

CNAM

Département de Mathématiques

UV 18323 - STATISTIQUE B8

Enquêtes et sondages

TRAVAUX DIRIGÉS

Tome 1 : chapitres 1 à 4

Sylvie Rousseau

Année scolaire 2003 – 2004

Sommaire

- 1- Rappels de probabilités et de statistique inférentielle
- 2- Sondage aléatoire simple
- 3- Plans à probabilités inégales
- 4- Plans stratifiés
- 5- Plans par grappes et plans à plusieurs degrés
- 6- Méthodes de redressement ou de pondération

Calendrier des travaux dirigés

Le volume global des travaux dirigés est de 30 heures réparties à raison de 15 séances de 2 heures chacune. Elles se tiendront normalement de 18h30 à 20h30 aux dates suivantes:

- 1- Lundi 13 Octobre
- 2- Lundi 20 Octobre
- 3- Lundi 03 Novembre
- 4- Vendredi 14 Novembre
- 5- Lundi 17 Novembre
- 6- Lundi 24 Novembre
- 7- Lundi 01 Décembre
- 8- Lundi 08 Décembre
- 9- Lundi 15 Décembre
- 10- Lundi 05 Janvier
- 11- Lundi 12 Janvier
- 12- Lundi 19 Janvier
- 13- Lundi 26 Janvier
- 14- Lundi 02 Février
- 15- Lundi 09 Février

RAPPELS de PROBABILITÉS et de STATISTIQUE INFÉRENTIELLE

Exercice 1**Lecture d'abaques pour la loi normale**

Soit une variable aléatoire Z distribuée selon la loi normale centrée réduite, notée $N(0, 1)$. Utiliser les tables statistiques pour obtenir :

1. $P(Z > 1)$,
2. $P(-1,645 < Z < 1,645)$,
3. $P(-1,96 < Z < 1,96)$,
4. $P(-3,09 < Z < 3,09)$,
5. Les quantiles $z_{0,05}$ et $z_{0,95}$ d'ordre respectifs 5% et 95%.

Exercice 2**Contrôle qualité en usine n°1**

Le responsable qualité d'une usine contrôle 20 objets dans chaque lot de 1000 objets avant de le laisser partir vers le client. Il accepte seulement les lots pour lesquels il ne trouve aucun objet non conforme dans l'échantillon ; dans le cas contraire, le lot est trié unité par unité.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un lot contenant une proportion $p = 0,05$ d'objets non conformes soit accepté ?
2. Même question pour $p = 0,1$.
3. Le responsable qualité proclame partout qu'il produit du « zéro défaut » parce qu'il n'accepte aucun produit non conforme. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 3**Contrôle qualité en usine n°2**

Une usine fabrique des canettes de diamètre intérieur moyen de 50 mm avec un écart-type 0,8 mm. Le cahier des charges alloue des tolérances inférieure de 48 mm et supérieure à 52 mm. Dans le cas où ces tolérances ne sont pas respectées, la canette est déclarée non conforme.

1. En admettant que les diamètres sont distribués selon une loi normale, quelle est la proportion de canettes non conformes ?
2. On suppose que le processus de fabrication s'est dérégulé et produit désormais des canettes avec un diamètre d'espérance 49 mm. Quelle est dans ce cas la proportion de canettes non conformes ?

Exercice 4**Précision d'un appareil de mesure**

Préalable : soient X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

(i.i.d). On note la moyenne empirique $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer $E(\bar{X})$ et $V(\bar{X})$.

Un appareil de mesure possède une certaine précision définie comme l'écart type σ des mesures prises sur le même objet par le même opérateur. Dans l'optique de s'affranchir au mieux de cette erreur de mesure inhérente à l'appareil, on décide de mesurer n fois le même objet et de prendre la moyenne des résultats comme mesure finale de l'objet.

- Justifier statistiquement cette procédure.
- On décide de prendre l'écart type de la mesure finale comme indicateur de précision du procédé. Comment évolue la précision du procédé en fonction de n ?
- Combien de mesures faut-il prendre successivement pour que cette précision vaille 1 ?
- Pour choisir n , on décide de minimiser la fonction de coût suivante : $f(n) = a n + b \sigma / \sqrt{n}$ où
 - a désigne le coût comptable d'une mesure,
 - b le coût de l'imprécision de la mesure finale.Justifier cette fonction de coût et trouver la solution optimale.
Réaliser l'application numérique avec $\sigma = 4$, $a = 1$ € et $b = 10$ €.

Exercice 5

Analyse sensorielle

Deux brioches A et B assez semblables possèdent néanmoins des caractéristiques de fabrication distinctes. On souhaite estimer la proportion p de consommateurs capables de distinguer les deux produits. Pour cela, on choisit n personnes aléatoirement et on fait goûter à chacune 3 brioches : 2 de type A et 1 de type B , chacune devant ensuite se prononcer sur celle qui lui semble différente des autres.

- En appelant π la proportion de bonnes réponses, exprimer π en fonction de p .
- Donner la loi suivie par le nombre de bonnes réponses.
- Proposer un estimateur de π et de p . Calculer leur espérance et variance respectives.
- Si $p = 0$, autrement dit si personne n'est capable de distinguer les deux brioches, donner la valeur limite en dessous de laquelle doit se situer le nombre de bonnes réponses dans 90% des cas. On considèrera $n = 15$.
- On a obtenu 9 bonnes réponses parmi les 15 personnes interrogées. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 6

Distribution de la taille moyenne de joueurs de basket

On considère que la taille des joueurs de basket d'une ville donnée possède une distribution d'espérance 1,85 m et d'écart type 7 cm. On interroge de manière indépendante 35 joueurs choisis aléatoirement et on relève la taille de chacun.

- Quelle est la loi suivie par la moyenne des tailles des joueurs ?
- Calculer la probabilité pour que cette moyenne soit
 - supérieure à 1,90 m
 - inférieure à 1,82 m.

Exercice 7

Intervalles de confiance pour une moyenne et une variance

On a pesé sur pieds 10 bœufs de trois ans de la même race lors de leur arrivée à l'abattoir et on a obtenu les résultats suivants mesurés en kg : 775 ; 750 ; 755 ; 756 ; 761 ; 765 ; 770 ; 752 ; 760 et 767. On suppose que ces résultats sont issus d'une population infinie distribuée selon une loi normale de moyenne m et de variance σ^2 .

