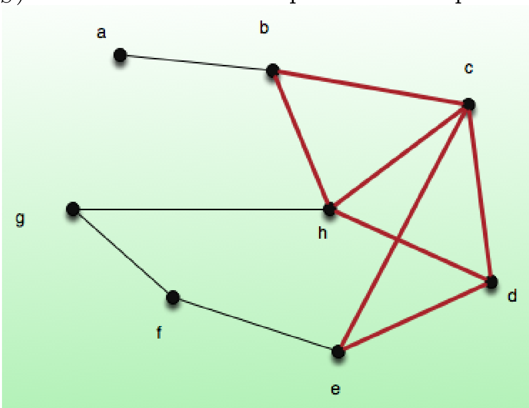
Cnam
Master Parisien de Recherche Opérationnelle

Programmation Mathématique Avancée.

Programmation Quadratique

Exercice 1 — ***Le problème du k-cluster***

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ non orienté ayant n sommets, et m arêtes, le problème du k-cluster consiste à déterminer le sous graphe de G le plus dense possible de k sommets,i.e. le sous-graphe $G_S = (S, E_S)$ de k sommets avec le plus d'arrêtes possible.



Solution pour $k = 5$
Source : wikipedia

1. Proposez une formulation quadratique du k-cluster, notée (QP).
2. Proposer 2 linéarisations de (QP). Indiquer pour chacune la taille des formulations.

En notant $\bar{E}$ l'ensemble des arêtes n'appartenant pas à E, ie. son complémentaire dans le graphe complet, le problème du k-cluster peut aussi consister à minimiser le nombre d'arêtes manquantes dans le sous graphe par rapport à un sous graphe complet de k arêtes.

1. Proposez une autre formulation quadratique du k-cluster, notée (QP').
2. Proposer 2 linéarisations de (QP'). Indiquer pour chacune la taille des formulations.
3. Dans quels cas la formulation (QP') est-elle plus intéressante que la formulation (QP) ?
4. Implémenter une reformulation linéaire de chaque modélisation et comparer sur les instances proposées.

Exercice 2 — ***Problème de localisation et transport***

On considère une entreprise qui livre avec des camions de capacité Cm^3. Elle cherche à louer n entrepots $E_1, E_2, \ldots, E_n$, sachant que le prix de la location de l'entrepôt E_i est de p_i euros et que sa capacité de stockage est $c_i \times C$.

La région est découpée en p zones $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$, et l'entreprise doit livrer dans ces zones avec une demande $C \times d_j$. Le coût de livraison depuis l'entrepot E_i vers la zone Z_j vaut l_{ij}.

On considère le problème de déterminer les entrepôts qu'il faut louer de façon à minimiser la somme des coûts de transport.

Pour cela, on considère deux familles de variables :

— $y_i \in \{0,1\}$ qui vaut 1 si l'entrepôt E_i est loué,
— $x_{ij} \in \mathbb{N}^*$ qui représente le nombre de camions qui effectueront des livraisons depuis l'entrepot E_i vers la zone Z_j.

Les contraintes à considérer sont les suivantes :
— Pour chaque entrepot E_i, il faut limiter la quantité livrée à partir de l'entrepot E_i à la capacité de cet entrepot.
— Pour chaque zone Z_j, il faut satisfaire la demande.
— Pour chaque livraison entre l'entrepot E_i et la zone Z_j, il faut forcer la location d'un entrepot si une quantité est livrée depuis cet entrepot.

Pour la fonction objectif, on souhaite minimiser le coût de location et le coût de transport pour chaque livraison entre l'entrepot E_i et la zone Z_j.

1. Proposez une modélisation du problème sous la forme d'un programme quadratique.
2. Proposez une reformulation équivalente de la contrainte non-linéaire avec $n \times p$ variables additionelles.
3. Proposez une reformulation linéaire spécifique au problème qui ne rajoute pas de variables.

Exercice 3 — *Cas où les variables sont des entiers naturels*

Dans cette exercice, nous considérons le problème de l'équipartition en variables entières (Integer Equipartition Problem (IEP)). Ce problème consiste à partitionner les sommets d'un graphe en une collection d'ensembles disjoints de mêmes tailles, tout en minimisant le somme des poids des arêtes qui se trouvent à l'interieur du même ensemble.

