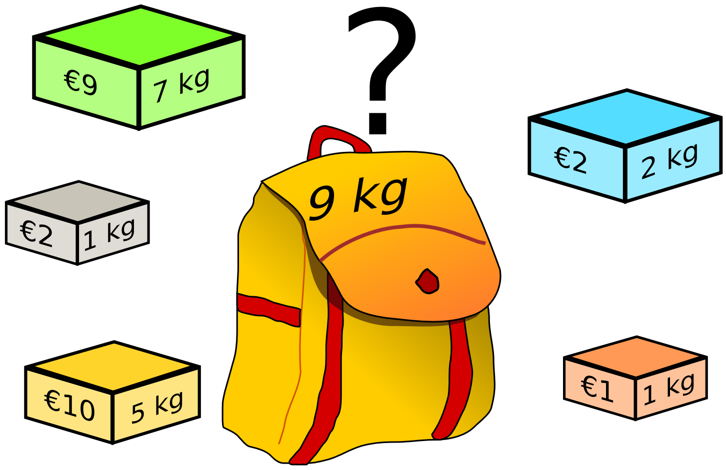
TP2 : des nombres entiers aux nombres fractionnaires

Sac à dos binaire ou relâché

Exercice 1 Soit le sac à dos dans l'image. Le but est de maximiser le profit ; on peut sélectionner chaque article au maximum une fois, c.à.d., c'est un problème binaire. La somme des poids ne doit pas dépasser 9 kg.

1. Quelle est la meilleure solution que vous pouvez trouver en quelques minutes sans utiliser d'ordinateur ?
2. Écrire un modèle Julia ou GLPK et vérifiez votre réponse du point précédent.
3. Quelle est la valeur optimale de la relaxation linéaire. La relaxation linéaire signifie qu'on peut couper chaque article et le sélectionner un nombre fractionnaire des fois (ex, prendre 1/3 du premier article comme s'il contenait du blé).



Des pastèques et du blé dans des boites à livrer

On considère un producteur agricole d'Auvergne qui veut acheminer des marchandises dans des boites vers Paris. Il possède une quantité illimité de boites (mini-conteneurs) préfabriquées qu'il peut transporter grâce à un livreur. La production agricole de cette année a donné :

1. *des pastèques*
   Chaque pastèque transportée apporte un bénéfice de $\boxed{\text{6 euros}}$. Une pastèque pèse $\boxed{\text{4kg}}$ et occupe $\boxed{\text{6 litres}}$. Une pastèque ne peut pas être coupée ; elle doit être transportée toute entière.

2. *du blé*
   Chaque kg de blé transporté rapporte $\boxed{\text{1 euro}}$. Un kg de blé occupe $\boxed{\frac{2}{3}}$ litres (car le blé et plus lourd que l'eau).

La boîte a deux limitations :
poids maximal (capacité) : $\boxed{\text{28kg}}$;
volume maximal : $\boxed{\text{37 litres}}$.

Exercice 2 L'objectif est de trouver le bénéfice maximal par boite. L'exercice a trois étapes :

1. D'abord, trouver à la main la configuration optimale : combien de pastèques et combien de kg. de blé doit-on mettre dans chaque boite ?
2. Écrire le modèle mathématique. Si on utilise x pour les pastèques et y pour le blé, quelle variable doit être entière et quelle variable peut être fractionnaire ?
3. Écrire le modèle `Julia` . Vérifiez si `Julia` renvoie la même valeur optimale que celle trouvée au point 1.

Le livreur nous permets de dépasser le poids max si on le rémunère

Exercice 3 Modifier le programme précédent pour permettre l'adaptation suivante. On suppose que le livreur vous offre la possibilité de dépasser la capacité donnée (sur le poids) à condition de le payer. Si vous dépassez la capacité d'un kg, il faut payer 0.7 euros. Si vous dépassez la capacité de deux kg, il faut payer 2×0.7 euros. Généralement, si vous dépassez la capacité de z kg, il faut payer $z \times 0.7$ euros. Le dépassement est toujours un nombre entier (en kg). Trouvez la configuration optimale des boites. .

Exercice 4 Écrivez le modèle mathématique pour le problème suivant. Deux amis décident de passer leur lune de miel dans un pays exotique. *Ils ont ensemble* 5 articles à mettre dans leurs valises.

La compagne aérienne facture 20 euros pour une valise de 20kg et 30 pour une valise de 30kg. Le prix d'une valise et le même, qu'elle soit remplie ou pas ; si vous mettez 15kg dans une valise de 20kg, il faut payer 20 euros. Chaque passager peut prendre une seule valise de chaque type. Minimiser le coût pour les articles suivantes :

Nombre de l'article :	1	2	3	4	5
Poids :	8kg	15kg	9kg	7kg	1kg

Je vous suggère de remplir d'abord le tableau ci-dessous avec la meilleure solution que vous pouvez trouver de tête, sans utiliser un ordinateur. Dans chaque case il faut mettre 1 si l'article de la colonne correspondante est mis dans la valise associée à ligne correspondante, ou 0 sinon.

	article 1	article 2	article 3	article 4	article 5
Bag number	8kg	15kg	9kg	7kg	1kg
passager 1 - valise 1 (20 kg)					
passager 1 - valise 2 (30 kg)					
passager 2 - valise 1 (20 kg)					
passager 2 - valise 2 (30 kg)					

Une fois le tableau rempli, écrivez un modèle mathématique et résolvez le problème avec Julia.

Est-ce que vous avez besoin d'un ordinateur si vous considérez la version fractionnaire du problème (si vous pouvez coupez les articles) ?

Exercice 5 Écrire une contrainte pour associer à une variable p_1 le poids porté par le premier passager et à p_2 le poids porté par le deuxième passager. On souhaite avoir une redistribution équitable des poids, de sorte que la différence des deux poids p_1 et p_2 doit être au maximum 10. Autrement dit, on souhaite imposer $|p_1 - p_2| \leq 10$. Par contre, la valeur absolue utilisée ici rend cette contrainte non-linéaire et les solveurs classiques ne peuvent pas la gérer. Pensez à une solution pour modéliser cette contrainte grâce à des inégalités.

Exercice 6 **(bonus)** Trouvez toutes les solutions optimales du problème à droite en utilisant l'algorithme de `Branch and bound` présenté dans le cours. Les bornes supérieures doivent être déterminées grâce à la relaxation linéaire. **Indice de calcul :** à la racine de l'arbre de branchement, on trouve la solution suivante (en nombre réels) : $x_1 = 1.6$, $x_2 = 3.4$. Cela conduit à deux branches : $x_1 = 1$ et $x_1 = 2$. Les problèmes d'optimisation qui restent à résoudre auront une seule variable : x_2.

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 23 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 32 \\ x_1 \geq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$