- Construire un intervalle de confiance pour m au niveau de confiance 95%.
- Construire un intervalle de confiance pour σ^2 au niveau de confiance 95%.

Exercice 8

Intervalle de confiance pour une proportion

On étudie une population animale dont certains membres sont albinos. On a extrait de cette population un échantillon de 40 animaux parmi lesquels on comptabilise 3 albinos.

- Construire un intervalle de confiance pour la proportion d'albinos au niveau de confiance 95%.
- Même question pour un échantillon de taille 400 avec 30 albinos. Commenter.

SONDAGE ALÉATOIRE SIMPLE

Exercice 1

Rappels de cours

L'exercice propose de démontrer des résultats présentés dans le cours et d'insister sur des techniques de raisonnement usuelles en sondage. Considérons qu'on veuille estimer le total et la moyenne d'une grandeur Y dans une population U de taille N . Pour cela, on procède à un sondage aléatoire simple sans remise de taille n et on note S l'échantillon aléatoire obtenu.

1. Combien y a-t-il d'échantillons possibles ? Quelle est la probabilité de tirer chacun d'entre eux ?
2. On considère un individu k quelconque dans U . Combien y a-t-il d'échantillons contenant cet individu ? En déduire la probabilité de tirage de k .
3. On note I_k la variable aléatoire valant 1 si k appartient à l'échantillon et 0 sinon.
 - a. Que vaut $E(I_k)$?
 - b. Comment peut-on réécrire $\sum_{k \in S} Y_k$ à partir des I_k ?
4. En déduire que : $\hat{t}_y = \frac{N}{n} \sum_{k \in S} Y_k$ estime sans biais le vrai total $t_y = \sum_{k \in U} Y_k$ et que $\hat{\bar{Y}} = \frac{1}{n} \sum_{k \in S} Y_k$ estime sans biais la vraie moyenne $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{k \in U} Y_k$.
5. Combien y a-t-il d'échantillons comprenant les individus identifiés k et l ? En déduire la probabilité de tirer ces deux individus conjointement. Que vaut alors $E(I_k I_l)$? En déduire $Cov(I_k, I_l)$.
6. On note $S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k \in U} (Y_k - \bar{Y})^2$ et $f = 1 - \frac{n}{N}$. A partir des résultats précédents, montrer que :
 - a. $Var(\hat{t}_y) = N(N-n) \frac{S_y^2}{n}$
 - b. $Var(\hat{\bar{Y}}) = (1-f) \frac{S_y^2}{n}$
7. Quel est l'intérêt du sondage sans remise par rapport au sondage avec remise ?
8. Montrer que $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k \in S} (Y_k - \hat{\bar{Y}})^2$ estime sans biais S_y^2 . En déduire des estimateurs sans biais de $Var(\hat{t}_y)$ et de $Var(\hat{\bar{Y}})$.

Exercice 2**Application directe du cours n°1**

L'exercice propose de retrouver sur un exemple les résultats de la théorie pour un sondage aléatoire simple sans remise de taille fixe. On considère pour cela tous les échantillons possibles de taille 2 pris dans une population de taille $N = 5$. On connaît par ailleurs les valeurs de la variable d'intérêt Y pour chaque unité de la population, à savoir respectivement : 8, 3, 11, 4 et 7.

1. Calculer la moyenne \bar{Y} et la dispersion S_Y^2 du caractère d'intérêt sur la population.
2. Lister tous les échantillons possibles de taille 2.
3. Pour chacun de ces échantillons, calculer l'estimateur $\hat{\bar{Y}}$ de la moyenne de la variable d'intérêt ainsi que l'estimateur de sa variance $\hat{V}(\hat{\bar{Y}})$.
4. Calculer la variance $V(\hat{\bar{Y}})$.
5. Vérifier que $\hat{\bar{Y}}$ estime sans biais la vraie moyenne.
6. Vérifier que $V(\hat{\bar{Y}})$ coïncide avec la formule de la variance donnée par la théorie.
7. Vérifier que $\hat{V}(\hat{\bar{Y}})$ estime sans biais la vraie variance $V(\hat{\bar{Y}})$.

Exercice 3**Application directe du cours n°2**

On considère une population $U = \{1,2,3\}$, sur laquelle on définit le plan de sondage suivant :

$$p(\{1,2\}) = \frac{1}{2}, p(\{1,3\}) = \frac{1}{4}, p(\{2,3\}) = \frac{1}{4}$$

Y est une variable définie sur U , telle que : $Y_1 = Y_2 = 3, Y_3 = 6$ dont on veut estimer le total t_y .

1. Calculer les probabilités d'inclusion simple π_k et double π_{kl} .
2. Donner la distribution de probabilité de l'estimateur de Horvitz-Thompson $\hat{t}_{Y\pi}$ du total. Calculer la variance de cet estimateur.
3. Donner la distribution de probabilité d'un estimateur de variance de $\hat{t}_{Y\pi}$ (il est conseillé de choisir l'estimateur le plus simple à calculer). On pourra vérifier que cet estimateur est sans biais.

Exercice 4**Estimation d'une retombée touristique**

(d'après A-M. Dussaix et J-M. Grosbras, Exercices de sondage, Economica, 1992)

145 ménages de touristes séjournant en France dans une région donnée ont dépensé 830 € en moyenne par jour. L'écart type estimé de leurs dépenses s'élève à 210 €. Sachant que 50 000 ménages de touristes ont visité la région où a été effectuée l'enquête, que peut-on dire de la dépense totale journalière de l'ensemble de ces ménages ? On supposera pour cela que l'échantillon est issu d'un plan aléatoire simple à probabilités égales.

Exercice 5 **Estimation de la surface agricole utile d'un canton**
(d'après P.Ardilly et Y.Tillé, Exercices corrigés de méthode de sondage, Ellipses, 2003)

On veut estimer la surface moyenne cultivée dans les fermes d'un canton rural. Sur 2010 fermes que comprend ce canton, on en tire 100 par sondage aléatoire simple. On mesure Y_k la surface cultivée par la ferme k en hectares et on trouve :

$$\sum_{k \in S} Y_k = 2907 \text{ ha} \text{ et } \sum_{k \in S} Y_k^2 = 154\,593 \text{ ha}^2$$

1. Donner la valeur de l'estimateur sans biais classique de la moyenne $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{k \in U} Y_k$.
2. Donner un intervalle de confiance à 95% pour \bar{Y} .

