POLITECNICO DI MILANO

FACOLTÁ DI INGEGNERIA DEI SISTEMI
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Matematica

Sulla teoria delle traiettorie quantistiche: caso diffusivo e con salti

Relatore: Prof. Alberto Barchielli

Elena Di Bernardino Matr. 712323

ANNO ACCADEMICO 2007-2008

.

ad Antonio,
perché in silenzio
glielo avevo promesso.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 La tematica della tesi

In questo lavoro di tesi vogliamo presentare l'approccio alla teoria dei sistemi quantistici aperti basato sulle equazioni differenziali stocastiche classiche, con particolare attenzione per le *misurazioni continuate*.

Si parla di una misurazione continuata quando una o più osservabili di un sistema quantistico sono seguite con continuità nel tempo. Si prende quindi il sistema quantistico e lo si tiene sotto osservazione nel tempo. Le misurazioni continuate sui sistemi quantistici sono una pratica sperimentale comune; tipici casi sono le varie forme di rivelazione di fotoni, come il conteggio dei fotoni che arrivano ad un rivelatore, oppure le osservazioni dette di tipo eterodino o omodino. Ad esempio, nel caso di rivelazione diretta (conteggio di fotoni) uno o più contatori agiscono continuativamente sul sistema quantistico e registrano il tempo di arrivo dei fotoni o di altri tipi di particelle. Nel corso di questo lavoro supporremo di avere rivelatori di tipo eterodino/omodino e più contatori. I conteggi differiscono tra loro per la loro localizzazione o per il tipo di particelle che contano e alle quali sono sensibili.

Le presentazioni tradizionali di meccanica quantistica prendono in considerazione solo le misurazioni istantanee ma, usando la nozione di strumento, possiamo introdurre in maniera consistente anche le misurazioni continuate nel tempo. Oltre ad introdurre le probabilità per i possibili risultati di tali osservazioni è naturale porsi anche la seguente domanda: se durante una misurazione, una certa traiettoria di un'osservabile viene misurata, quale sarà lo stato del sistema quantistico condizionatamente a questa informazione? Ci stiamo interrogando, quindi, circa lo *stato a posteriori* del sistema.

Le affermazioni di una teoria quantistica circa un'osservabile sono di natura probabilistica; così è naturale che una teoria quantistica di misurazioni continuate possa dar luogo a processi stocastici. L'analisi di un sistema sottoposto a misurazioni continuate necessita di un formalismo non elementare. Sono infatti essenziali molti ingredienti come la teoria della misura quantistica, la teoria dei sistemi aperti, la teoria degli operatori, la probabilità quantistica, i processi stocastici classici e quantistici ecc. I primi lavori che trattano, in modo matematicamente consistente, i problemi delle misurazioni continuate quantistiche sono della fine degli anni ′60. Il principale campo di applicazione è stata l'ottica quantistica e nell'ambito della letteratura fisica, e in particolare dell'ottica, questa teoria (nella formulazione basata sulle EDS) prende il nome di *Theory of Quantum Trajectories* o Teoria delle Traiettorie Quantistiche. Una traiettoria quantistica risulterà essere una soluzione di un'equazione differenziale stocastica di un sistema quantistico sottoposto a misurazioni continuate nel tempo, equazione chiamata master equation stocastica.

Come già detto ci interesseremo, nel corso di questo lavoro, di discutere e dare una formalizzazione al problema delle misurazioni continuate nel tempo di un sistema quantistico quando il risultato della misurazione non è una singola variabile aleatoria bensì un processo stocastico.

Abbiamo scelto di muoverci, nel corso di tutto il lavoro, in uno spazio di Hilbert finito dimensionale. In questo modo si eviteranno complicazioni di tipo analitico. Una restrizione di questo tipo conserva comunque la struttura essenziale della teoria e basta per le applicazioni più semplici. Non sarà intento del presente lavoro interessarsi delle equazioni lineari per vettori normalizzati e nello spazio di Hilbert. Ci concentreremo, piuttosto, sullo studio di una coppia di equazioni stocastiche

· una lineare per stati a posteriori non normalizzati (operatori positivi);

· una non lineare per stati a posteriori normalizzati (operatori statistici).

Tali EDS classiche, lineari e non lineari, sono collegate tra loro da una modificazione, che consiste essenzialmente in una normalizzazione e in un cambio di misura di probabilità. I tipi di rumori in gioco sono

- processi di Wiener W_j nel caso lineare e $\widehat{W}_j$ nel caso non lineare (dove W_j e $\widehat{W}_j$ sono collegati tra loro da una trasformazione di Girsanov);
- processi di Poisson N_k nel caso lineare e processi di conteggio nel caso non lineare (dove i processi di Poisson e quelli di conteggio sono gli stessi processi sotto due diverse leggi di probabilità).

Da un punto di vista matematico si affronteranno le complicazioni che nascono dall'aver introdotto nel modello questi due tipi di rumori. In particolare si affronteranno i problemi legati al significato matematico dell'equazione non lineare per stati a posteriori, o master equation stocastica.

1.2 Percorso del lavoro

Il Capitolo 2 di questo lavoro è dedicato alla master equation stocastica lineare e alla formulazione di teoremi di esistenza ed unicità. Si costruisce inoltre una nuova misura di probabilità e si ottiene sotto la nuova probabilità l'equazione non lineare per operatori statistici. Nel Capitolo 3 sono presentate le importanti nozioni di strumento e operatore statistico, è ricavata l'espressione dell'operatore caratteristico e viene mostrato come da questo sia possibile ottenere gli "stumenti finito dimensionali". Nel Capitolo 4 viene considerata l'EDS non lineare come punto di partenza e non come frutto delle trasformazioni e dei cambiamenti di probabilità dall'EDS lineare. In particolare l'equazione non lineare esaminata è quella proposta nei lavori di Clément Pellegrini [14, 15]. Viene dato senso al concetto di soluzione, facendo uso della misura di Poisson, e sono introdotti e dimostrati risultati di esistenza e unicità della soluzione. Tali risultati sono presenti in questo lavoro in forma nuova ed adattata al nostro caso. Infine nel Capitolo 5 si prende come punto di partenza l'equazione non lineare di Clément Pellegrini e con un cambio di probabilità inverso si vuole tornare all'EDS lineare già studiata nel Capitolo 2; ci si interessa, inoltre, di ricostruire tutta la teoria in particolare le probabilità fisiche e gli "strumenti finito dimensionali". Le Appendici forniscono strumenti per la comprensione del lavoro. In particolare l'Appendice A dà le nozioni principali circa norme, processi, spazi di probabilità e teoremi classici di esistenza e unicità di soluzione per EDS. L'Appendice B presenta invece una panoramica sui processi di conteggio, processi marcati di punto, la nozione di regolarità e alcuni strumenti di calcolo stocastico per equazioni con componente diffusiva e con salti. L'Appendice C, infine, introduce, commenta e riadatta al nostro caso un Teorema su EDS funzionali, preso da [16], che tornerà spesso utile nel corso di questo lavoro.

Parti nuove e sviluppi rispetto alla teoria preesistente

Il passaggio dalla master equation stocastica lineare alla non lineare, la costruzione delle probabilità fisiche e degli strumenti, sempre a partire dall'equazione lineare, sono argomenti ben sviluppati nella letteratura. E' ben sviluppato anche il problema della costruzione di tutta la teoria a partire dall'equazione non lineare nel caso "puramente diffusivo".

Le cose si complicano se sono presenti anche salti (conteggi). Nell'equazione stocastica non lineare appaiono dei processi di conteggio la cui intensità dipende dalla soluzione dell'equazione: abbiamo un'equazione con rumore la cui legge dipende dalla soluzione. Clément Pellegrini ha affrontato il problema di dar senso a tali equazioni e di costruire tali processi conteggio a partire da misure di Poisson (si veda in merito [14, 15]). Non si è occupato però di ricostruire tutta la teoria.

I contributi di questa tesi sono:

· Aver dato una forma più trattabile all'estensione dell'equazione da stati a matrici generiche in modo da rendere più facili i teoremi di esistenza e unicità delle soluzioni (Capitolo 4, si veda in merito la Sezione 4.2.1 e l'equazione modificata (4.9)).

· Aver mostrato che dall'equazione non lineare si può tornare all'equazione lineare con opportune trasformazioni (Capitolo 5, si veda in merito la Sezione 5.1).

· Aver mostrato che anche a partire dal'equazione non lineare si può ricostruire tutta la teoria in particolare le probabilità fisiche e gli "strumenti finito dimensionali" (Capitolo 5, si veda in merito la Sezione 5.3).

Capitolo 2

Misurazioni continuate nel tempo: la master equation stocastica lineare

2.1 Introduzione

In questo capitolo costruiremo la teoria delle misurazioni continuate nel tempo a partire dalla master equation lineare. Considereremo contemporaneamente sia contributi di tipo diffusivo sia contributi con salti, cosa che pone peculiari problemi di tipo matematico.

Ricordiamo che entrambi i contributi corrispondono a schemi di osservazioni fisicamente realizzabili, precisamente i termini di tipo diffusivo corrispondono, in ottica quantistica, ad "osservazioni eterodine" o "omodine" e i termini di tipo con salti ad "osservazioni dirette" (conteggi di fotoni che arrivano ad un rivelatore ossia ad un contatore di fotoni).

Per semplicità analitica supporremo che lo spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}$ del sistema quantistico sia finito dimensionale, di dimensione n. Scegliendo un sistema ortonormale completo $\{e_i\}_{i=1}^n$, identifichiamo $\mathcal{H}$ con $\mathbb{C}^n$, quindi in tutto il seguente lavoro

$$\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^n. \tag{2.1}$$

Possiamo allora pensare gli operatori ρ su $\mathcal{H}$ come delle matrici complesse $n \times n$. Indicheremo con

$$M^n := \{\, \text{matrici complesse quadrate di dimensione } n \,\}. \tag{2.2}$$

Comunque, anche nel caso finito dimensionale in cui $\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^n$, si hanno situazioni fisicamente significative e problemi matematici interessanti, che cercheremo di esporre, almeno in parte, in seguito.

Introduciamo inoltre l'insieme $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ degli operatori statistici

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{\rho \in M^n \quad \text{tali che} \quad \rho \geq 0, \quad \mathrm{Tr}\{\rho\} = 1\}. \tag{2.3}$$

$\mathcal{S}(\mathcal{H})$ è quindi l'insieme degli operatori su $\mathcal{H}$ autoaggiunti, positivi e a traccia unitaria. L'insieme appena introdotto è importante perché uno stato di un sistema quantistico è rappresentato da un operatore statistico $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Indicheremo, nel corso di questo lavoro, con

$$\mathrm{Id}_n \quad \text{l'operatore identità su} \quad M^n. \tag{2.4}$$

Introduciamo la definizione di mappa lineare completamente positiva, per operatori lineari su M^n.

