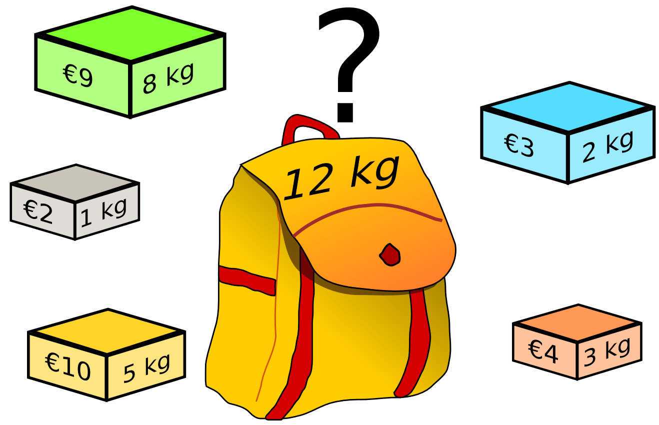
TD-TP : Décisions optimales problèmes de nature discrète



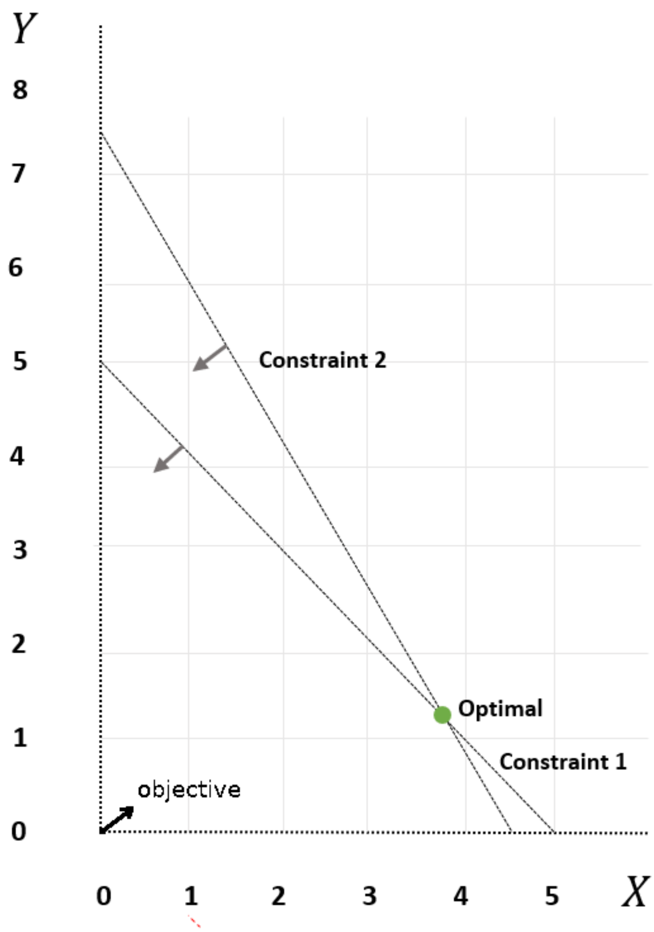
Exercice 1 Soit le sac-à-dos dans l'image. On veut choisir les articles qui maximisent le bénéfice sans dépasser la capacité de poids (12kg). Chaque article peut être sélectionné au maximum deux fois (on peut le sélectionner 0 fois, 1 fois ou deux fois). On ajoute aussi la contrainte suivante : on n'a pas le droit de prendre plus de 3 articles.
1. Écrire d'abord le modèle mathématique dans l'espace ci-dessous
2. Résolvez le problème avec Glpk. Vous pouvez vous connecter au site ci-dessous et y écrire votre code :
`http://cocoto.github.io/glpk-online/`

Exercice 2 Nous considérons que le sac à dos est un peu souple ou élastique : la contrainte de poids peut être légèrement violée. Vous pouvez dépasser la capacité et faire un effort pour porter un poids supplémentaire de $c <= 2$. Mais cela a un coût. En dépassant la capacité d'un montant de c, le bénéfice est diminué de $0.1 \cdot c$. Modélisez ce nouveau problème en utilisant cette nouvelle variable c (est-elle entière ou réelle ?). Écrire d'abord le modèle mathématique dans l'espace ci-dessous. Résolvez ce nouveau problème avec Glpk (ou Julia).

Exercice 3 Nous considérons que les trois articles à gauche ont un volume de 5 litres. Les deux articles à droite ont un volume de 4 litres. Le sac à dos une capacité de volume de 12 litres. Résolvez ce nouveau problème avec Julia/Glpk.