Exercice 6 **Taille d'échantillon pour un sondage d'opinion**
(d'après A-M. Dussaix et J-M. Grosbras, Exercices de sondage, Economica, 1992)

Un sondage sur la popularité d'une personnalité politique lui accorde un pourcentage $\hat{p} = 30\%$ d'opinions favorables. En admettant qu'il s'agisse d'un sondage aléatoire simple sans remise, combien de personnes ont-elles été interrogées pour que l'on puisse dire avec un degré de confiance de 95% que la vraie proportion d'opinions favorables dans la population ne s'écarte pas de \hat{p} de plus de deux points ?

Exercice 7 **Taille d'échantillon pour une proportion**
(d'après P.Ardilly et Y.Tillé, Exercices corrigés de méthode de sondage, Ellipses, 2003)

On s'intéresse à l'estimation de la proportion P d'individus atteints par une maladie professionnelle dans une entreprise de 1500 travailleurs. On sait par ailleurs que trois travailleurs sur dix sont ordinairement touchés par cette maladie dans des entreprises du même type. On se propose de sélectionner un échantillon au moyen d'un sondage aléatoire simple.

1. Quelle taille d'échantillon faut-il sélectionner pour que la longueur totale d'un intervalle de confiance avec un niveau de confiance 0,95 soit inférieure à 0,02 pour un plan simple :
 - a. avec remise ?
 - b. sans remise ?
2. Que faire dans le cas du plan sans remise si on ne connaît pas la proportion d'hommes habituellement touchés par la maladie ?

Exercice 8 **Nombre d'espaces de stationnement à prévoir**
(d'après A-M. Dussaix et J-M. Grosbras, Exercices de sondage, Economica, 1992)

Une entreprise de promotion immobilière désire estimer le nombre d'espaces de stationnement requis pour une nouvelle tour devant abriter des bureaux. Elle décide de procéder à un sondage aléatoire simple sans remise. Elle sait que le nouveau bâtiment abritera 5 000 personnes et que, dans des entreprises de même type que celles devant emménager dans les futurs locaux, la proportion de personnes se rendant à leur bureau en utilisant les moyens de transport en commun est toujours supérieure à 75%. Quelle doit être la taille de l'échantillon pris au sein des futurs occupants potentiels des bureaux pour pouvoir estimer le nombre d'espaces de stationnement à prévoir avec une marge d'erreur symétrique d'au plus 150 places au niveau de confiance 90% ?

Exercice 9 **Application au marketing direct**
(d'après A-M. Dussaix et J-M. Grosbras, Exercices de sondage, Economica, 1992)

Les sondages sont très largement utilisés dans le marketing direct : il arrive souvent que l'on estime par sondage le rendement d'un fichier donné, ou que l'on souhaite comparer les rendements de plusieurs fichiers, ou encore, que disposant de plusieurs fichiers, on souhaite estimer par sondage le rendement global de l'ensemble de ces fichiers. Dans cet exercice, on suppose l'existence d'un fichier de $N = 200\ 000$ adresses. On note p le rendement inconnu du fichier à une offre d'abonnement à prix réduit avec calculatrice offerte en prime ; c'est donc la proportion d'individus qui s'abonneraient si l'offre était offerte à tous les individus du fichier. Selon l'usage \hat{p} est l'estimation de p obtenue à partir d'un test fait sur un échantillon de n adresses choisies à probabilités égales et sans remise sur le fichier.

1. On sait par expérience que les rendements à ce type d'offre sur ce fichier ne dépassent pas généralement 3%. Quelle taille d'échantillon doit-on prendre pour estimer p avec une précision absolue de 0,5 % (ou 0,5 points) et un degré de confiance de 95%
2. Mêmes questions pour une précision de 0,3% et 0,1%.
3. Le test a porté sur 10 000 adresses et on a noté 230 abonnements. En déduire l'intervalle de confiance bilatéral à 95% pour le rendement p ainsi que le pour le nombre total d'abonnements si la même offre était faite sur l'ensemble du fichier.

Rappel : on appelle **précision absolue** au niveau de confiance $1-\alpha$ la quantité $t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V(\hat{p})}$ où $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

est la fractile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.

Exercice 10 **Nombre de signataires d'une pétition**
(Extrait de Cochran, Sampling Technics)

On a collecté des signatures pour une pétition sur 676 feuilles. Sur chacune d'entre elles, il y a la place pour 42 signatures, mais beaucoup ne sont pas très remplies. Le nombre de signatures par feuille a été étudié sur un échantillon de 50 feuilles (à peu près 7% de l'ensemble donc). A partir des résultats sont consignés dans le tableau ci-contre, estimer le nombre total de signatures et donner un intervalle de confiance pour ce nombre à 95% et à 80% .

Nombre de signatures	Fréquence
42	23
41	4
36	1
32	1
29	1
27	2
23	1
19	1
16	2
15	2
14	1
11	1
10	1
9	1
7	1
6	3
5	2
4	1
3	1

Remarque : le décompte complet des signatures a montré qu'il y en avait 21 045 !

Exercice 11

Taux d'équipement des ménages

On a effectué un sondage aléatoire simple de taille 1000 auprès de 22 millions de ménages résidant en France métropolitaine. On estime le taux d'équipement des ménages en lave-vaisselle à 54% et celui en micro-ordinateur à 11%.

1. Calculer pour chaque équipement une estimation de la précision absolue et de la précision relative.
2. Les taux d'équipement en lave-vaisselle sont également estimés selon la catégorie socioprofessionnelle des chefs de ménage. On trouve en particulier que pour les professions libérales, artisans et commerçants - qui constituent 10% de l'échantillon - le taux d'équipement est estimé à 70% tandis que pour les agriculteurs - 6% de l'échantillon - l'estimation vaut 25%. Comparer les précisions relatives du taux d'équipement pour ces 2 catégories professionnelles.