Definizione 2.1. Una mappa lineare $\mathcal{U}$ da M^n in M^n è *completamente positiva* se per ogni intero m e per ogni scelta di vettori ϕ_i, ψ_i in $\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^n$, $i = 1, \ldots, m$, si ha

$$\sum_{i,j=1}^{m} \langle \phi_i \,|\, \mathcal{U}\left[|\psi_i\rangle\langle\psi_j|\right] \phi_j \rangle \geq 0\,, \tag{2.5}$$

dove $\langle \phi_i \,|$ e $|\, \phi_j \rangle$ sono definiti nella sezione A.1.3.

2.2 Notazioni e assunzioni sui coefficienti

Cominciamo con l'introdurre i vari operatori su $\mathcal{H}$ e M^n che ci serviranno in seguito nella trattazione.

Assunzione 2.2. Siano $H(t)$, $L_l(t)$, $R_j(t)$, $V_k^r(t)$, operatori lineari su $\mathcal{H}$ (matrici $n \times n$). L'operatore $H(t)$ è autoaggiunto, $H(t) = H(t)^*$. Le funzioni

$$t \mapsto H(t), \quad t \mapsto R_j(t), \quad t \mapsto V_k^r(t), \quad t \mapsto L_l(t) \tag{2.6}$$

sono continue da sinistra e con limiti finiti da destra; gli indici k, l, r, j possono prendere un numero finito di valori. Assumeremo di qui in seguito per tutto il lavoro che l'indice l prenda valori da 1 a m_L, l'indice j da 1 a m_R, l'indice k da 1 a m_J. Infine l'indice r prenderà un numero finito di valori, eventualmente dipendente da k; indichiamo con $m_V \geq m_J$ la cardinalità dell'insieme dei valori possibili per la coppia (k, r).

Definiamo ora delle utili notazioni per operatori lineari su M^n: $\forall \tau \in M^n$

$$\mathcal{J}_k(t)[\tau] := \sum_r V_k^r(t)\tau V_k^r(t)^*\,, \qquad J_k(t) := \mathcal{J}_k(t)^*[\mathbb{1}] = \sum_r V_k^r(t)^* V_k^r(t)\,, \tag{2.7}$$

$$J(t) := \sum_{k=1}^{m_J} J_k(t), \tag{2.8}$$

$$\mathcal{L}(t) := \mathcal{L}_0(t) + \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t), \tag{2.9}$$

$$\mathcal{L}_0(t)[\tau] := -\mathrm{i}[H(t),\tau] + \sum_{l=1}^{m_L} \left(L_l(t)\tau L_l(t)^* - \frac{1}{2}\left\{L_l(t)^* L_l(t),\tau\right\} \right), \quad (2.10)$$

$$\mathcal{L}_1(t)[\tau] := \sum_{j=1}^{m_R} \left(R_j(t)\tau R_j(t)^* - \frac{1}{2}\left\{R_j(t)^* R_j(t),\tau\right\} \right), \quad (2.11)$$

$$\mathcal{L}_2(t)[\tau] := \sum_{k=1}^{m_J} \left(\mathcal{J}_k(t)[\tau] - \frac{1}{2}\left\{J_k(t),\tau\right\} \right), \quad (2.12)$$

$$\mathcal{R}_j(t)[\tau] := R_j(t)\tau + \tau R_j(t)^*. \quad (2.13)$$

Con $[\ ,\ ]$ denotiamo il commutatore e con $\{\ ,\ \}$ l'anticommutatore (vedi (A.2) e (A.3)). L'operatore $\mathcal{L}(t)$ sarà il generatore della dinamica del sistema quantistico aperto in considerazione e prende il nome di operatore di Liouville o Liouvilliano; $H(t)$ ha il ruolo di Hamiltoniana mentre il resto descrive fenomeni dissipativi.

Osservazione 2.3. Dato che $\mathcal{H}$ è finito dimensionale, per l'Assunzione di continuità 2.2 si ha che le funzioni: $t \mapsto H(t)$, $t \mapsto R_j(t)$, $t \mapsto L_l(t)$ e $t \mapsto V_k^r(t)$ sono misurabili e che $\forall\ T \in (0,+\infty)$ valgono

$$\sup_{t\in(0,T)} \|H(t)\| < +\infty\,, \quad \sup_{t\in(0,T)} \left\| \sum_{j=1}^{m_R} R_j(t)^* R_j(t) \right\| < +\infty. \quad (2.14)$$

$$\sup_{t\in(0,T)} \left\| \sum_{k=1}^{m_J} J_k(t) \right\| < +\infty\,, \quad \sup_{t\in(0,T)} \left\| \sum_{l=1}^{m_L} L_l(t)^* L_l(t) \right\| < +\infty. \quad (2.15)$$

2.3 L'EDS lineare

Assunzione 2.4. Introduciamo una base stocastica $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{Q})$, con filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ che soddisfi le ipotesi usuali, si veda in merito (A.3.2). In questo spazio sono definiti m_J processi di Poisson $N_k(t)$, di intensità $\lambda_k > 0$, e m_R processi di Wiener standard (continui) $W_j(t)$. Tutti i processi in gioco sono assunti indipendenti da tutti gli altri e con incrementi indipendenti dal passato. Introduciamo poi la filtrazione a doppio indice generata dagli incrementi dei processi in gioco e dagli insiemi di probabilità nulla

$$\mathcal{F}_t^r = \sigma\big\{W_j(u) - W_j(r),\ N_k(v) - N_k(r),\ \ u,v \in [r,t],\ \ 0 \le r < t,\\ j = 1,\dots,m_R,\ k = 1,\dots,m_J\big\} \vee \mathcal{N}, \quad (2.16)$$

$$\text{con} \quad \mathcal{N} := \{A \in \mathcal{F} :\ \ \mathbb{Q}(A) = 0\}.$$

Si noti che $\mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t$ e che $\mathcal{F}_t^s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$.

Nell'Appendice B sono riportate alcune nozioni fondamentali, alcune delle proprietà principali dei processi di Poisson e la definizione di integrale rispetto a tali processi. Indicheremo con $N(t)$ il processo somma (o *ground process*) dei processi $N_k(t)$, per $k = 1, \ldots, m_J$. Tale processo avrà intensità

$$\lambda := \sum_{k=1}^{m_J} \lambda_k. \tag{2.17}$$

Indichiamo inoltre con T_n l'$n$esimo tempo di salto del processo somma $N(t)$ e con T_n^k l'$n$esimo tempo di salto del processo $N_k(t)$. Per la definizione formale dei tempi di salto si veda la Sezione B.3.

Con tutti questi ingredienti, possiamo introdurre l'equazione lineare della teoria delle misurazioni continuate nel tempo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_t = \mathcal{L}(t)[\sigma_{t_-}]\mathrm{d}t &+ \sum_{j=1}^{m_R} \mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t_-}]\mathrm{d}W_j(t) \\ &+ \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_-}]}{\lambda_k} - \sigma_{t_-} \right) (\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k \mathrm{d}t) \,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Questa è la "master equation" stocastica lineare con condizione iniziale non casuale $\sigma_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ (si veda in merito (A.14)). La (2.18) è per definizione equivalente all'equazione integrale

$$\begin{aligned} \sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t \widetilde{\mathcal{L}}(s)[\sigma_{s_-}]\mathrm{d}s &+ \sum_{j=1}^{m_R} \int_0^t \mathcal{R}_j(s)[\sigma_{s_-}]\mathrm{d}W_j(s) \\ &+ \sum_{k=1}^{m_J} \int_0^t \left(\frac{\mathcal{J}_k(s)[\sigma_{s_-}]}{\lambda_k} - \sigma_{s_-} \right) \mathrm{d}N_k(s), \end{aligned} \tag{2.19}$$

dove

$$\widetilde{\mathcal{L}}(t) = \mathcal{L}_0(t) + \mathcal{L}_1(t) + \lambda \, \mathrm{Id}_n - \frac{1}{2} \{J(t), \cdot\}. \tag{2.20}$$

La notazione σ_{t_-} significa che, nel caso ci sia un salto al tempo t, il valore appena prima del salto σ_{t_-} è assunto come valore del processo σ. Ciò significa che, la soluzione può essere presa continua da destra e con limite finito a sinistra (cadlag) e σ_{t_-} è proprio quel limite da sinistra.

Teoremi di esistenza e unicità per l'EDS lineare

Il primo passo nella costruzione della teoria è dare i teoremi di esistenza e unicità della soluzione dell'EDS lineare (2.18) e descrivere alcune proprietà della soluzione. Per dimostrare tali teoremi è tecnicamente utile trattare a parte il contributo dei salti.

Nel caso della sola parte con drift e Wiener della (2.18), cioè senza il contributo dei salti, otteniamo l'equazione lineare per un processo ξ

$$\mathrm{d}\xi_t = \widetilde{\mathcal{L}}(t)[\,\xi_t\,]\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R} \mathcal{R}_j(t)[\xi_t]\,\mathrm{d}W_j(t). \tag{2.21}$$

Ci servirà anche la *soluzione fondamentale* $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)$ dell'EDS lineare (2.21) che sarà un processo a valori negli operatori su M^n

$$\widetilde{\mathcal{A}}(t,s) = \mathrm{Id}_n + \int_s^t \widetilde{\mathcal{L}}(r)\circ\widetilde{\mathcal{A}}(r,s)\,\mathrm{d}r + \sum_{j=1}^{m_R}\int_s^t \mathcal{R}_j(r)\circ\widetilde{\mathcal{A}}(r,s)\,\mathrm{d}W_j(r); \quad (2.22)$$

si noti che abbiamo scritto quest'equazione per un tempo iniziale arbitrario s, con $0 \le s \le t$.

Grazie alle proprietà sui coefficienti richieste nell'Assunzione 2.2 si ha il Lemma seguente.

Lemma 2.5. *Sotto le Assunzioni 2.2 e 2.4 l'equazione lineare* (2.21) *ammette soluzioni forti e vale l'unicità per traiettorie e in legge.*

La dimostrazione di questo Lemma segue, riadattandola, quella del Teorema 3.3 in [4].

Dimostrazione. Le affermazioni del Lemma seguono dal Teorema A.8 una volta verificate l'ipotesi di globale lipschitzianità dei coefficienti A.1 e quella di crescita lineare A.3.

Verifichiamo allora le ipotesi A.1 e A.3 per $t \in [0,T]$. Ricordiamo le proprietà delle norme di matrici riportate in Appendice A, Sezione A.1.2, e in particolare le equazioni (A.11), (A.12) e (A.13) che saranno utili qui di seguito. Identifichiamo ora gli operatori R_j che compaiono in $\widetilde{\mathcal{L}}(t)$ con $D_1,\dots,D_{m_R}$ e gli operatori L_l con $D_{m_R+1},\dots,D_{m_R+m_L}$. Quest'assunzione ci permette, usando gli operatori $D_j(t)$ per $j = 1,\dots,m_R+m_L$, una scrittura compatta delle disuguaglianze che seguono.