Plus précisément, nous considérons n types d'objets, m objets de chaque type, et une partition des $n \cdot m$ objets en p ensembles tous de mêmes tailles. Nous supposons que $n \cdot m$ est un multiple de p. Pour toute paire de types d'objets $(i,j),\ i \leqslant j$, on note c_{ij} le coût d'allouer chaque paire d'élements de types i et j à des ensembles différents. Le problème consiste donc à minimiser le coût total de l'allocation des $n \cdot m$ objets aux p ensembles.

Nous introduisons les variables de décision x_{ik} qui représentent le nombre d'objets de type i alloués à l'ensemble k, (IEP) peut être formulé comme suit :

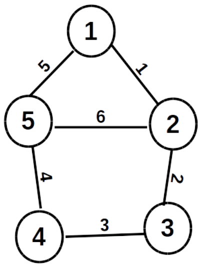
$$(IEP)\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i<j}\sum_{k\neq l} c_{ij}x_{ik}x_{jl} + \sum_{i}\sum_{k<l} c_{ii}x_{ik}x_{il} & \\ \text{s.t.} & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \frac{n\cdot m}{p} & 1 \le k \le p \quad (1) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_{ik} = m & 1 \le i \le n \quad (2) \\ 0 \leqslant x_{ik} \leqslant \min(m, \dfrac{n\cdot m}{p}) & 1 \le i \le n, 1 \le k \le p \quad (3) \\ x_{ik} \in \mathbb{N} & 1 \le i \le n, 1 \le k \le p \quad (4) \end{cases}$$

On remarque que les contraintes (1) assurent qu'exactement $\frac{n \cdot m}{p}$ objets sont alloués à chaque ensemble, les constraintes (2) assurent que tous les objets sont bien affectés à un ensemble. Ce problème a une fonction objectif quadratiques, $n+p$ égalités linéaires et $n \cdot p$ variables entières.

1. Proposez une reformulation linéaire de ce problème.
2. A l'aide de `ampl`, implémentez cette reformulation et résolvez les instances disponibles en ligne.

Exercice 4 — *MaxCut sur un exemple*

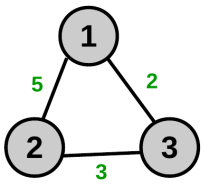
Considérons le graphe $G = (V, E)$ suivant de 5 sommets et 6 arêtes :



1. Ecrire la matrice W des poids de G, et donner la formulation $(MC_{0,1})$ pour ce graphe. A l'aide de `ampl-cplex` résoudre $(MC_{0,1})$.
2. Donner la formulation $(MC_{-1,1})$ pour G.
3. Ecrire la matrice Laplacienne L de G, et donner la formulation (MC_L) pour G.
4. Ecrire la formulation SDP de max-cut pour G, et donner sa relaxation.
5. Combien d'inégalités triangulaires peut-on ajouter à $R - SDP_{MC}$ pour le graphe G ?
6. A l'aide de `ampl`, et `csdp` resoudre la relaxation sdp $(R - SDP_{MC})$. Ajoutez à cette relaxation les inégalités triangulaires et resolvez $(SDP - T_{MC})$. Résolvez les instances disponibles en ligne. Quelles sont les limites des différentes formulations ou relaxations ?

Exercice 5 — *QCR sur le QAP*

Soit l'instance du QAP qui correspond au graphe suivant :



et aux données suivantes :

— Flux entre les équipements i et j : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

— Distance entre les sites k et l : $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

— Coût d'affectation nul : $C = 0$

1. Donnez la formulation de Lawer, ainsi que la formulation (SDP_{QCR}) associée.
2. A l'aide de `ampl`, résoudre pour le QAP par la linéarisation classique. Résolvez ensuite les instances disponibles en ligne. Quelles sont les limites des différentes formulations ou relaxations ?
3. A l'aide de `ampl`, et de `csdp` résoudre pour le QAP la relaxation (SDP_{QCR}), récupérez ensuite les variables duales optimales et convexifiez le (QAP) avec la méthode QCR. Résolvez ensuite les instances disponibles en ligne. Quelles sont les limites des différentes formulations ou relaxations ?