Rappel : on appelle **précision absolue** au niveau de confiance $1-\alpha$ la quantité $t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V(\hat{p})}$ où $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

est le fractile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite. La **précision relative** au niveau de

confiance $1-\alpha$ est $t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{V(\hat{p})}}{p}$

Exercice 12

Un cas d'enquête répétée

(d'après P.Ardilly et Y.Tillé, *Exercices corrigés de méthode de sondage, Ellipses, 2003*)

On considère une population de 10 stations-services et on s'intéresse au prix du litre de supercarburant que chacune d'entre elles affiche. Plus exactement, sur deux mois consécutifs, mai et juin, les données de prix figurent dans le tableau ci-dessous :

Prix du litre de supercarburant

Station	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mai	5,82	5,33	5,76	5,98	6,20	5,89	5,68	5,55	5,69	5,81
Juin	5,89	5,34	5,92	6,05	6,20	6,00	5,79	5,63	5,78	5,84

On veut estimer l'évolution du prix moyen du litre entre mai et juin. On choisit, comme indicateur de cette évolution la différence des prix moyens On propose deux méthodes concurrentes:

- **Méthode 1** : on échantillonne n stations ($n < 10$) en mai et n stations en juin, les deux échantillons étant totalement indépendants ;
- **Méthode 2** : on échantillonne n stations en mai, et on interroge de nouveau ces stations en juin (technique de *panel*).

1. Comparer l'efficacité des deux méthodes.
2. Même question si on souhaite cette fois estimer un prix moyen sur la période globale mai-juin.

3. Si on s'intéresse au prix moyen de la question 2, ne vaut-il pas mieux tirer, non pas 2 fois 10 relevés avec la méthode 1. (10 chaque mois) mais directement 20 relevés sans se soucier des mois (méthode 3.) ? Aucun calcul n'est nécessaire.

Exercice 13

Protection de l'anonymat

Pour préserver l'anonymat dans certaines enquêtes par sondage, le procédé suivant peut être suivi. Admettons que l'on veuille estimer la proportion de personnes qui remplissent leur déclaration fiscale de manière honnête. On demande alors à chaque personne interrogée de se retirer dans une pièce isolée, et de jouer à pile ou face.

- si elle obtient « pile » alors elle doit répondre honnêtement par « oui » ou « non » à la question « Votre déclaration fiscale est-elle honnête ? »
- si elle obtient « face », elle devra lancer la pièce une nouvelle fois et répondre par « oui » ou « non » à la question « Avez-vous obtenu « face » au deuxième tirage ? ».

Grâce à ce procédé, il est impossible à l'enquêteur de savoir à quelle question se rapporte la réponse de la personne interrogée, celle-ci peut donc fournir sans crainte une réponse sincère.

1. On note p la proportion inconnue de déclarations fiscales remplies honnêtement dans la population et π la proportion de réponses « oui ». Montrer que $\pi = p/2 + 1/4$.
2. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses « oui » dans une enquête auprès de n personnes. Quelle est la loi de X ? Donner un estimateur de π et un estimateur de p . Calculer leur espérance et variance respectives.
3. En déduire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour p . On utilisera l'approximation normale de la loi binomiale.
4. Application numérique avec $n = 1000$ et 600 réponses affirmatives. Donner une estimation de p et un intervalle de confiance pour p au niveau 95%. Quel est le prix payé pour la confidentialité ?

Exercice 14

Algorithme de tirage bernoullien

On considère une population U de 1000 individus composée de trois sous-populations disjointes U_1, U_2, U_3 de tailles respectives $N_1 = 600, N_2 = 300, N_3 = 100$. On va échantillonner dans cette population au moyen de tirage bernoullien : cette méthode consiste à choisir une probabilité d'inclusion commune π , puis à simuler sur la population une variable aléatoire distribuée selon une loi uniforme sur $[0,1]$ et à sélectionner les individus pour lesquels la réalisation de cette variable est inférieure à π .

1. On décide dans un premier temps de tirer un échantillon dans U en utilisant le plan de sondage suivant :
 - dans la sous-population U_1 , on réalise un tirage bernoullien, tel que chaque élément k a la probabilité $\pi_k = 0.1$ d'être sélectionné,
 - dans la sous-population U_2 , on réalise un tirage bernoullien, tel que chaque élément k a la probabilité $\pi_k = 0.2$ d'être sélectionné,

- dans la sous-population U_3 , on réalise un tirage bernoullien, tel que chaque élément k a la probabilité $\pi_k = 0.8$ d'être sélectionné,
- l'échantillon complet est constitué de la réunion des trois sous-échantillons ainsi obtenus.

Calculer l'espérance et la variance de la taille n_s de l'échantillon.

2. On réalise maintenant un tirage bernoullien directement dans U , tel que chaque élément a la probabilité π d'être sélectionné.
 - a. Déterminer π pour que l'espérance de la taille de l'échantillon, sous ce plan de sondage, soit égale à l'espérance de la taille de l'échantillon calculée à la question précédente.
 - b. Calculer alors la variance de la taille de l'échantillon, et comparer cette variance à celle de la question précédente.

Exercice 15

Algorithme du tri aléatoire

On veut estimer le poids moyen de 10 éléphants d'un cirque. Pour cela, on réalise un sondage aléatoire simple sans remise de taille 5 à l'aide d'un tri aléatoire. On simule donc une variable aléatoire uniforme $U \sim U[0,1]$ sur la population des éléphants, puis on trie les réalisations obtenues par ordre croissant (ou décroissant) et on retient l'échantillon correspondant aux 5 plus grandes valeurs (ou plus petites). La simulation a été effectuée à partir de la fonction $ALEA()$ sous Excel et a donné les réalisations ci-dessous :

Numéro de l'éléphant	Valeur générée
1	0,84
2	0,12
3	0,36
4	0,60
5	0,68
6	0,11
7	0,87
8	0,44
9	0,21
10	0,77

1. Quel est l'échantillon tiré ?
2. On pèse les éléphants retenus et on obtient en tonnes les poids respectifs suivants : 3,65 ; 3,17 ; 4,18 ; 3,55 et 4,26.
3. Donnez un estimateur du poids moyen des éléphants puis un intervalle de confiance à 95% de ce poids moyen.
4. Finalement, on réalise une pesée exhaustive des éléphants. On obtient un poids moyen de 3,45 tonnes. Que dire de l'intervalle de confiance précédent ? D'où peut venir le problème ?

Exercice 16 **Tendance linéaire et tirage systématique**
(d'après J-M. Grosbras, Méthodes statistiques des sondages, Economica, 1987)

On considère une population de taille N avec $N = nk$ où n est la taille souhaitée de l'échantillon et k un nombre entier. On suppose que pour tout individu k de la population, on a $Y_k = k$ pour $k = 1$ à N .