Ricordando l'Osservazione 2.3 possiamo definire

$$l_T := \max\left(\sup_{t\in[0,T]}\|H(t)\|,\ \sup_{t\in[0,T]}\left\|\sum_{j=1}^{m_R+m_L} D_j(t)^* D_j(t)\right\|,\ \sup_{t\in[0,T]}\big\|J(t)\big\|\right); \quad (2.23)$$

allora si ha $l_T < +\infty$ e inoltre vale

$$\|D_j(t)\|^2 = \|D_j(t)^* D_j(t)\| \le l_T. \quad (2.24)$$

Quindi possiamo scrivere per $\widetilde{\mathcal{L}}(t)[\tau]$ la seguente stima

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{L}}(t)[\tau]\|_2 &\le 2\|H(t)\tau\|_2 + \sum_{j=1}^{m_R+m_L}\left\|D_j(t)\tau D_j(t)^*\right\|_2 + \left\|\sum_{j=1}^{m_R+m_L} D_j(t)^* D_j(t)\tau\right\|_2 \\ &+ \big\|J(t)\tau\big\|_2 + \lambda\|\tau\|_2 \le 2\|H(t)\|\|\tau\|_2 + \sum_{j=1}^{m_R+m_L}\left\|D_j(t)^* D_j(t)\right\|\|\tau\|_2 \\ &+ \left\|\sum_{j=1}^{m_R+m_L} D_j(t)^* D_j(t)\right\|\|\tau\|_2 + \big\|J(t)\big\|\|\tau\|_2 + \lambda\|\tau\|_2 \\ &\le \Big\{\left[(4+m_R+m_L)\,l_T\right]+\lambda\Big\}\|\tau\|_2. \quad (2.25)\end{aligned}$$

Dalla linearità di $\widetilde{\mathcal{L}}(t)[\xi_t]$ si ha che la stima (2.25) implica sia la crescita sub-lineare che la globale lipschitzianità.

Restano da studiare i termini relativi alla componente diffusiva del Wiener con il coefficiente $\mathcal{R}_j(t)[\tau] = R_j(t)\tau + \tau R_j(t)^*$. Dalla (2.24) e ricordando la riscrittura degli R_j come $D_1, \dots, D_{m_R}$ si ha

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m_R} \left\|\mathcal{R}_j(t)[\tau]\right\|_2^2 &\leq 2 \sum_{j=1}^{m_R} \left(\left\|D_j(t)\tau\right\|_2^2 + \left\|\tau D_j(t)^*\right\|_2^2\right) \\ &\leq 4 \sum_{j=1}^{m_R} \left\|D_j(t)\right\|^2 \|\tau\|_2^2 \leq 4\ m_R\, l_T \|\tau\|_2^2. \qquad (2.26)\end{aligned}$$

E' così provata, con la stima (2.26), sia la crescita sub-lineare che la globale lipschitzianità dei coefficienti della parte del Wiener dell'equazione (2.21). Abbiamo così verificato di rientrare nelle ipotesi presentate nella sezione A.4.2, ossia nelle ipotesi del Teorema A.8. □

Lemma 2.6. *Sotto le Assunzioni 2.2 e 2.4 la soluzione ξ_t dell'equazione lineare* (2.21), *con condizione iniziale $\xi_0 \geq 0$, è non negativa. L'equazione* (2.22) *ammette soluzione $\widetilde{\mathcal{A}}$, che è unica per traiettorie, completamente positiva e continua in t. La mappa stocastica $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)$ è anche $\mathcal{F}_t^s$-misurabile e indipendente da $\mathcal{F}_s$. Inoltre si ha quasi certamente*

$$\forall\ 0 \leq s \leq r \leq t, \quad \widetilde{\mathcal{A}}(t,r) \circ \widetilde{\mathcal{A}}(r,s) = \widetilde{\mathcal{A}}(t,s), \qquad \xi_t = \widetilde{\mathcal{A}}(t,s)[\xi_s]. \quad (2.27)$$

Dimostrazione. La prova dell'esistenza e dell'unicità della soluzione $\widetilde{\mathcal{A}}$ dell'equazione (2.22) si basa sulle stime seguenti

$$\begin{aligned}&\sum_{k,\,l=1}^{n} \|\widetilde{\mathcal{L}}(t) \circ \widetilde{\mathcal{A}}(t,s)\,[\,|k\rangle\langle l|\,]\,\|_2^2 \\ &\qquad\leq \left((4 + m_R + m_L)l_T + \lambda\right)^2 \sum_{k,\,l=1}^{n} \|\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)\,[\,|k\rangle\langle l|\,]\,\|_2^2, \quad (2.28)\end{aligned}$$

$$\sum_{k,\,l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_R} \|\mathcal{R}_j(t) \circ \widetilde{\mathcal{A}}(t,s)\,[\,|k\rangle\langle l|\,]\,\|_2^2 \leq 4\, m_R\, l_T \sum_{k,\,l=1}^{n} \|\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)\,[\,|k\rangle\langle l|\,]\,\|_2^2, \quad (2.29)$$

dove $|k\rangle = e_k$ è il sistema ortonormale completo su $\mathcal{H}$, considerato nella Sezione 2.1. Con le stime (2.28) e (2.29) sono verificate sia la crescita sub-lineare che la globale lipschitzianità dei coefficienti dell'equazione (2.22). Abbiamo così verificato di rientrare nelle ipotesi del Teorema A.8.

La continuità in t di σ_t e $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)$ deriva dall'aver scelto una base stocastica in ipotesi usuali; la continuità discenderà allora dalla definizione di soluzioni forti (si veda in merito la Definizione A.5). Il fatto che $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)$ sia

$\mathcal{F}_t^s-$misurabile deriva dall'esistenza di soluzioni forti e uniche per traiettorie dell'equazione (2.22). Il fatto, invece, che $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)$ sia indipendente da $\mathcal{F}_s$ discende dall'indipendenza degli incrementi dei processi di Wiener in gioco.

Per dimostrare la completa positività di $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)$ bisogna passare attraverso la rappresentazione dell'equazione lineare in esame sullo spazio di Hilbert. Questo tipo di costruzione è d'interesse di per sé, ma non è scopo di questo lavoro presentare la formulazione delle misurazioni continuate sugli spazi di Hilbert. Ci limiteremo ad introdurre pochi ingredienti e proprietà utili per raggiungere il nostro obiettivo, ossia dimostrare la completa positività della mappa $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)$.

Consideriamo la seguente equazione lineare per un processo ψ_t a valori in $\mathcal{H}$

$$\mathrm{d}\psi_t \;=\; K(t)\,\psi_t\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R+m_L} D_j(t)\,\psi_t\,\mathrm{d}W_j(t), \tag{2.30}$$

dove

$$K(t) = -\,\mathrm{i}H(t)\; - \frac{1}{2}\sum_j R_j(t)^* R_j(t)\; - \frac{1}{2}\sum_l L_l(t)^* L_l(t) - \frac{1}{2}J(t) + \frac{\lambda}{2}; \tag{2.31}$$

abbiamo aggiunto altri m_L processi di Wiener tutti con incrementi indipendenti dal passato e indipendenti dagli altri m_R Wiener preesistenti. Di questa equazione ci interessa il propagatore (o matrice fondamentale) definito dall'equazione

$$\begin{cases} \mathrm{d}A_t^s = K(t)\,A_t^s\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R+m_L}\; D_j(t)\,A_t^s\,\mathrm{d}W_j(t), \\ A_s^s = \mathbb{1}, \quad 0 \le s \le t. \end{cases} \tag{2.32}$$

L'equazione (2.32) ammette soluzioni forti continue che sono uniche per traiettorie e in legge. La prova di quest'affermazione si fonda sulla verifica delle condizioni di crescita sub-lineare e di globale lipschitzianità dei coefficienti dell'equazione (2.32) e quindi sull'utilizzo del Teorema A.8.

Allora possiamo verificare che

$$\xi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[A_t^0 \rho A_t^{0*} | \mathcal{F}_{\mathrm{OSS}}], \tag{2.33}$$

dove $\mathcal{F}_{\mathrm{OSS}}$ è la σ-algebra generata dai Wiener osservati, W_j, per $j = 1, \cdots, m_R$ mentre la media $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\cdot]$ è fatta rispetto agli m_L Wiener non osservati.

A tale scopo introduciamo

$$\zeta_t := A_t^0 \rho A_t^{0*} \tag{2.34}$$

e calcoliamo, usando la scrittura (2.32)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\zeta_t &= (\mathrm{d}A_t^0)\,\rho\,A_t^{0*} + A_t^0\,\rho\,(\mathrm{d}A_t^{0*}) + (\mathrm{d}A_t^0)\,\rho\,(\mathrm{d}A_t^{0*}) \\
&= \left(K(t)\,A_t^0\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R+m_L} D_j(t)\,A_t^0\,\mathrm{d}W_j(t)\right)\rho\,A_t^{0*} \\
&\quad + A_t^0\,\rho\left(A_t^{0*}\,K^*(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R+m_L} A_t^{0*}\,D_j(t)^*\,\mathrm{d}W_j(t)\right) \\
&\quad + \left(K(t)\,A_t^0\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R+m_L} D_j(t)\,A_t^0\,\mathrm{d}W_j(t)\right)\rho\Bigg(A_t^{0*}\,K^*(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m_R+m_L} A_t^{0*}\,D_j(t)^*\,\mathrm{d}W_j(t)\Bigg) = K(t)\,\zeta_t\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R+m_L} D_j(t)\,\zeta_t\,\mathrm{d}W_j(t) \\
&\quad + \zeta_t\,K(t)^*\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R+m_L} \zeta_t\,D_j(t)^*\,\mathrm{d}W_j(t) + \sum_{j=1}^{m_R+m_L} D_j(t)\,\zeta_t\,D_j(t)^*\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Allora

$$\begin{aligned}
\zeta_t = \zeta_0 + \int_0^t &\Big((K(s) + K(s)^*)\,\zeta_s + \sum_{j=1}^{m_R+m_L} D_j(s)\,\zeta_s\,D_j(s)^*\Big)\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{j=1}^{m_R+m_L} \int_0^t \Big(D_j(t)\,\zeta_t + \zeta_t\,D_j(t)^*\Big)\mathrm{d}W_j(t).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,\zeta_t\,|\mathcal{F}_{\mathrm{OSS}}] = \zeta_0 + \int_0^t &\Big((K(s) + K(s)^*)\,\zeta_s + \sum_{j=1}^{m_R+m_L} D_j(s)\,\zeta_s\,D_j(s)^*\Big)\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{j=1}^{m_R} \int_0^t \Big(D_j(s)\,\zeta_s + \zeta_s\,D_j(s)^*\Big)\mathrm{d}W_j(s) \\
+ \sum_{j=m_R+1}^{m_R+m_L} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} &\left[\int_0^t \Big(D_j(s)\,\zeta_s + \zeta_s\,D_j(s)^*\Big)\mathrm{d}W_j(s)\,\middle|\,\mathcal{F}_{\mathrm{OSS}}\right].
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Analizziamo l'ultimo termine della somma (2.37). I W_j sono indipendenti da $\mathcal{F}_{\mathrm{OSS}}$ e da $\mathcal{F}_s$ e quindi sono indipendenti da $\mathcal{F}_s \vee \mathcal{F}_{\mathrm{OSS}}$, mentre i coefficienti $D_j(s)$ sono $\mathcal{F}_s$-misurabili. Posso quindi spezzare il valore atteso come prodotto di valori attesi e ricordando la proprietà della media nulla del Wiener si ha che questo termine è nullo.

