise la formule du cours. Dans le cas univarié, on connaît la variance, on trouve une transformation afin d'avoir une loi standard.
On a

$$x - g \sim N\left(0, \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\frac{x-g}{\sqrt{\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}} \sim N(0,1)$$

On a donc

$$P\left(-u_{1-\alpha/2} \leq \frac{x-g}{\sqrt{\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}} \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

L'intervalle de tolérance est tel que :

$$IC : \left[\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}; \bar{X} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]$$

2) Si la variance est inconnue, on utilise l'estimation de celle-ci :
$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2$, on a que

$$\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n-1}}} \sim T_{n-1}$$

La loi de Student ne dépend ni de µ ni de la variance. On utilise une loi de Student à n-1 degrés de liberté car elle est équivalente à un loi de Fisher à 1 et n-1 degrés de liberté.

On a donc un intervalle de confiance IC :

$$P\left(-t_{n-1}(\alpha/2) \leq \frac{\hat{\mu}-\mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n-1}}} \leq t_{n-1}(\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

$$IC : \left[\bar{X} - t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n-1}}; \bar{X} + t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n-1}}\right]$$

et un intervalle de tolérance :

$$P\left(-f_{1,n-1}(\alpha/2) \leq \frac{n}{n+1}\frac{(x-g)^2}{\hat{\sigma}^2} \leq f_{1,n-1}(\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

$$\left[g - \sqrt{\frac{n+1}{n}f_{1,n-1}(\alpha/2)\hat{\sigma}^2}; g + \sqrt{\frac{n+1}{n}f_{1,n-1}(\alpha/2)\hat{\sigma}^2}\right]$$

Exercice 5 :

Pour l'ellipsoïde de confiance de la moyenne, on utilise les formules du cours et on obtient donc :

$$\begin{pmatrix} 2-\mu_1 \\ 2-\mu_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2-\mu_1 \\ 2-\mu_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{50-2} F(2;50-2)$$

$$\Leftrightarrow (2-\mu_1)^2 + \frac{(2-\mu_2)^2}{4} = \frac{4}{48} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2-\mu_1}{1/\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{2-\mu_2}{\sqrt{2}/\sqrt{3}} \right)^2 = 1$$

Ellipsoïde de centre (2,2) et de rayon 0,408 sur les x et 0,816 sur les y.

Pour l'ellipsoïde de tolérance, on a donc :

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} = \frac{(50-1)2}{50-2} \frac{50+1}{50} F(2;50-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = \frac{4998}{2400} 4 \approx 8.33$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{\sqrt{8.33}} \right)^2 + \left(\frac{y-2}{2\sqrt{8.33}} \right)^2 = 1$$

Ellipsoïde de centre (2,2) et de rayon 2,88 sur les x et 5,77 sur les y.

Exercice 6 :

1- La période est de 3.

2- La densité de la loi de Cauchy est donnée par $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Sa fonction de répartition est donc donnée par : $F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(t)$ (on ajoute ½ afin de bien définir l'intervalle sur lequel la fonction est définie : $\left[-\pi/2 ; \pi/2\right]$). On utilise la méthode d'inversion, on obtient donc pour une variable aléatoire R de distribution uniforme sur [0; 1] :

$$x = F^{-1}(u) = \tan\left(\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Il suffit de simuler une variable uniforme et d'utiliser la transformation ci-dessus.

3- La loi de Poisson peut être reliée à la loi exponentielle. En effet, si des évènements surviennent à des dates séparées par des durées exponentielles de paramètre λ, le nombre d'évènements survenant en une unité de temps suit une loi de Poisson de même paramètre.
On simule des variables aléatoires $\{Y_1, Y_2 ...\}$ $i.i.d.$ $Y_i \sim \exp(\lambda)$ à partir de la loi uniforme en utilisant la fonction de répartition inverse et on définit :

$$X = \sum_{k \geq 0} k \cdot 1\{Z_k \leq 1 \leq Z_{k+1}\}$$

avec $Z_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i$

Il faut donc simuler des variables aléatoires exponentielles de paramètre λ et compter le nombre de simulations nécessaires pour dépasser 1, ou bien simuler des variables aléatoires exponentielles de paramètre 1 et compter le nombre de simulations nécessaires pour dépasser λ.

Exercice 7 :

1- On utilisera comme bornes 5% et 95%.

2- Algorithme à utiliser :

a. Tirer aléatoirement B échantillons de taille n avec remise dans (X_1,..,X_n). On tire donc des échantillons de distribution $F_n(X)$.

b. Calculer la statistique T^b pour chaque échantillon (b=1,…,B).

c. La distribution d'échantillonnage G(x) de T peut être approximé par la distribution empirique des des T^b :

$$G(x) \approx \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I\left(T^b \leq x\right)$$

d. Le biais, la variance et l'intervalle de confiance à 95% associés à T peuvent être approximés par :

$$Biais(T) \approx \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} T^b - \theta(F_n)$$

avec $\theta(F_n)$ paramètre calculé pour la distribution empirique.

$$Variance(T) \approx \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\left(T^b\right)^2 - \left(\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} T^b\right)^2$$

Recherche des percentiles α/2 et 1-α/2 de G(x). L'intervalle de confiance de type percentile de niveau 1-α est alors défini par :

$$IC(T) = \left[v \cdot {}^{\alpha}\!/_{2}, v \cdot \left(1 - {}^{\alpha}\!/_{2}\right)\right]$$