1. On note respectivement \bar{Y} et S_Y^2 la moyenne et la dispersion du caractère d'intérêt sur la population. Vérifier que $\bar{Y} = \frac{N+1}{2}$ et $S_Y^2 = \frac{N(N+1)}{12}$.
2. On réalise un sondage aléatoire simple sans remise de taille n .
 - a. Quel est l'estimateur classique \hat{Y} de la moyenne ?
 - b. Montrer que sa variance vaut : $V(\hat{Y}) = \frac{(k-1)(N+1)}{12}$.
3. On réalise à présent un tirage systématique de taille n : on tire un nombre a au hasard entre 1 et k et on forme un échantillon de taille voulue avec les unités $a, a+k, a+2k, \dots, a+(n-1)k$. Soit \hat{Y}_{sys} la moyenne des unités sélectionnées dans l'échantillon. Montrer que : $E(\hat{Y}_{sys}) = \bar{Y}$ et que $V(\hat{Y}_{sys}) = \frac{k^2-1}{12}$.
4. Comparer $V(\hat{Y})$ et $V(\hat{Y}_{sys})$ et commenter

Exercice 17 **Algorithme de « sélection-rejet »**

La méthode de sélection-rejet permet d'obtenir un échantillon de taille n en une seule lecture du fichier. L'algorithme est le suivant :

- On initialise à 0 les compteurs k et j renseignant respectivement le nombre d'unités du fichier déjà examinées et le nombre d'unités déjà sélectionnées dans l'échantillon. On se positionne sur le premier individu du fichier.
 - Tant que j est strictement inférieur à la taille d'échantillon voulue, on a généré un nombre aléatoire u selon une loi uniforme sur $[0,1[$ pour l'individu de rang $k+1$ sur lequel on est positionné et on décide :
 - o Si on obtient $u < \frac{n-j}{N-k}$, alors on sélectionne l'unité de rang $k+1$. On incrémente donc j d'une unité, puis on passe à l'individu suivant en incrémentant k .
 - o Sinon, l'unité $k+1$ n'est pas tirée et on passe à l'individu suivant en incrémentant k .
1. Montrer qu'il suffit effectivement donc d'au plus N opérations pour sélectionner n unités et que les probabilités d'inclusion individuelles sont bien respectées : $\pi_k = \frac{n}{N}, \forall k \in U$.

2. Application : sélectionner un échantillon de taille 4 dans une population de taille 10 selon cette méthode en utilisant les réalisations suivantes d'une variable aléatoire U uniforme sur $[0,1[$:

Individu k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_k	0.375489	0.62004	0.517951	0.0454450	0.632912	0.246090	0.927398	0.32595	0.645951	0.178048

PLANS à PROBABILITÉS INÉGALES

Exercice 1**Rappels de cours sur l'estimateur d'Horvitz-Thomson**

Etudier l'espérance et la variance de l'estimateur d'Horvitz-Thomson (ou « π -estimateur » ou encore

« estimateur des valeurs dilatées ») du total donné par $\sum_{k \in S} \frac{Y_k}{\pi_k}$.

Exercice 2**Tirage systématique de ménages**

Une population est composée de 6 ménages. Le tableau suivant donne la taille des ménages (i.e. le nombre de personnes du ménage), et le nombre de visites reçues par chaque ménage une semaine donnée. On tire un échantillon de 3 ménages sans remise, avec des probabilités proportionnelles à la taille du ménage.

Ménage	A	B	C	D	E	F
Taille	2	4	3	1	2	9
Visites	1	2	3	4	5	6

1. Donner, sous forme fractionnaire, les probabilités d'inclusion des 6 ménages (on pourra être amené à recalculer certaines probabilités).
2. Réaliser le tirage par une méthode systématique, en conservant l'ordre des ménages ci-dessus (en utilisant n'importe quel générateur de nombres aléatoires : calculatrice, logiciel, cerveau humain...).
3. A partir de l'échantillon obtenu, donner une estimation de la taille moyenne des ménages. Le résultat était-il prévisible ? Donner une estimation du nombre total de visites dans la population.
4. Lister les 4 échantillons possibles que l'on peut obtenir avec un tirage systématique, et indiquer les probabilités de tirage de chacun d'eux. Vérifier que l'estimateur du nombre total de visites est sans biais.
5. Calculer la matrice des probabilités d'inclusion d'ordre 2 ? Commenter.

Exercice 3**Tirage systématique d'entreprises**

(d'après P.Ardilly et Y.Tillé, Exercices corrigés de méthode de sondage, Ellipses, 2003)

On a répertorié dans une petite municipalité 6 entreprises dont les chiffres d'affaires (variable X_k) valent respectivement 40, 10, 8, 1, 0.5 et 0.5 millions d'euros. Dans le but d'estimer l'emploi salarié total, sélectionner trois entreprises au hasard et sans remise à probabilités inégales selon le chiffre d'affaires par la méthode du tirage systématique en justifiant votre démarche. Pour ce faire, on utilisera la réalisation suivante d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$: 0,83021. Que se passe-t-il si l'ordre du fichier est modifié ?

Exercice 4

Tirage de Poisson

(d'après P.Ardilly et Y.Tillé, Exercices corrigés de méthode de sondage, Ellipses, 2003)

Lorsqu'on effectue des tirages à probabilités inégales, on utilise en général des méthodes d'échantillonnage de taille fixe. Il existe cependant des algorithmes très simples permettant des tirages à probabilités inégales mais conférant à l'échantillon une taille variable. On s'intéresse ici au tirage de Poisson dont le principe consiste à effectuer une loterie sur chaque individu de la population indépendamment d'un individu à l'autre. Ainsi, pour une population de taille N où les probabilités d'inclusion individuelles π_k sont connues pour tout k , on simule N aléas indépendants dans la loi uniforme sur $[0, 1]$ et on retient l'individu k si et seulement si $u_k \leq \pi_k$

1. Vérifier que l'algorithme de tirage respecte les probabilités d'inclusion d'ordre 1 en calculant la probabilité pour que l'individu k soit sélectionné.
2. La taille de l'échantillon est une variable aléatoire notée n_S .
 - a. Ecrire n_S en fonction des variables indicatrices de Cornfield.
 - b. Que vaut l'espérance et la variance de n_S ?
 - c. Quelle est la probabilité pour que l'échantillon ait une taille au moins égale à 1 ?

On supposera dans la suite que l'échantillon a une taille au moins égale à 1.