Grazie alle scritture (2.31) e (2.20), rispettivamente di $K(t)$ e di $\widetilde{\mathcal{L}}(t)$, è semplice verificare che $(K(t)+K(t)^*)\,\tau+\sum_{j=1}^{m_R+m_L} D_j(t)\,\tau\,D_j(t)^* = \widetilde{\mathcal{L}}(t)[\tau]$. Ne segue che è verificata l'uguaglianza (2.33).

Dalla (2.33), preso un tempo s, $0 \leq s < t$ e per ogni condizione iniziale, si ha quasi certamente, per l'unicità della soluzione $\widetilde{\mathcal{A}}$

$$\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)[\,\cdot\,] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[A_t^s \cdot A_t^{s*} | \mathcal{F}_{\mathrm{OSS}}]. \tag{2.38}$$

Il valore atteso condizionale, però, è una mappa completamente positiva e lo stesso vale per mappe del tipo $\rho \mapsto A\rho A^*$. Ne segue quindi la completa positività di $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)$. Essendo $\widetilde{\mathcal{A}}(t,0)$ completamente positivo, se inizialmente abbiamo $\sigma_0 = \rho \geq 0$ allora $\sigma_t \geq 0$, $\forall\, t$. $\square$

La completa positività è solitamente assai complessa da verificare a meno di non essere in grado di arrivare ad una scrittura che si presenti CP a vista. Per esempio, nel nostro caso, si ha la mappa $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)[\cdot] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[A_t^s \cdot A_t^{s*} | \mathcal{F}_{\mathrm{OSS}}]$. Dalla Definizione 2.1 di completa positivivà si ha che per ogni intero m e per ogni scelta di vettori ϕ_i, ψ_i in $\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^n$, $i = 1, \ldots, m$, vale

$$\sum_{i,j=1}^{m} \langle \phi_i \,|\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\, A_t^s \,|\psi_i\,\rangle\langle\, \psi_j | A_t^{s\,*}]\, \phi_j \rangle \;=\; \sum_{i,j=1}^{m} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\, \left| \langle \phi_i \,|\, A_t^s\, \psi_j \rangle \,\right|^2] \geq 0, \tag{2.39}$$

che ci dà appunto la completa positività. E' la rappresentazione (2.38) ad essere cruciale per la dimostrazione della completa positività mentre sembra difficile ottenere la completa positività direttamente dalla struttura dell'equazione (2.22).

Grazie ai risultati dimostrati in precedenza è possibile affermare che partendo da una condizione iniziale ξ_0 positiva, allora non solo $\xi_t \geq 0$ ma anche $\int_\Omega \mathrm{Tr}\{\xi_t(\omega)\}\mathbb{Q}(\mathrm{d}\omega) \geq 0$. E' inoltre possibile verificare che $\mathbb{Q}\,[\,\mathrm{Tr}\{\xi_t\} = 0\,] = 0$ o anche analogamente $\mathbb{Q}\,[\,\mathrm{Tr}\{\xi_t\} > 0\,] = 1$.

Estendiamo il risultato appena ottenuto all'equazione lineare completa (2.19) qui riportata

$$\begin{aligned}\sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t \widetilde{\mathcal{L}}(s)[\sigma_{s_-}]\mathrm{d}s + \sum_j \int_0^t \mathcal{R}_j(s)[\sigma_{s_-}]\mathrm{d}W_j(s) \\ + \sum_k \int_0^t \left(\frac{\mathcal{J}_k(s)[\sigma_{s_-}]}{\lambda_k} - \sigma_{s_-} \right) \mathrm{d}N_k(s).\end{aligned} \tag{2.40}$$

Per dare l'esistenza e l'unicità per traiettorie della soluzione dell'equazione (2.40) utilizzeremo, adattandolo al nostro caso, il Teorema 7, pag. 197 da [16], presentato e commentato nell'Appendice C. Possiamo quindi rienunciare il Teorema C.1 nel nostro caso come segue

Teorema 2.7. *Sotto le Assunzioni 2.2 e 2.4 l'EDS* (2.40)*, per ogni condizione iniziale* $\sigma_0 = \rho \in M^n$*, ammette una soluzione* $\sigma_t \in M^n$ *cadlag che non esplode in tempo finito e tale soluzione è unica per traiettorie.*

Prendiamo dall'EDS lineare con componente diffusiva e salti (2.40) per stati σ_t non normalizzati e consideriamo ora la *soluzione fondamentale* $\mathcal{A}(t,s)$ di tale equazione, cioè la mappa lineare che soddisfa

$$\mathcal{A}(t,s) = \mathrm{Id}_n + \int_s^t \widetilde{\mathcal{L}}(r) \circ \mathcal{A}(r,s)\,\mathrm{d}r + \sum_{j=1}^{m_R} \int_s^t \mathcal{R}_j(r) \circ \mathcal{A}(r,s)\,\mathrm{d}W_j(r)$$
$$+ \sum_{k=1}^{m_J} \int_s^t \left(\frac{\mathcal{J}_k(r)}{\lambda_k} - \mathrm{Id}_n \right) \circ \mathcal{A}(r,s)\,\mathrm{d}N_k(r). \quad (2.41)$$

Proposizione 2.8. *L'equazione* (2.41) *ammette soluzione* $\mathcal{A}$*, che è unica per traiettorie, è completamente positiva e continua in* t*.* $\mathcal{A}(t,s)$ *è* $\mathcal{F}_t^s$*-misurabile e indipendente da* $\mathcal{F}_s$*. Inoltre si ha quasi certamente*

$$\forall\ 0 \le s \le r \le t \quad \mathcal{A}(t,r) \circ \mathcal{A}(r,s) = \mathcal{A}(t,s), \qquad \sigma_t = \mathcal{A}(t,s)[\sigma_s]. \quad (2.42)$$

Dimostrazione. La continuità in t di $\mathcal{A}(t,s)$ deriva dall'aver scelto una base stocastica in ipotesi usuali; la continuità discenderà allora dalla definizione di soluzioni forti (si veda in merito la Definizione A.5). Il fatto che $\mathcal{A}(t,s)$ sia $\mathcal{F}_t^s$-misurabile deriva dall'esistenza di soluzioni forti e uniche per traiettorie dell'equazione (2.41). Il fatto, invece, che $\mathcal{A}(t,s)$ sia indipendente da $\mathcal{F}_s$ discende dall'indipendenza degli incrementi dei processi di Wiener e di Poisson in gioco.

Interessiamoci ora di dimostrare l'esistenza e l'unicità per traiettorie della soluzione $\mathcal{A}$. Nel Teorema 2.7 è stata verificata l'esistenza e l'unicità per traiettorie della soluzione σ_t. Supponiamo ora che esistano due soluzioni della (2.41) che chiamiamo $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$. Prendiamo una condizione iniziale $\sigma_0 = \rho \in M^n$, allora si ha $\sigma_t' = \mathcal{A}_1(t,0)[\sigma_0]$ e $\sigma_t'' = \mathcal{A}_2(t,0)[\sigma_0]$. Dall'unicità della soluzione dell'EDS (2.40) si ha che $\sigma_t' = \sigma_t''$ e quindi, dalla linearità dell'EDS (2.41) si ha $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$.

Per ottenere la completa positività di $\mathcal{A}(t,s)$ una via percorribile è quella di passare alla teoria sugli spazi di Hilbert come fatto nella dimostrazione del Lemma 2.6. Una via alternativa è quella che si fonda sulla scrittura di $\mathcal{A}(t,s)$ attraverso $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)$ e quindi sulla completa positività di $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s)$.

Cominciamo con l'osservare che se si ha un map $\widetilde{\mathcal{A}}(t,s;\omega)$ completamente positivo allora anche i map $\widetilde{\mathcal{A}}(T(\omega),s;\omega)$ e $\widetilde{\mathcal{A}}(t,T(\omega);\omega)$ sono completamente positivi, dove $T(\omega)$ è un tempo d'arresto. Consideriamo la traiettoria ω dove si hanno i salti k_1 in t_1, k_2 in t_2 ecc. sarà possibile scrivere la soluzione σ_t dell'EDS (2.40), con condizione iniziale $\sigma_0 = \rho \in M^n$, come segue

$$\sigma_t(\omega) = \frac{1}{\lambda_{k_1} \cdots , \lambda_{k_n}} \widetilde{\mathcal{A}}(t, t_n; \omega) \circ \mathcal{J}_{k_n}(t_n) \circ \cdots \circ \mathcal{J}_{k_1}(t_1) \circ \widetilde{\mathcal{A}}(t_1, 0; \omega)[\rho]. \tag{2.43}$$

Dato che la (2.43) vale per ogni ρ e che tutti gli operatori che intervengono sono CP, questa equazione mostra la completa positività di $\widetilde{\mathcal{A}}(t, 0)$. Analogamente si mostra che $\widetilde{\mathcal{A}}(t, s)$ è CP. □

La formula (2.43) del teorema precedente fornisce un'interessante scrittura per $\widetilde{\mathcal{A}}(t, s)$. Consideriamo le coppie di variabili aleatorie $(T_n; K_n)$ dove i T_n sono i tempi di salto mentre K_n è una variabile aleatoria che prende un insieme finito di valori e che ci indica l'indice del processo di conteggio che salta al tempo T_n. La (2.43) può essere scritta come

$$\begin{aligned} \sigma_t(\omega) = {} & \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} \lambda_{K_j(\omega)}} \widetilde{\mathcal{A}}(t, T_n(\omega); \omega) \circ \mathcal{J}_{K_n(\omega)}(T_n(\omega)) \\ & \circ \widetilde{\mathcal{A}}(T_n(\omega), T_{n-1}(\omega); \omega) \circ \cdots \circ \mathcal{J}_{K_1(\omega)}(T_1(\omega)) \widetilde{\mathcal{A}}(T_1(\omega), 0; \omega)[\rho]. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Se introduciamo la variabile aleatoria

$$q_t(\omega) = \max\{j : T_j(\omega) \leq t\}$$

e poniamo $T_0 = 0$ possiamo scrivere la mappa lineare $\mathcal{A}(t, 0)$ come

$$\mathcal{A}(t, 0) = \widetilde{\mathcal{A}}(t, T_q) \overleftarrow{\prod_{j=1}^{q_t}} \frac{1}{\lambda_{K_j}} \mathcal{J}_{K_j}(T_j) \circ \widetilde{\mathcal{A}}(T_j, T_{j-1}), \tag{2.45}$$

dove $\overleftarrow{\prod}$ indica il prodotto cronologicamente ordinato per tempi crescenti da destra verso sinistra, che è solo una scrittura compatta per l'ordinamento che appare nella (2.44). Per scrivere $\mathcal{A}(t, s)$, $0 \leq s < t$, introduciamo anche la variabile aleatoria

$$g_s(\omega) = \min\{j : T_j(\omega) > s\};$$

allora si ha

$$\mathcal{A}(t, s) = \widetilde{\mathcal{A}}(t, T_q) \overleftarrow{\prod_{j=g_s}^{q_t}} \frac{1}{\lambda_{K_j}} \mathcal{J}_{K_j}(T_j) \circ \widetilde{\mathcal{A}}(T_j, T_{j-1}). \tag{2.46}$$

Per risultati analoghi al Teorema 2.7 rimandiamo anche al testo di Ikeda e Watanabe [9], teorema 9.1, pag. 231.