Exercice 4 Nous considérons le problème suivant, où x et y sont des variables réelles non négatives. La zone réalisable (espace de solutions) est représentée à droite. Observez la solution optimale dans l'image. Elle se trouve à l'intersection des deux droites. La solution optimale satisfait donc $x + y = 5$ et $10x + 6y = 45$. Calculer le x^* et le y^* qui résolvent ce système, pour déterminer la solution optimale. Quelle est la valeur de la fonction objectif ?

$$\max 5x + 4y$$
$$x + y \leq 5$$
$$10x + 6y \leq 45$$



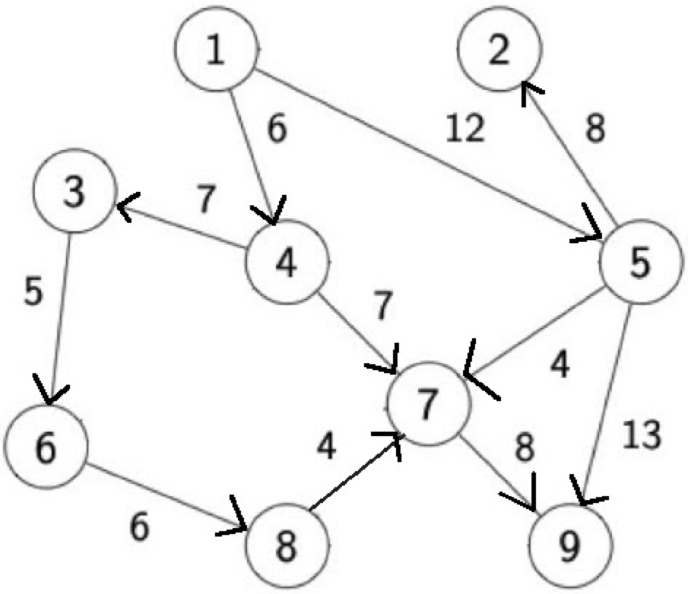
Exercice 5 Résolvez ce modèle grâce au langage de programmation choisi et vérifiez votre réponse à la question précédente. Avez vous trouvé la même solution optimale (x^*, y^*) ?

Exercice 6 Résolvez le même problème en nombres entiers. Vous allez obtenir une solution entière (x^i, y^i). Peut-on dire que (x^i, y^i) et le point entier le plus proche de la solution optimale en nombre réels (x^*, y^*) ?

Exercice 7 Pouvez-vous changer l'une des contraintes en augmentant sa borne/valeur à droite (soit $5 \to 6$ pour la première contrainte ou $45 \to 46$ pour la deuxième) pour que la solution optimale en nombres réels soit entière ?

Exercice 8 Que se passe-t-il si l'on permet à x et y d'être négatifs et que l'on transforme la fonction objectif en $4x + 5y$? L'objectif peut-il devenir infini ? Résolvez la question d'abord sans utiliser d'ordinateur, puis vérifiez votre réponse en utilisant Julia ou Glpk.

Exercice 9 Nous considérons une variante du problème ci-dessus comme suit. Nous permettons que chacune des contraintes soit légèrement violée (imaginez que vous ayez une sorte de sac à dos élastique). Vous pouvez dépasser la valeur de droite (limite) de chaque contrainte d'une certaine quantité $c <= 2$. Mais cela a un coût. En dépassant la limite d'un montant de c, le bénéfice est diminué de $0.1 \cdot c$. Modélisez ce nouveau problème en utilisant cette nouvelle variable c (est-elle entière ou réelle ?). Résolvez ce nouveau problème avec Julia/Glpk.



Un graphe peut représenter des connexions possibles entre des villes/sommets, voir ci-dessus un exemple avec $n = 9$ villes.

Exercice 10 Écrire un modèle pour trouver le trajet qui nécessite le moins de correspondances pour arriver de la ville $\boxed{1}$ à la ville $\boxed{9}$. Vous avez à utiliser ces variables binaires : x_{14}, x_{15}, x_{52}, x_{43}, x_{36}, x_{68}, x_{87}, x_{47}, x_{57}, x_{59}, x_{79}. Il faut minimiser le nombre total d'arêtes sélectionnées. Il faut ajouter des contraintes pour obliger les arêtes sélectionnés de représenter un trajet, par exemple, il faut sélectionner exactement une arête connecté au sommet $\boxed{1}$.

Indice Vous avez ci-dessous les contraintes qu'on a utilisé (séance précédente) pour trouver un chemin de Paris à Malaga sur le graphe en bas à gauche.

```
         P------+
      /  |      L
   /     |      |
B        |      |
 |       T      |
  |        \    |
   |         \  |
    |          V
     |      /
      \   /
         M
```

```
@constraint(m, xPT+xPL+xPB == 1);
@constraint(m, xVM+xBM     == 1);
@constraint(m, xLV + xTV == xVM);
@constraint(m, xPT       == xTV);
@constraint(m, xPB       == xBM);
@constraint(m, xPL       == xLV);
```

Exercice 11 Modifier le programme précédent pour le faire gérer la contrainte suivante. On suppose que la valeur indiquée sur chaque arrête représente un coût en euro et la solution ne doit pas dépasser un budget de 22 euros.

Exercice 12 On suppose que la valeur indiquée sur chaque arrête représente maintenant un nombre de km. Écrire un modèle pour trouver le chemin le plus long (en km) du sommet $\boxed{1}$ au sommet $\boxed{9}$. Ce chemin ne doit pas visiter deux fois le même sommet (il faut pas passer deux fois par la même ville).

Exercice 13 Écrire un modèle pour résoudre le problème précédent avec cette contrainte en plus : il ne faut pas utiliser plus de 4 correspondances.