3. On utilise l'estimateur du total $\hat{Y} = \sum_{k \in S} \frac{Y_k}{\pi_k}$ où S désigne l'échantillon aléatoire obtenu à l'issue des N loteries.
 - a. Vérifier que \hat{Y} estime le vrai total sans biais.
 - b. Quelle est la variance de \hat{Y} ? Comment peut-on l'estimer sans biais ?
 - c. Que valent les probabilités d'inclusion d'ordre 2 ?
4. Comparer à un plan général de taille fixe n de mêmes probabilités d'inclusion. Quelles sont les inconvénients d'un plan de taille non-fixe ?

Exercice 5

Sur-échantillonnage

On étudie une population de 40 millions d'individus où les CSP⁺ (catégories socioprofessionnelles « supérieures ») représentent 20% de l'ensemble. La taille de l'échantillon est limitée budgétairement à $n = 2000$ individus. On souhaite disposer d'un sous-échantillon de CSP⁺ de taille 600 (on parle de sur-échantillonnage de cette population dans ce cas où la proportion sur échantillon dépasse sa véritable part dans la population).

1. Donner les probabilités d'inclusion d'une personne CSP⁺ et d'un individu d'une autre CSP. Observer le ratio de ces probabilités.
2. Quelles sont les pondérations à appliquer aux valeurs individuelles pour pouvoir utiliser les formules usuelles du sondage aléatoire simple ?
3. Chez les CSP⁺, on a trouvé 33% de lecteurs réguliers d'un quotidien contre 21% parmi les autres CSP. Estimer la proportion globale de lecteurs réguliers.

Exercice 6**Fréquentation des lignes aériennes intérieures**

On souhaite connaître sur une période d'un an la fréquence avec laquelle les Français voyagent par avion sur des lignes intérieures. Pour cela, on a interrogé un échantillon en tirant des numéros de téléphone au hasard, puis dans chaque ménage sélectionné, on a retenu au hasard une personne, quel que soit son âge, à qui on a demandé si elle a pris une ligne aérienne intérieure au cours des 12 derniers mois. Le tableau suivant donne la distribution des ménages France entière selon leur taille (la taille d'un ménage est le nombre de personnes le composant) ainsi que les réponses obtenues parmi les 9 864 ménages répondants de même taille. Estimer le nombre total de personnes ayant pris l'avion au cours des 12 derniers mois à l'aide de ces informations.

Taille du ménage	Répartition France	Nombre de personnes ayant pris l'avion
1	31,7%	1365
2	27,7%	1092(*)
3	17,3%	785
4	14,7%	468
5 et plus	8,6%	195
Ensemble	100%	3905

(*) parmi les ménages répondants de taille 2, 1092 individus ont déclaré avoir pris l'avion sur la période considérée. En France, 27,7% des ménages sont de taille 2.

Exercice 7**Volume d'archives**

On désire estimer à l'échelle d'un canton le nombre de kilomètres linéaires d'archives stockées dans les mairies. Pour cela, on procède à un tirage de 4 communes parmi les 9 du canton, proportionnellement à leur population. Les communes sont listées ci-dessous avec leur nombre d'habitants :

Numéro de commune	Nom de la commune	Population
1	Val le Grand	1100
2	Les Gries	650
3	Les Combres	500
4	Flins	2300
5	Villers le Lac	4000
6	Fortin	5500
7	Montlebon	1900
8	Sanzeau	200
9	Aumont	150

1. Donner les probabilités d'inclusion de chacune des communes.

Le tirage a donné les résultats suivants :

Numéro de commune	Nom de la commune	Mètres d'archives
2	Les Gries	17
4	Flins	38
5	Villers le Lac	55
6	Fortin	70

2. Estimer le métrage total des archives du canton.

PLANS STRATIFIES

Exercice 1

Rappels de cours

Dans une population de taille N partitionnée en H strates, on sélectionne un échantillon de taille n suivant un plan stratifié. Dans chaque strate h , on tire n_h individus parmi N_h selon un sondage aléatoire simple sans remise de taille fixe.

Préalable : montrer la formule de décomposition de la variance :

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{k \in U} (Y_k - \bar{Y})^2 = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^H N_h \sigma_{yh}^2 + \frac{1}{N} \sum_{h=1}^H N_h (\bar{Y}_h - \bar{Y})^2$$

- 1) Pour une variable d'intérêt Y , donner les estimateurs du total t_Y et de la moyenne.
- 2) Montrer que ces deux estimateurs sont sans biais et calculer leur variance.
- 3) On considère l'allocation proportionnelle de l'échantillon : on décide de tirer dans chaque strate h un nombre d'individus n_h tel que : $\frac{n_h}{N_h} = \frac{n}{N}$ (en supposant que $N_h \frac{n}{N}$ soit entier).
 - a. Comment s'écrivent alors les estimateurs du total et de la moyenne ?
 - b. Que vaut leur variance ?
 - c. Montrer alors, que si on suppose : $\sigma_y^2 \approx S_y^2$ et $\sigma_{yh}^2 \approx S_{yh}^2$ pour tout h , l'allocation proportionnelle est toujours meilleure qu'un sondage aléatoire simple.
- 4) Le point de vue envisagé maintenant est celui d'une allocation optimale afin de satisfaire un souci de précision. Sous la contrainte que $\sum_{h=1}^H n_h = n$,
 - a. Quelle est l'allocation des n_h qui minimise la variance de l'estimateur du total ?
 - b. Que vaut alors la variance ?
 - c. Comment peut-on interpréter le choix des allocations optimales ?

Exercice 2

Estimation du poids des éléphants d'un cirque

(d'après P.Ardilly et Y.Tillé, Exercices corrigés de méthode de sondage, Ellipses, 2003)

Un directeur de cirque possède 100 éléphants classés en deux catégories : "mâles" et "femelles". Le directeur veut estimer le poids total de son troupeau, car il veut traverser un fleuve en bateau. Il a la possibilité de faire peser seulement 10 éléphants de son troupeau. Cependant, en 1998, ce même directeur a pu faire peser tous les éléphants de son troupeau, et il a obtenu les résultats suivants (en tonnes) :

	Effectifs N_h	Moyennes \bar{Y}_h	Variances S_h^2
mâles	60	6	4
femelles	40	4	2.25

1. Calculer la variance dans la population de la variable "poids de l'éléphant" en 1998.
2. Si, en 1998, le directeur avait procédé à un sondage aléatoire simple sans remise de 10 éléphants, quelle aurait été la variance de l'estimateur du poids total du troupeau ?

3. Si le directeur avait procédé à un sondage stratifié, avec SAS dans chaque strate, avec allocation proportionnelle de 10 éléphants, quelle aurait été la variance de l'estimateur du poids total du troupeau ?