Teorema 2.9. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{Q})$ una base stocastica si consideri l'equazione*

$$\mathrm{d}X(t) = b(X(t))\,\mathrm{d}t + \sum_j \sigma_j(X(t))\mathrm{d}W_j(t) + \sum_k f_k(X(t))\,(\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k \mathrm{d}t)\,, \tag{2.47}$$

dove i $W_j(t)$ sono processi di Wiener standard (continui) e gli $N_k(t)$ sono processi di Poisson con intensità λ_k.

Se $b(x)$, $\sigma(x)$ e $f(x)$ soddisfano

$$\|b(x)\|^2 + \|\sigma(x)\|^2 + \|f(x)\|^2 \leq k(1 + |\,x|^2), \tag{2.48}$$

$$\|b(x) - b(y)\|^2 + \|\sigma(x) - \sigma(y)\|^2 + \|f(x) - f(y)\|^2 \leq k\,|\,x - y|^2, \tag{2.49}$$

allora esiste un processo soluzione $X(t)$ dell'equazione (2.47), *$(\mathcal{F}_t)$-adattato, cadlag (continuo a destra e con limite finito a sinistra) e tale soluzione è unica per traiettorie e in legge.*

Per la dimostrazione del teorema appena enunciato si veda [9].

Si noti come la condizione (2.49) è la condizione di Lipschitz globale sui coefficienti dell'equazione (2.47), mentre la (2.48) è la condizione di crescita sub-lineare. In completa analogia a quanto accade con le equazioni a sola componente diffusiva queste condizioni garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione della (2.47); si veda in merito la sezione dell'Appendice A.4.2.

Osserviamo che a differenza del Teorema 2.7 che abbiamo dimostrato precedentemente, il Teorema 2.9 di esistenza e unicità della soluzione si riferisce al caso in cui i coefficienti $b(x)$, $\sigma(x)$ e $f(x)$ non dipendono dal tempo.

2.4 Probabilità fisiche

Usiamo σ_t per costruire una nuova misura di probabilità la cui densità di probabilità sarà data da $p_t := \mathrm{Tr}\{\sigma_t\}$ e la misura di probabilità sarà definita da $p_t(\omega)\,\mathbb{Q}(\mathrm{d}\omega)$. Fissiamo una condizione iniziale $\sigma_0 = \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$.

Il ruolo di p_t è quello di densità della probabilità fisica. Inoltre definiamo *lo stato aleatorio a posteriori al tempo t* come

$$\rho_t := \begin{cases} \frac{\sigma_t}{p_t} = \frac{\sigma_t}{\mathrm{Tr}\{\sigma_t\}} & \text{se } p_t > 0 \\ \widetilde{\rho} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) & \text{se } p_t = 0 \end{cases} \tag{2.50}$$

dove $\widetilde{\rho}$ è uno stato arbitrario preventivamente fissato. Questo è lo stato che è attribuito al sistema quantistico al tempo t, noto il risultato della misurazione fino a t. Dall'equazione (2.18), prendendone la traccia e ricordando che

$$\mathrm{Tr}\{\mathcal{L}(t)[\sigma_{t-}]\} = 0, \tag{2.51}$$

abbiamo che p_t soddisfa la seguente equazione di Doléans

$$\mathrm{d}p_t = p_{t_-}\left\{\sum_{j=1}^{m_R} m_j(t)\,\mathrm{d}W_j(t) + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{I_k(t)}{\lambda_k}-1\right)\Big(\mathrm{d}N_k(t)-\lambda_k\,\mathrm{d}t\Big)\right\}, \qquad (2.52)$$

dove

$$m_j(t) = \mathrm{Tr}\left\{\left(R_j(t)+R_j(t)^*\right)\rho_{t_-}\right\}, \qquad I_k(t) = \mathrm{Tr}\left\{J_k(t)\rho_{t_-}\right\}. \qquad (2.53)$$

La soluzione dell'equazione (2.52) con condizione iniziale $p_0 = 1$ è

$$\begin{aligned} p_t = \exp\Bigg\{&\sum_{j=1}^{m_R}\left[\int_0^t m_j(s)\,\mathrm{d}W_j(s) - \frac{1}{2}\int_0^t m_j(s)^2\mathrm{d}s\right] \\ &+ \sum_{k=1}^{m_J}\left[\int_0^t \ln\left(\frac{I_k(s)}{\lambda_k}\right)\mathrm{d}N_k(s) + \int_0^t (\lambda_k - I_k(s))\,\mathrm{d}s\right]\Bigg\}. \end{aligned} \qquad (2.54)$$

Se si differenzia infatti l'equazione (2.54) si ottiene proprio la (2.52).

Ricordiamo che T_n^k è l'n-esimo tempo di salto del processo di Poisson $N_k(t)$, allora la (2.54) diventa

$$\begin{aligned} p_t = \exp\Bigg\{&\sum_{j=1}^{m_R}\left[\int_0^t m_j(s)\,\mathrm{d}W_j(s) - \frac{1}{2}\int_0^t m_j(s)^2\mathrm{d}s\right] \\ &+ \sum_{k=1}^{m_J}\int_0^t (\lambda_k - I_k(s))\,\mathrm{d}s\Bigg\}\prod_{k=1}^{m_J}\prod_{n=1}^{\max\{r:\, T_r^k\leq t\}}\left(\frac{I_k(T_n^k)}{\lambda_k}\right). \end{aligned} \qquad (2.55)$$

Per il calcolo differenziale con processi di Poisson $N_k(t)$ rimandiamo alla Sezione B.5.

Notiamo che la scrittura (2.54) di p_t ha senso euristico a causa del possibile annullamento di $I_k(t)$, mentre la (2.55) è una scrittura rigorosa di p_t. La (2.55) si ottiene grazie al fatto che è possibile scrivere la (2.54) come segue

$$\begin{aligned} p_t &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{m_R}\left[\int_0^t m_j(s)\,\mathrm{d}W_j(s) - \frac{1}{2}\int_0^t m_j(s)^2\mathrm{d}s\right]\right\} \\ &\quad\times\prod_{k=1}^{m_J}\exp\left\{\int_0^t (\lambda_k - I_k(s))\,\mathrm{d}s + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{I_k(T_n^k)}{\lambda_k}\right)\mathbb{1}_{(0,T]}(T_n^k)\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{m_R}\left[\int_0^t m_j(s)\,\mathrm{d}W_j(s) - \frac{1}{2}\int_0^t m_j(s)^2\mathrm{d}s\right]\right\} \\ &\quad\prod_{k=1}^{m_J}\left[\exp\left\{\int_0^t (\lambda_k - I_k(s))\,\mathrm{d}s\right\}\prod_{n=1}^{\max\{r:\, T_r^k\leq t\}}\left(\frac{I_k(T_n^k)}{\lambda_k}\right)\right]. \end{aligned} \qquad (2.56)$$

Si noti che è possibile scrivere la produttoria dell'equazione (2.56) in modo alternativo come segue

$$\prod_{n=1}^{\max\{r:\, T_r^k \leq t\}} \left(\frac{I_k(T_n^k)}{\lambda_k}\right) = \prod_{0\leq s\leq t} \left(\frac{I_k(s)}{\lambda_k}\right)^{\Delta N_k(s)} \tag{2.57}$$

dove la produttoria è solo apparentemente su indice continuo; in realtà si ha un effettivo incremento solo quando $\Delta N_k(s) = 1$ e cioè nei tempi di salto dei processi di Poisson. Inoltre nella formula (2.57) si attua la convenzione $0^0 = 1$. E' quindi il termine in (2.57) che può far annullare $p_t(\omega)$; si annullerà sulla traiettoria ω se per qualche k e qualche n, con $T_n^k(\omega) \leq t$, si ha $I_k(T_n^k(\omega);\omega) = 0$.

Osservazione 2.10. Svolgiamo una discussione sui casi di annullamento di $I_k(T_n^k(\omega);\omega)$. Dalla (2.53) segue che, sulla traiettoria ω

$$p_{t-}(\omega)\, I_k(t;\omega) \;=\; \mathrm{Tr}\left\{J_k(t)\sigma_{t_-}(\omega)\right\} \;=\; \mathrm{Tr}\left\{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_-}(\omega)]\right\}. \tag{2.58}$$

- Se $\sigma_{t_-}(\omega) = 0 \;\Rightarrow\; p_{t-}(\omega) = 0$ e $I_k(t;\omega)$ assume un valore arbitrario ma $p_T(\omega) = 0$ per ogni $T \geq t$, proprio per la scrittura stessa di p_t.
- Se invece $\sigma_{t_-}(\omega) > 0$ e $\mathrm{Tr}\left\{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_-}(\omega)]\right\} = \|\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_-}(\omega)]\|_1 = 0$ (l'uguaglianza tra traccia e norma 1 discende dalla positività) allora $p_{t-}(\omega) = 0$ e $I_k(t;\omega) = 0$.

Abbiamo quindi notato come p_t possa risultare nullo nel caso di $I_k(t;\omega) = 0$, per qualche $k \in \{1, 2, \ldots, m_J\}$. E' in tal senso importante quindi la scrittura formale (2.55) dell'equazione (2.52) per p_t. Grazie infatti a tale scrittura è possibile osservare che nel caso si abbia $I_k(T_n^k) = 0$ si ottiene semplicemente un contributo nullo. Bisogna comunque tener conto che in tal caso non sarebbe possibile invertire p_t. E' utile considerare quindi l'insieme

$$\mathcal{E}_T := \{\omega \in \Omega : p_T(\omega) > 0\}. \tag{2.59}$$

Su $\mathcal{E}_T$ si ha $p_t(\omega) > 0$, $\forall\, t \leq T$, e quindi su tale insieme sarà sempre possibile l'inversione di p_t. Lavoreremo in seguito su $\mathcal{E}_T$; il complementare di $\mathcal{E}_T$, che è l'insieme di tutte quelle traiettorie per cui p_T è nullo, ha misura nulla rispetto alla misura di probabilità $\mathbb{P}_T$. Quindi l'insieme degli stati normalizzati ρ_t può essere mal definito su un insieme di misura $\mathbb{Q}$ non nulla, ma di misura $\mathbb{P}_T$ nulla.

Segue una proprietà importante dell'equazione (2.18).

