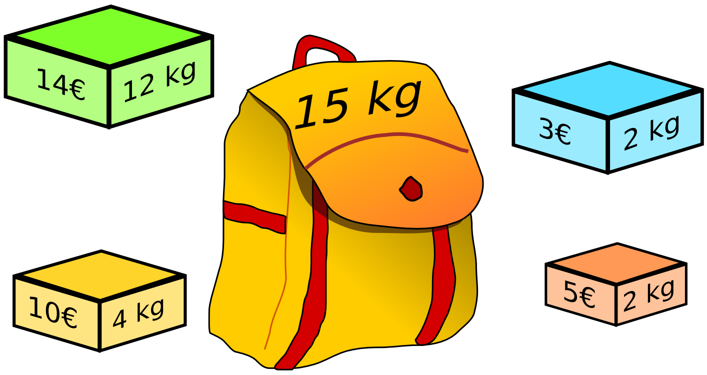
TP 2

Finir les exercices du TP précédent, dispo à `cedric.cnam.fr/~porumbed/rcp104/tp1.pdf`

Rappels sac-à-dos et au déla du problème standard

Exercice 1 Soit le sac à dos dans l'image. Le but est de maximiser le profit. On peut sélectionner chaque article au maximum trois fois, c'est à dire, on dispose de trois copies de chaque article. Écrire un modèle GLPK dans un fichier `exo1.mod` et indiquez la valeur optimale obtenue dans l'espace ci-après.



Exercice 2 Écrire dans l'espace ci-après la modification à ajouter au modèle précédent pour résoudre la relaxation linéaire du problème. Donnez aussi la nouvelle valeur optimale. La relaxation linéaire signifie qu'on peut couper chaque article, c.à.d., le sélectionner un nombre fractionnaire des fois (ex, prendre 1/3 du premier article comme s'il contenait du blé).

Exercice 3 Modifier le programme précédent et écrire un nouveau modèle GLPK (dans un fichier `exo3.mod`) pour implémenter les fonctionnalités suivantes.

(A) On suppose que le sac-à-dos est un peu élastique. Ainsi, si on dépasse la capacité d'un kg, on paye 0.7 euros au niveau de la fonction objectif. Si on dépasse la capacité de deux kg, on paye 2×0.7 euros. Généralement, si on dépasse la capacité de z kg, on paye $z \times 0.7$ euros. Le dépassement est toujours un nombre entier (en kg) tel que $z \leq 3$.

(B) On suppose que chaque article a un volume de 1 litre et que la capacité du sac-à-dos est de 5 litres. À cause de l'élasticité, on peut dépasser cette capacité de t litres à condition de payer $t \times 2.3$ au niveau de l'objectif. La variable t n'est pas entière, mais on a $t \leq 3$.

(C) Le deux dépassements z et t doivent être pas trop différentes, pour des raisons d'élasticité. On souhaite imposer $|z - t| \leq 1$, c.à.d, la différence entre z et t est au maximum 1.

Préparer ses vacances

Exercice 4 Vous êtes en train de préparer (un vol pour) vos vacances. Vous avez 4 copies des 3 articles ci-dessous à mettre dans des valises en soute.

Nombre de l'article :	1	2	3
Poids :	3kg	5kg	9kg

La compagne aérienne vous offre deux types de valises à utiliser ; vous avez le droit d'utiliser jusqu'à deux valises de chaque type. On facture 20 euros pour une valise de 20kg et 30 pour une valise de 30kg. Le prix d'une valise et le même, qu'elle soit remplie ou pas ; si vous mettez 15kg dans une valise de 20kg, il faut payer 20 euros.

Remplir d'abord le tableau ci-après avec la meilleure solution que vous pouvez trouver de tête, sans utiliser d'ordinateur. Dans chaque case (a, v) il faut mettre le nombre d'articles de type a à mettre dans la valise v.

	article 1	article 2	article 3	
	3kg	5kg	9kg	
valise 1 (20 kg)				
valise 1' (20 kg)				
valise 2 (30 kg)				
valise 2' (30 kg)				

Exercice 5 Écrire un modèle `exo5.mod` pour trouver le coût minimum du problème précédent.

Exercice 6 Est-ce que vous avez besoin d'un ordinateur si vous considérez la relaxation linéaire du problème ?

Exercice 7 Trouvez toutes les solutions optimales du problème à droite en utilisant l'algorithme de `Branch and bound` présenté dans le cours. Les bornes supérieures doivent être déterminées grâce à la relaxation linéaire. **Indice de calcul :** à la racine de l'arbre de branchement, on trouve la solution suivante (en nombre réels) : $x_1 = 1.6$, $x_2 = 3.4$. Cela conduit à deux branches : $x_1 = 1$ et $x_1 = 2$. Les problèmes d'optimisation qui restent à résoudre auront une seule variable : x_2.

$$
\begin{aligned}
\max 2x_1 + x_2 \\
8x_1 + 3x_2 \leq 23 \\
6x_1 + 6x_2 \leq 32 \\
x_1 \geq 1 \\
x_1 \leq 2 \\
x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

Exercice 8 (BONUS) Écrire un modèle `exo8.mod` pour trouver la distance minimale à parcourir pour résoudre le problème suivant. Vous êtes basé à Amsterdam. Vous avez une copine à Athènes, une autre à Berlin et une troisième à Bruxelles. Vous avez ci-dessous les distances entre chaque deux villes. Trouvez le circuit minimal qui vous permet de visiter chaque copine exactement une fois et revenir à Amsterdam.

	Amsterdam	Athènes	Berlin	Bruxelles
Amsterdam	--	3000	600	200
Athènes	3000	--	2500	3000
Berlin	600	2500	--	700
Bruxelles	200	3000	700	--

Exercice 9 (BONUS) Proposer des modifications à apporter au problème précédent si on avait $n = 10$ villes ou plus ? Est-ce qu'on aurait besoin de contraintes supplémentaires pour éviter des sous-circuits ? Voici un exemple de deux sous-circuits dans un graphe à 6 sommets : $\boxed{1}\rightarrow\boxed{2}\rightarrow\boxed{3}\rightarrow\boxed{1}$ et $\boxed{4}\rightarrow\boxed{5}\rightarrow\boxed{6}\rightarrow\boxed{4}$. Est-ce que votre solution de l'exercice précédente serait capable d'interdir une telle solution ?