4. Si le directeur avait procédé à un sondage stratifié optimal, avec SAS dans chaque strate, de 10 éléphants, quels auraient été les effectifs de l'échantillon dans les strates, et quelle aurait été la variance de l'estimateur du poids total du troupeau ?

Exercice 3

Calcul de la surface cultivée en maïs

On cherche à estimer la surface moyenne en maïs des exploitations agricoles d'une région donnée. On a stratifié cette région avec la variable surface agricole utile des exploitations découpée en 7 classes. Le tableau ci-dessous précise pour chaque strate l'effectif, la surface moyenne cultivée en maïs et l'écart type dans la strate. On veut un échantillon total de taille $n = 100$ exploitations et on note :

- $Y_{i,h}$ la surface en maïs de la $i^{\text{ème}}$ exploitation de la strate h ,
- $N = \sum_{h=1}^7 N_h$ le nombre total d'exploitations,
- $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^7 \sum_{i=1}^{N_h} Y_{i,h}$ la surface moyenne inconnue en maïs de la région.
- $S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{h=1}^7 \sum_{i=1}^{N_h} (Y_{i,h} - \bar{Y})^2$ la dispersion totale de la surface en maïs.

Taille des exploitations en ha Strate h	Nombre d'exploitations N_h	Surface moyenne en maïs \bar{Y}_h	Ecart type S_{yh}
De 0 à 20 ha	394	2.7	4.1
De 21 à 40 ha	461	8.3	6.6
De 41 à 60 ha	391	12.1	7.5
De 61 à 80 ha	334	17.2	8.9
De 81 à 100 ha	169	21.1	12.2
De 101 à 120 ha	113	25.1	13.0
Plus de 121 ha	148	31.9	17.6
Total ou moyenne	2 010	13.1	

1. Définir comment est réparti l'effectif de l'échantillon dans les strates
 - a. si on utilise un échantillon stratifié proportionnel,
 - b. si on utilise une allocation optimale.

2. Démontrer que : $(N-1)S_y^2 = \sum_{h=1}^7 (N_h-1)S_{yh}^2 + \sum_{h=1}^7 N_h (\bar{Y}_h - \bar{Y})^2$ et en déduire la valeur de S_y^2 .

3. Comparer les précisions des deux méthodes d'échantillonnage stratifié avec celle de l'échantillon aléatoire simple de même taille. On calculera pour cela le design effect défini

comme le rapport des précisions $\frac{V(\hat{Y}_{stratifié})}{V(\hat{Y}_{sas})}$.

4. Démontrer la formule de l'échantillon optimal $n_h = n \frac{N_h S_h}{\sum_{h=1}^H N_h S_h}$.

On pourra utiliser l'indication suivante : soient $(a_j)_{1 \leq j \leq p}$ et $(f_j)_{1 \leq j \leq p}$ deux suites de p nombres positifs avec $\sum_{j=1}^p f_j = 1$; alors on a $\sum_{j=1}^p \frac{a_j}{f_j} \geq \left(\sum_{j=1}^p \sqrt{a_j} \right)^2$ et le choix des $(f_j)_{1 \leq j \leq p}$ qui minimise la

première somme est $f_j = \frac{\sqrt{a_j}}{\sum_{j=1}^p \sqrt{a_j}}$. Démontrer ce résultat intermédiaire et l'appliquer à l'exercice.

Exercice 4

L'âge du personnel

Une grande entreprise veut réaliser une enquête auprès de son personnel qui comprend 10 000 personnes. Des études préliminaires ont montré :

- que les variables que l'on cherche à analyser dans l'enquête sont très contrastées selon les catégories de personnel et qu'il y a donc intérêt à stratifier selon ces catégories. Pour simplifier, on considérera qu'il y a 3 grandes catégories qui formeront les strates,
- que ces variables sont également très fortement liées à l'âge des individus.

On va donc proposer des plans d'échantillonnage comme si on voulait étudier l'âge des individus : si une stratégie est meilleure que d'autres pour estimer l'âge moyen, alors on a de bonnes raisons de penser qu'elle le sera aussi pour les variables d'intérêt. Comme on connaît l'âge des membres du personnel, on peut raisonner en faisant les comparaisons exactes.

On dispose des renseignements suivants :

Catégorie	Poids dans l'ensemble du personnel	Ecart type des âges
1	20%	18
2	30%	12
3	50%	3.6
Ensemble	100%	16

1. Soit \bar{Y} l'âge moyen et $\hat{\bar{Y}}$ l'estimateur issu d'un échantillon aléatoire simple sans remise à probabilités égales de $n = 100$ individus. Quelle est l'erreur type de $\hat{\bar{Y}}$?
2. On décide que l'échantillon de 100 individus doit être stratifié selon les catégories de personnel. Quelle est la répartition « représentative » ? Quelle est l'erreur type de l'estimateur de \bar{Y} qui en découle ? Comparer avec les résultats de la question 1.
3. Quelle serait la répartition optimale de l'échantillon ? Quelle est l'erreur type de l'estimateur de \bar{Y} qui en découle ? Comparer avec les résultats de la question 2.

Exercice 5 **Estimation d'une proportion**
(d'après P.Ardilly et Y.Tillé, Exercices corrigés de méthode de sondage, Ellipses, 2003)

Sur les 7500 employés de l'INSEE, on souhaite connaître la proportion p d'entre eux qui possèdent au moins un véhicule. Pour chaque individu de la base de sondage, on dispose de la valeur de son revenu. On décide alors de constituer trois strates dans la population : individus de faibles revenus (strate 1), de revenus moyens (strate 2) et de revenus élevés (strate 3). On note :

- N_h la taille de la strate h ,
- n_h la taille de l'échantillon dans la strate h ,
- \hat{p}_h l'estimateur de la proportion d'individus possédant au moins un véhicule dans la strate h .

On obtient le résultat suivant :

	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$
N_h	3500	2000	2000
n_h	500	300	200
\hat{p}_h	0,13	0,45	0,50

1. Quel estimateur \hat{p} de p proposez-vous ? Que peut-on dire de son biais ?
2. Calculez la précision de \hat{p} , et donnez un intervalle de confiance à 95% pour p .
3. Estimez-vous que le critère de stratification est adéquat ?
4. Que pensez-vous de l'allocation (n_1, n_2, n_3) choisie ? Quelle est la perte de variance par rapport à une allocation proportionnelle ? Par rapport à une allocation optimale ?