Proposizione 2.11. *Data l'equazione* (2.18) *allora* $\mathrm{Tr}\{\sigma_t\} = p_t$ *è una* $\mathbb{Q}$*-martingala a media uno. Inoltre* p_t *può essere scritto in modo formale* *come segue*

$$p_t = \exp\Bigg\{\sum_{j=1}^{m_R}\left[\int_0^t m_j(s)\,\mathrm{d}W_j(s) - \frac{1}{2}\int_0^t m_j(s)^2\mathrm{d}s\right] + \sum_{k=1}^{m_J}\int_0^t (\lambda_k - I_k(s))\,\mathrm{d}s\Bigg\}\prod_{k=1}^{m_J}\prod_{n=1}^{\max\{r:\,T_r^k\le t\}}\left(\frac{I_k(T_n^k)}{\lambda_k}\right). \tag{2.60}$$

Dimostrazione. Definiamo

$$Z_t := \sum_{j=1}^{m_R}\left[\int_0^t m_j(s)\,\mathrm{d}W_j(s) - \frac{1}{2}\int_0^t m_j(s)^2\,\mathrm{d}s\right] + \sum_{k=1}^{m_J}\left[\int_0^t \ln\left(\frac{I_k(s)}{\lambda_k}\right)\mathrm{d}N_k(s) + \int_0^t (\lambda_k - I_k(s))\,\mathrm{d}s\right], \tag{2.61}$$

$$X_t := \sum_{j=1}^{m_R}\int_0^t m_j(s)\,\mathrm{d}W_j(s) + \sum_{k=1}^{m_J}\int_0^t \left(\frac{I_k(s)}{\lambda_k} - 1\right)\big(\mathrm{d}N_k(s) - \lambda_k\,\mathrm{d}s\big). \tag{2.62}$$

Poiché X_t è una $\mathbb{Q}$-martingala locale allora anche $p_t = \mathcal{E}(X_t) = \exp\{Z_t\}$ lo è (si veda in merito il Teorema 2, pag. 124, in [12]), dove $\mathcal{E}(X_t)$ è l'esponenziale stocastico di X_t. Abbiamo dunque che p_t è una $\mathbb{Q}$-martingala locale positiva; allora p_t è una super martingala e si ha che

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,p_t\,] \le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,p_0\,] = 1. \tag{2.63}$$

Il Lemma 7 in [11] ci dice che per stabilire l'uguaglianza in (2.63), cioè perché p_t sia una martingala, deve essere verificata la così detta condizione di Kabanov, Liptser e Shiryayev

$$\begin{aligned}&\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{m_R} m_j(s)^2 + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\sqrt{\frac{I_k(s)}{\lambda_k}} - 1\right)^2\lambda_k\right]\mathrm{d}s \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\int_0^t\left[\sum_{j=1}^{m_R} m_j(s)^2 + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\sqrt{I_k(s)} - \sqrt{\lambda_k}\right)^2\right]\mathrm{d}s < +\infty.\end{aligned} \tag{2.64}$$

Grazie alla limitatezza dei coefficienti (2.53) dell'integrale in $[0,t]$ si ha la limitatezza dell'estremo superiore essenziale in (2.64), ne segue che p_t è una $\mathbb{Q}$-martingala. Riportiamo per completezza di seguito la definizione di estremo superiore essenziale.

Definizione 2.12. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile. Per ogni funzione $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ misurabile non negativa poniamo

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f(x) := \inf\big\{\alpha \ge 0; |f^{-1}(\alpha,+\infty)| = 0\big\} \in [0,+\infty]. \tag{2.65}$$

Vogliamo infine mostrare la scrittura (2.60) di p_t. Se riscriviamo X_t separando la parte continua da quella con salti è possibile dimostrare che l'esponenziale stocastico $p_t = \mathcal{E}(X_t)$ è della forma (2.60) grazie al Teorema 1, pag. 122, in [12]. □

La Proposizione 2.11 implica che

$$\mathbb{P}_t(\mathrm{d}\omega) := p_t(\omega)\,\mathbb{Q}(\mathrm{d}\omega)\big|_{\mathcal{F}_t}, \tag{2.66}$$

con $\mathcal{F}_t$ introdotto nell'Assunzione 2.4, è una famiglia consistente di probabilità, quindi se $0 \leq t < T$,

$$\mathbb{P}_T(F) = \mathbb{P}_t(F), \quad \forall F \in \mathcal{F}_t.$$

Queste sono prese come le *probabilità fisiche*.

Osservazione 2.13. Dal teorema di Girsanov e dalle sue generalizzazioni in situazioni con salti abbiamo che, sotto le misure di probabilità fisiche (2.66), i processi

$$\widehat{W}_j(t) = W_j(t) - \int_0^t m_j(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.67}$$

sono dei Wiener standard e indipendenti tra loro e i processi $N_k(t)$ sono processi di conteggio regolari (si veda in merito la Definizione B.4) con intensità stocastica $I_k(t)$. Inoltre per il processo somma, (o *ground process*), dei conteggi $N_k(t)$

$$N(t) := \sum_{k=1}^{m_J} N_k(t), \tag{2.68}$$

vale che

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s}\, \mathbb{P}_T\left[N(t) - N(s) \geq 2\right] = 0. \tag{2.69}$$

Non è possibile avere cioè più di un salto del ground process in un intervallo infinitesimo $\mathrm{d}t$. La natura di questi nuovi processi $\widehat{W}_j(t)$ e $N_k(t)$ e le loro proprietà discendono dai teoremi che generalizzano il teorema di Girsanov-Meyer, si veda in merito [16], Teorema 20, pag 109.

Un approccio euristico per verificare l'Osservazione 2.13, è dimostrare

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}[\,\mathrm{d}N_k(t)\,|\,\mathcal{F}_t^0\,] = I_k(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.70}$$

Per provare la (2.70) introduciamo un'equazione utile. Dall'equazione lineare (2.18) si ha

$$\begin{aligned}\sigma_{t+\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}N_k(t) &= (\sigma_{t-}+\mathrm{d}\sigma_t)\,\mathrm{d}N_k(t)\\ &= \Bigg(\sigma_{t-}+\mathcal{L}(t)[\sigma_{t_-}]\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{m_R}\mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t_-}]\mathrm{d}W_j(t)\\ &+\sum_{k'=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_{k'}(t)[\sigma_{t_-}]}{\lambda_{k'}}-\sigma_{t_-}\right)(\mathrm{d}N_{k'}(t)-\lambda_{k'}\mathrm{d}t)\Bigg)\mathrm{d}N_k(t)\\ &= \frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_-}]}{\lambda_k}\,\mathrm{d}N_k(t). \end{aligned} \tag{2.71}$$

Prendiamo ora una generica variabile aleatoria X adattata in $(0,t]$ (cioè che dipende dai processi $N_k(s)$ e $W_j(s)$ solo per i tempi $s \leq t$). Utilizzeremo, nella verifica dell'equazione (2.70) le seguenti proprietà

· le proprietà del valore atteso condizionato,

· il fatto che $X\mathrm{d}N_k(t)$ sia adattato a $(0,t+\mathrm{d}t]$,

· l'equazione $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{Tr}\{\sigma_t\}\,X]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}[X]$ e l'equazione (2.71),

· l'indipendenza degli incrementi dei processi di Poisson,

· l'equazione della media dei Poisson (B.23),

· la definizione di $I_k(t)$ data in (2.53) e di ρ_t data in (2.50),

· il fatto che la probabilità di avere un salto esattamente al tempo t sia nulla.

Con questi strumenti possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}[X\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}[\mathrm{d}N_k(t)\,|\,\mathcal{F}_t^0]\,] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}[X\mathrm{d}N_k(t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X\,\mathrm{Tr}\{\sigma_{t+\mathrm{d}t}\}\mathrm{d}N_k(t)]\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_-}]}{\lambda_k}\right\}\mathrm{d}N_k(t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X\,\mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t-}]\}\right]\mathrm{d}t\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X\,\mathrm{Tr}\{\sigma_{t-}\}\,\mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\}\right]\mathrm{d}t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X\,\mathrm{Tr}\{\sigma_{t-}\}I_k(t)\right]\mathrm{d}t\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}\left[XI_k(t)\right]\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.72}$$

E' così giustificata l'equazione (2.70).

2.5 Gli stati a posteriori e l'EDS non lineare

Sotto la legge di probabilità fisica $\mathbb{P}_T$, data in (2.66), vogliamo scrivere l'equazione non lineare per lo stato a posteriori ρ_t del sistema quantistico.

Partiamo dall'EDS lineare

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_t = \mathcal{L}(t)[\sigma_{t_-}]\mathrm{d}t &+ \sum_{j=1}^{m_R} \mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t_-}]\mathrm{d}W_j(t) \\
&+ \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_-}]}{\lambda_k} - \sigma_{t_-} \right) (\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k \mathrm{d}t)
\end{aligned} \tag{2.73}
$$

e ricordiamo la scrittura (2.67) per $\widehat{W}_j(t)$ si ha

$$
W_j(t) = \widehat{W}_j(t) + \int_0^t m_j(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.74}
$$

Possiamo allora esprimere il differenziale stocastico di σ_t in termini dei processi di Wiener $\widehat{W}_j(t)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_t = \mathcal{L}(t)[\sigma_{t_-}]\mathrm{d}t &+ \sum_{j=1}^{m_R} \mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t_-}] \left(\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + m_j(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&+ \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_-}]}{\lambda_k} - \sigma_{t_-} \right) (\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k \mathrm{d}t)\,.
\end{aligned} \tag{2.75}
$$

Come già visto nell'Osservazione 2.10 lavoreremo in seguito nell'insieme $\mathcal{E}_T$, introdotto in (2.59), su cui $p_t(\omega) > 0$, $\forall\, t \leq T$. In questo insieme possiamo invertire p_t. Dalla formula (2.54) si ha immediatamente:

$$
\begin{aligned}
(p_t)^{-1} = \exp\Bigg\{ &- \sum_{j=1}^{m_R} \left[\int_0^t m_j(s)\,\mathrm{d}W_j(s) - \frac{1}{2}\int_0^t m_j(s)^2 \mathrm{d}s \right] \\
&- \sum_{k=1}^{m_J} \left[\int_0^t \ln\left(\frac{I_k(s)}{\lambda_k} \right) \mathrm{d}N_k(s) + \int_0^t (\lambda_k - I_k(s))\,\mathrm{d}s \right] \Bigg\} \\
= \exp\Bigg\{ &\sum_{j=1}^{m_R} \left[\int_0^t (-\, m_j(s))\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) - \frac{1}{2}\int_0^t m_j(s)^2 \mathrm{d}s \right] \\
&+ \sum_{k=1}^{m_J} \left[\int_0^t \ln\left(\frac{\lambda_k}{I_k(s)} \right) \mathrm{d}N_k(s) + \int_0^t (I_k(s) - \lambda_k)\,\mathrm{d}s \right] \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.76}
$$

Questa espressione è ben definita $\mathbb{P}_T$ quasi certamente. Dalla formula di Ito ho la scrittura esplicita per $\mathrm{d}\,(p_t)^{-1}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\,(p_t)^{-1} = (p_{t-})^{-1} \Bigg\{ &\sum_{j=1}^{m_R} (-m_j(t))\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) \\
&+ \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\lambda_k}{I_k(t)} - 1 \right) (\mathrm{d}N_k(t) - I_k(t))\mathrm{d}t \Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.77}
$$

e quindi attraverso la formula di Ito per il prodotto ottengo la scrittura per il differenziale dello stato a posteriori ρ_t in quanto $\mathrm{d}\rho_t = \mathrm{d}\left((p_t)^{-1}\sigma_t\right)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left((p_t)^{-1}\sigma_t\right) &= (p_t)^{-1}\mathrm{d}\sigma_t + \mathrm{d}(p_t)^{-1}\sigma_{t-} + \mathrm{d}(p_t)^{-1}\mathrm{d}\sigma_t \\
&= (p_t)^{-1}\Bigg\{\mathcal{L}(t)[\sigma_{t_}]\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R}\mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t_}]\big(\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + m_j(t)\,\mathrm{d}t\big) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_}]}{\lambda_k} - \sigma_{t_}\right)(\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k\mathrm{d}t)\Bigg\} \\
&+ (p_{t-})^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{m_R}(-m_j(t))\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\lambda_k}{I_k(t)} - 1\right)(\mathrm{d}N_k(t) - I_k(t))\mathrm{d}t\right\}\sigma_{t-} \\
&+ \Bigg\{(p_{t-})^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{m_R}(-m_j(t))\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\lambda_k}{I_k(t)} - 1\right)(\mathrm{d}N_k(t) - I_k(t))\mathrm{d}t\right\}\Bigg\} \\
&\qquad + \Bigg\{\mathcal{L}(t)[\sigma_{t_}]\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R}\mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t_}]\big(\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + m_j(t)\,\mathrm{d}t\big) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_}]}{\lambda_k} - \sigma_{t_}\right)(\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k\mathrm{d}t)\Bigg\}. \qquad (2.78)
\end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti della (2.78) e ricordando le tabelle di Ito (B.5.2) si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\rho_t = \mathcal{L}(t)[\rho_{t_}]\mathrm{d}t &+ \sum_{j=1}^{m_R}\big(\mathcal{R}_j(t)[\rho_{t_}] - m_j(t)\rho_{t_}\big)\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) \\
&+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t_}]}{I_k(t)} - \rho_{t_}\right)\big(\mathrm{d}N_k(t) - I_k(t)\,\mathrm{d}t\big). \qquad (2.79)
\end{aligned}$$

Poiché la condizione iniziale per l'equazione lineare (2.18) è $\sigma_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, allora, grazie alla definizione di $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ data in (A.14), si ha

$$p_0 = \mathrm{Tr}\{\sigma_0\} = 1 \quad \text{e} \quad \rho = \sigma_0 = \eta_0.$$

E' importante intendersi circa l'interpretazione dell'equazione (2.79). Questa è una formula ottenuta attraverso la normalizzazione di σ_t con $\mathrm{Tr}\{\sigma_t\}$. Ne segue che, per costruzione, se, sotto la probabilità $\mathbb{Q}$, σ_t è soluzione dell'EDS lineare (2.18) allora $\rho_t = \frac{\sigma_t}{\mathrm{Tr}\{\sigma_t\}}$ verificherà l'EDS non lineare (2.79), sotto la probabilità fisica $\mathbb{P}_T$, data in (2.66).

Quindi ρ_t verifica l'equazione (2.79) per costruzione. Inoltre la scrittura (2.79) vale solo nel caso in cui $\rho_t \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, cioè solo per ρ_t stato perché si è ottenuta normalizzando σ_t e, grazie al Lemma 2.5, si ha la positività del processo soluzione σ_t e della sua traccia. Quindi il processo soluzione ρ_t dell'equazione (2.79) è uno stato proprio per come l'abbiamo definito.

Nel caso invece si prenda la (2.79) come equazione di partenza bisognerà dargli senso in altro modo; questo sarà lo scopo del Capitolo 4. Ci metteremo, in questo caso, nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ dove l'equazione sarà caratterizzata da processi di Wiener standard e indipendenti tra loro $\widehat{W}_j(t)$ e da processi di conteggio $N_k(t)$, con intensità stocastica $I_k(t)$.

Capitolo 3

Strumenti e operatore caratteristico

Vogliamo ora mostrare che quanto fatto nel Capitolo 2 rientra all'interno della formulazione assiomatica della meccanica quantistica che si fonda sulla nozione di strumento.

3.1 Strumenti e stati a posteriori

Se vogliamo lo stato di un sistema quantistico dopo la misurazione di un'osservabile X, allora la nozione di strumento entra in gioco in quanto è in grado di darci sia la distribuzione di probabilità di X che il cambiamento dello stato del sistema dovuto alla misurazione. Introduciamo quindi l'importante nozione di strumento.

Definizione 3.1. Dato uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$, uno strumento $\mathcal{I}$ con spazio dei valori $(\Omega, \mathcal{F})$ è un'applicazione da $\mathcal{F}$ alle mappe lineari da M^n in M^n tale che:

1 $\forall\, F \in \mathcal{F}$, $\mathcal{I}(F)$ è completamente positivo (CP); questa è detta condizione di completa positività.

2 $\mathrm{Tr}\{\mathcal{I}\,(\Omega)\,[\tau]\} = \mathrm{Tr}\{\tau\}$, $\forall\, \tau \in M^n$, detta condizione di normalizzazione.

3 Per ogni famiglia numerabile $\{F_i\}$ di insiemi disgiunti di $\mathcal{F}$ si ha la seguente condizione di σ-additività

$$\mathcal{I}\left(\bigcup_i F_i\right) = \sum_i \mathcal{I}\,(F_i)\,. \tag{3.1}$$

Gli strumenti rappresentano le procedure di misurazione; diamo loro un'interpretazione nel modo che segue. Interpretiamo Ω come l'insieme di tutti i possibili risultati delle misurazioni. La probabilità di ottenere un risultato $\omega \in B$, con $B \in \mathcal{F}$, quando prima della misurazione il sistema è in uno stato ρ, sarà data da

$$\mathbb{P}(B|\rho) := \mathrm{Tr}\{\mathcal{I}(B)[\rho]\}. \tag{3.2}$$

Dalla Definizione 3.1 di strumento notiamo come $\mathbb{P}(\cdot|\rho)$ abbia tutte le proprietà di una probabilità. Interpretiamo poi

$$\rho(B) := \frac{\mathcal{I}(B)[\rho]}{\mathrm{Tr}\{\mathcal{I}(B)[\rho]\}} \tag{3.3}$$

come lo stato del sistema, dato lo strumento $\mathcal{I}$, dopo la misurazione, condizionatamente al risultato della misurazione $\omega \in B$, con $B \in \mathcal{F}$. Giustifichiamo questa interpretazione considerando due misurazioni in successione rappresentate dagli strumenti $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$.

La probabilità congiunta di avere i risultati $\omega_1 \in B_1$ e $\omega_2 \in B_2$, quando prima della misurazione il sistema è in uno stato ρ, è data da

$$\mathbb{P}(B_1, B_2|\rho) := \mathrm{Tr}\{\mathcal{I}_2(B_2) \circ \mathcal{I}_1(B_1)[\rho]\}. \tag{3.4}$$

Se consideriamo la probabilità di avere il risultato $\omega_2 \in B_2$, dato che il primo risultato è stato $\omega_1 \in B_1$, quando prima della misurazione il sistema è in uno stato ρ, possiamo scrivere

$$\mathbb{P}(B_2|B_1;\rho) \equiv \frac{\mathbb{P}(B_1, B_2|\rho)}{\mathbb{P}(B_1|\rho)} = \mathbb{P}(B_2|\,\rho(B_1)) \equiv \mathrm{Tr}\{\mathcal{I}_2(B_2)[\rho(B_1)]\}, \tag{3.5}$$

dove l'operatore statistico $\rho(B_1)$ rappresenta lo stato del sistema dopo la prima misurazione, condizionatamente al fatto di aver osservato il risultato $\omega_1 \in B_1$.

Supponiamo ora di prendere l'insieme B infinitamente piccolo, pari cioè all'insieme $\mathrm{d}\omega$, intorno al risultato $\omega \in \Omega$. In accordo con l'equazione (3.3) si ha

$$\rho(\omega) = \frac{\mathcal{I}(\mathrm{d}\omega)[\rho]}{\mathrm{Tr}\{\mathcal{I}(\mathrm{d}\omega)[\rho]\}} \tag{3.6}$$

che rappresenta lo stato condizionatamente al risultato $\omega \in \mathrm{d}\omega$ ottenuto dalla misurazione. La quantità $\rho(\omega)$ è detta stato a posteriori. Una definizione formale di stato a posteriori può essere data come segue

Definizione 3.2. Una famiglia di operatori statistici $\{\rho(\omega),\, \omega \in \Omega\}$ è detta essere una famiglia di *stati a posteriori*, per lo stato pre-misurazione ρ e lo strumento $\mathcal{I}$ con spazio dei valori $(\Omega, \mathcal{F})$, se la funzione $\omega \mapsto \rho(\omega)$ è misurabile e $\forall F \in \mathcal{F}$

$$\int_F \rho(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega|\rho) = \mathcal{I}(F)[\rho]. \tag{3.7}$$

E' possibile dimostrare (Ozawa) che per ogni strumento $\mathcal{I}$ e per ogni stato pre-misurazione ρ esiste sempre una famiglia di stati a posteriori $\rho(\omega)$ che è unica $\mathbb{P}$-quasi certamente.

Usando la soluzione fondamentale $\mathcal{A}(t,r)$, $t > r \geq 0$, presentata in (2.41) e la nozione di strumento introdotta nella Sezione 3.1 definiamo la mappa $\mathcal{I}_t^r(G)$, $\forall\, G \in \mathcal{F}_t^r$, con la scrittura

$$\mathcal{I}_t^r(G)[\tau] := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_G\, \mathcal{A}(t,r)[\tau]\right], \quad \forall\, \tau \in M^n. \tag{3.8}$$

Proposizione 3.3. *L'equazione* (3.8) *definisce uno strumento* $\mathcal{I}_t^r$ *nello spazio dei valori* $(\Omega, \mathcal{F}_t^r)$.

Dimostrazione. Vogliamo verificare che $\mathcal{I}_t^r$ definito in (3.8) rientra nella Definizione 3.1 di strumento. La condizione di completa positività per $\mathcal{I}_t^r$ si fonda sulla completa positività di $\mathcal{A}(t,r)$ come mostrato nella Proposizione 2.8.

La condizione di normalizzazione della Definizione 3.1 è equivalente alla proprietà di conservazione della traccia del $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathcal{A}(t,r)]$. Tale proprietà è ottenuta grazie alla traccia nulla di $\mathcal{L}(t)$, alla media nulla dell'integrale stocastico con Wiener e all'equazione $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,\mathrm{d}N_k(t)\,|\,\mathcal{F}_t^0] = \lambda_k \mathrm{d}t$. La proprietà di σ-additività deriva dalle proprietà della funzione indicatrice $\mathbb{1}_G$ e dalla continuità del valore atteso. $\square$

Gli strumenti appena introdotti danno le probabilità fisiche e gli stati a posteriori del capitolo precedente.

Osservazione 3.4. Si noti che si ha

$$\mathcal{I}_t^0(G)[\rho] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_G\, \sigma_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}[\mathbb{1}_G\, \rho_t]. \tag{3.9}$$

Confrontando questo risultato con la (3.7) si vede che ρ_t è lo stato a posteriori per lo strumento $\mathcal{I}_t^0$ e lo stato pre-misurazione ρ.