Exercice 6 **Optimalité pour une différence**
(d'après J-M. Grosbras, Méthodes statistiques des sondages, Economica, 1987)

Le but de l'exercice est de montrer que si une stratégie est optimale pour estimer précisément une quantité dans l'ensemble d'une population stratifiée, elle peut ne plus l'être tout à fait si l'objectif du sondage est justement de comparer les strates entre elles. La bonne définition des objectifs à atteindre est donc essentielle au choix de la technique à employer. Considérons une population de taille N formée de deux strates, de taille N_1 et N_2 et intéressons-nous à la moyenne \bar{X} d'une variable X . Les moyennes de X dans les strates 1 et 2 sont notées \bar{X}_1 et \bar{X}_2 et leurs estimateurs \hat{X}_1 et \hat{X}_2 . On dispose d'un budget C et on suppose que :

- le tirage effectué est un sondage aléatoire simple sans remise de n_h unités parmi N_h dans la strate h ($h = 1$ ou 2),
- la fonction de coût s'écrit $C_1 n_1 + C_2 n_2$ où C_h désigne le coût unitaire dans la strate h .

1. Si on cherche à estimer précisément la moyenne \bar{X} ,
 - a. Donner l'expression de \hat{X} , estimateur sans biais de \bar{X} en fonction de \hat{X}_1 et \hat{X}_2 .
Calculer sa variance

- b. Ile répartition (n_1, n_2) de l'échantillon donne une variance $V(\hat{\bar{X}})$ minimale ? Que vaut alors $V(\hat{\bar{X}})$?
- c. Application numérique : calculer n_1, n_2, n et $V(\hat{\bar{X}})$ avec :
- | | |
|-----------------|-----------------|
| $N_1 = 10\ 000$ | $N_2 = 20\ 000$ |
| $S_1 = 2$ | $S_2 = 1$ |
| $C_1 = 4$ | $C_2 = 9$ |
| $C = 1\ 000$ | |
2. Si on avait appliqué une allocation proportionnelle, c'est-à-dire : $n_h / N_h = n / N$,
- a. Qu'aurait-on trouvé pour n_1, n_2 et n ?
 - b. Que vaudrait alors $V(\hat{\bar{X}})$?
 - c. Avec les mêmes données numériques, évaluer la perte relative de précision par rapport à l'échantillon optimal.
3. En fait, on cherche à évaluer l'écart entre les moyennes des deux groupes : $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$.
- a. Montrer que $\hat{\bar{X}}_1 - \hat{\bar{X}}_2$ est un estimateur sans biais de $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$.
 - b. Calculer sa variance.
 - c. Déterminer la répartition (n_1, n_2) de l'échantillon pour que $V(\hat{\bar{X}}_1 - \hat{\bar{X}}_2)$ soit minimale, toujours avec la même contrainte de budget. (on pourra éventuellement utiliser, en les adaptant, certains résultats de la question 1).
 - d. Calculer dans ces conditions $V(\hat{\bar{X}})$. Comparer ce résultat avec celui de la 1^{ère} question en écrivant la différence Δ des variances de ces deux estimateurs.
 - e. Reprendre l'application numérique pour trouver les nouvelles valeurs de n_1, n_2, n , $V(\hat{\bar{X}})$ et la perte relative de précision par rapport à l'échantillon optimal.

Exercice 7

Choix des allocations

(d'après A-M. Dussaix et J-M. Grosbras, Exercices de sondage, Economica, 1992)

Cet exercice est une application du principe : "à chaque objectif son échantillon". Une entreprise comporte 400 exécutants et 100 cadres. La direction de l'entreprise désire évaluer un indice de satisfaction, assimilable à une variable numérique positive Y , mesurable pour chaque individu à partir d'un ensemble de questions : elle décide pour cela de faire réaliser une enquête auprès de 100 personnes employées dans l'entreprise, à l'aide d'un plan de sondage stratifié, avec un sondage aléatoire simple dans chaque strate. Le coût d'une interview est le même dans les deux strates.

1. On pense *a priori* que la dispersion de la variable Y doit être la même au sein de chacun des deux groupes. Comment répartir l'échantillon entre les deux groupes, selon que l'on vise l'un des objectifs suivants :
 - a. obtenir la meilleure précision possible sur la valeur moyenne de l'indice de satisfaction dans l'entreprise ;

- b. obtenir la même précision sur la valeur moyenne de l'indice de satisfaction dans chacune des deux catégories ;
 - c. obtenir la meilleure précision possible sur la différence entre les valeurs moyennes de l'indice de satisfaction dans les deux catégories.
2. On réalise finalement l'enquête selon le plan de sondage permettant d'atteindre l'objectif 2. On obtient: pour les exécutants : $\bar{y}_e = 13$ $s_e^2 = 9$ et pour les cadres : $\bar{y}_c = 15$ $s_c^2 = 36$.
- a. Donner des intervalles de confiance à 95% pour la moyenne de l'indice de satisfaction dans chaque catégorie.
 - b. La différence entre les deux valeurs moyenne de l'indice est-elle significativement différente de 0 ?

Exercice 8

Estimation d'une différence

On considère une population U de taille N partitionnée en H strates notées $U_1 \dots U_h \dots U_H$, de tailles respectives $N_1 \dots N_h \dots N_H$. On note $\bar{Y}_1 \dots \bar{Y}_h \dots \bar{Y}_H$ les moyennes d'une variable d'intérêt Y au sein de chaque strate, et $S_1^2 \dots S_h^2 \dots S_H^2$ les dispersions.

La moyenne de Y dans la population vaut bien sûr : $\bar{Y} = \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} \bar{Y}_h = \sum_{h=1}^H w_h \bar{Y}_h$.

On réalise un sondage stratifié, avec sondage aléatoire simple sans remise dans chaque strate, de taux de sondage $f_h = n_h / N_h$. La taille de l'échantillon total est $n = \sum_{h=1}^H n_h$.

L'objectif est de comparer une strate particulière U_i à la population totale : on veut estimer $D_i = \bar{Y}_i - \bar{Y}$

1. Donner l'expression de l'estimateur de Horvitz-Thompson de D_i , noté \hat{D}_i , ainsi que l'expression de sa variance.
2. Pour une taille d'échantillon fixée n , trouver l'allocation optimale $n_1 \dots n_h \dots n_H$, qui minimise la variance de \hat{D}_i . Comparer avec l'allocation optimale de Neyman.