3.2 Operatore caratteristico

Notazione 3.1. Indichiamo con $\mathcal{S}$ lo spazio delle funzioni (k,h) caglad (continue a sinistra e con limite finito a destra), reali vettoriali e deterministiche. La funzione k avrà m_R componenti mentre la funzione h ne avrà m_J.

Introduciamo le variabili aleatorie $X_t^r(k,h)$

$$X_t^r(k,h) := \sum_{j=1}^{m_R} \int_r^t k_j(s)\mathrm{d}W_j(s) + \sum_{k=1}^{m_J} \int_r^t h_k(s)\,\mathrm{d}N_k(s). \tag{3.10}$$

Definizione 3.5. Prendiamo la coppia $(k,h) \in \mathcal{S}$, definiamo l'*operatore caratteristico* $\mathcal{G}(t,r;k,h)$ associato allo strumento $\mathcal{I}_t^r$ come segue: $\forall\; a, \tau \in M^n$

$$\mathrm{Tr}\{a\, \mathcal{G}(t,r;k,h)[\tau]\} = \int_\Omega \exp\{\mathrm{i}\, X_t^r(k,h)(\omega)\}\, \mathrm{Tr}\{a\, \mathcal{I}_t^r(\mathrm{d}\omega)[\tau]\}. \tag{3.11}$$

Usando la rappresentazione degli strumenti data nella (3.8) si ha la scrittura

$$\mathcal{G}(t,r;k,h)[\tau] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{\mathrm{i}\,X_t^r(k,h)}\mathcal{A}(t,r)[\tau]\right]. \tag{3.12}$$

Ponendo ora $r = 0$, partendo cioè dal tempo iniziale zero e dalla condizione iniziale $\sigma_0 = \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, dalla formula (3.12) si ha, per l'equazione lineare (2.18), l'operatore caratteristico

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t,0;k,h)[\rho] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,X_t^0(k,h)}\mathcal{A}(t,0)[\rho]\right]\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m_R}\int_0^t k_j(s)\mathrm{d}W_j(s) + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{m_J}\int_0^t h_k(s)\,\mathrm{d}N_k(s)\right\}\sigma_t\right].\end{aligned} \tag{3.13}$$

La seguente proposizione mostra come rappresentare l'operatore caratteristico tramite gli stati a posteriori.

Proposizione 3.6. *Vale la seguente uguaglianza*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{Tr}\left\{a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,X_t^0(k,h)}\sigma_t\right\}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}\left[\mathrm{Tr}\left\{a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,X_t^0(k,h)}\rho_t\right\}\right]. \tag{3.14}$$

Dimostrazione. Utilizzando l'insieme $\mathcal{E}_T$, già introdotto in (2.59), si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{a\;\mathcal{G}(t,0;k,h)[\rho]\} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{Tr}\left\{a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,X_t^0(k,h)}\mathcal{A}(t,0)[\rho]\right\}\right] =\\ &\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{Tr}\left\{a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,X_t^0(k,h)}\sigma_t\right\}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}_t}\,\mathrm{Tr}\left\{a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,X_t^0(k,h)}\sigma_t\right\}\right]\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}_t}\,\mathrm{Tr}\left\{a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,X_t^0(k,h)}\rho_t\right\}p_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{Tr}\left\{a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,X_t^0(k,h)}\rho_t\right\}p_t\right]\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}\left[\mathrm{Tr}\left\{a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,X_t^0(k,h)}\rho_t\right\}\right].\end{aligned} \tag{3.15}$$

□

Proposizione 3.7. *L'operatore caratteristico associato all'EDS lineare* (2.18) *soddisfa l'equazione*

$$\mathcal{G}(t,0;k,h) = \mathrm{Id}_n + \int_0^t \Lambda_s(k(s),h(s))\circ\mathcal{G}(s,0;k,h)\mathrm{d}s, \tag{3.16}$$

con

$$\begin{aligned}\Lambda_t(k(t),h(t)) := \mathcal{L}(t) &+ \sum_{j=1}^{m_R}\left(\mathrm{i}\,k_j(t)\mathcal{R}_j(t) - \frac{1}{2}k_j(t)^2\,\mathrm{Id}_n\right)\\ &+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(e^{\mathrm{i}\,h_k(t)} - 1\right)\,\mathcal{J}_k(t).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Dimostrazione. Poniamo, per semplicità di notazione

$$z_t := \exp\left\{ \mathrm{i} \sum_{j=1}^{m_R} \int_0^t k_j(s)\, \mathrm{d}W_j(s) + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{m_J} \int_0^t h_k(s)\, \mathrm{d}N_k(s) \right\} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, X_t^0(k,h)}, \tag{3.18}$$

$$x_t := z_t\, \sigma_t. \tag{3.19}$$

Dalla (3.12) si ha

$$\mathcal{G}(t,0;k,h)[\rho] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{\mathrm{i}\, X_t^0(k,h)} \mathcal{A}(t,0)[\rho] \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[x_t \right]. \tag{3.20}$$

Vogliamo quindi ottenere la scrittura di $\mathrm{d}x_t$. A questo scopo calcoliamo il differenziale di z_t, applicando la formula di Ito nel caso con salti, come mostrato con l'equazione (B.40). Quindi si ha

$$\mathrm{d}z_t = z_{t-}\Bigg(\mathrm{i} \sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)\mathrm{d}W_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)^2 \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m_J} \left(e^{\mathrm{i}\, h_k(t)} - 1 \right) \mathrm{d}N_k(t) \Bigg). \tag{3.21}$$

Grazie alle tabelle (B.5.2) per il prodotto, si ottiene il differenziale di x_t

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_t &= \mathrm{d}z_t\, \sigma_{t-} + z_{t-}\, \mathrm{d}\sigma_t + \mathrm{d}z_t\, \mathrm{d}\sigma_t = \\
& z_{t-}\Bigg(\mathrm{i} \sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)\mathrm{d}W_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)^2 \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m_J} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, h_k(t)} - 1 \right) \mathrm{d}N_k(t) \Bigg) \sigma_{t-} \\
&\qquad + z_{t-}\Bigg(\mathcal{L}(t)[\sigma_{t_}]\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R} \mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t_}]\mathrm{d}W_j(t) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_}]}{\lambda_k} - \sigma_{t_} \right) \left(\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k \mathrm{d}t \right) \Bigg) \\
& + \sum_{j=1}^{m_R} \mathrm{i}\, k_j(t) \mathcal{R}_j(t)[x_{t-}]\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m_J} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, h_k(t)} - 1 \right) \left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[x_{t-}]}{\lambda_k} - x_{t-} \right) \mathrm{d}N_k(t).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_t = {}&\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)x_{t-}\mathrm{d}W_j(t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)^2 x_{t-}\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,h_k(t)}-1\right)x_{t-}\mathrm{d}N_k(t)\\
&+ \mathcal{L}(t)[x_{t-}]\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R}\mathcal{R}_j(t)[x_{t-}]\mathrm{d}W_j(t)\\
&+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[x_{t-}]}{\lambda_k} - x_{t-}\right)(\mathrm{d}N_k(t)-\lambda_k\mathrm{d}t) + \sum_{j=1}^{m_R}\mathrm{i}\,k_j(t)\mathcal{R}_j(t)[x_{t-}]\mathrm{d}t\\
&+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,h_k(t)}-1\right)\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[x_{t-}]}{\lambda_k} - x_{t-}\right)\mathrm{d}N_k(t).
\end{aligned}$$

In conclusione, raccogliendo i fattori si arriva all'equazione

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_t = {}&\Bigg\{\mathcal{L}(t)[x_{t-}] + \sum_{j=1}^{m_R}\left(\mathrm{i}\,k_j(t)\mathcal{R}_j(t)[x_{t-}] - \frac{1}{2}k_j(t)^2 x_{t-}\right)\mathrm{d}t\\
&+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[x_{t-}]}{\lambda_k} - x_{t-}\right)(\mathrm{d}N_k(t)-\lambda_k\mathrm{d}t)\\
&+ \sum_{j=1}^{m_R}\left\{\mathrm{i}k_j(t)x_{t-} + \mathcal{R}_j(t)[x_{t-}]\right\}\mathrm{d}W_j(t)\\
&+ \sum_{k=1}^{m_J}\left\{\frac{\mathcal{J}_k(t)[x_{t-}]}{\lambda_k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,h_k(t)}-1\right)\right\}\mathrm{d}N_k(t). \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Dall'Osservazione 2.3 circa la limitatezza dei coefficienti della (3.22), dal fatto che l'integrale stocastico del Wiener $W_j(t)$ ha media nulla sotto la probabilità $\mathbb{Q}$, dalla media dei Poisson $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,\mathrm{d}N_k(t)\,|\,\mathcal{F}_t^0] = \lambda_k\mathrm{d}t$ e grazie alla (3.20) si ottiene la scrittura dell'operatore caratteristico (3.16). □

3.3 Dall'operatore caratteristico agli strumenti

L'equazione (3.11) definisce l'operatore caratteristico $\mathcal{G}(t,r;k,h)$ come una "trasformata di Fourier funzionale" dello strumento $\mathcal{I}_t^r$. Tale definizione è utile se dall'operatore caratteristico è possibile riottenere gli strumenti, invertendo in qualche senso questa trasformata di Fourier. Tuttavia lo spazio dei valori $(\Omega, \mathcal{F}_t^r)$ presenta un qualche grado di arbitrarietà e non possiamo avere una corrispondenza uno a uno banale. Questo è possibile se fissiamo in qualche modo "canonico" lo spazio delle possibili traiettorie per l'output. Qui non affrontiamo il problema così in generale, ma ci limitiamo alle probabilità finito dimensionali dell'output e agli strumenti collegati.

Fissiamo m elementi (k^j, h^j) in $\mathcal{S}$ e consideriamo le variabili aleatorie $X_t^r(k^j, h^j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, e il vettore aleatorio

$$\overrightarrow{X}_t^r(k, h) = (X_t^r(k^1, h^1), X_t^r(k^2, h^2), \ldots, X_t^r(k^m, h^m)).$$

Per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ l'insieme $\{\omega \in \Omega; \overrightarrow{X}_t^r(k, h)(\omega) \in A\}$ è un evento di $\mathcal{F}_t^r$. Allora

$$\mathcal{I}_t^r\big(\{\overrightarrow{X}_t^r(k, h)(\omega) \in A\}\big) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\left\{\overrightarrow{X}_t^r(k,h)(\omega)\in A\right\}}\, \mathcal{A}(t, r)] =: \mathcal{I}_t^r(A;\, \overrightarrow{k},\, \overrightarrow{h}) \tag{3.23}$$

definisce uno strumento con spazio dei valori $(\mathbb{R}^m,\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Per ogni $a,\, \tau \in M^n$, $a \geq 0$, $\tau \geq 0$, $\operatorname{Tr}\{a\,\mathcal{I}_t^r(\cdot\,;\, \overrightarrow{k},\, \overrightarrow{h})[\tau]\}$ è una misura finita su $\mathbb{R}^m$ e per tali misure vale la corrispondenza uno a uno con le loro trasformate di Fourier.

D'altra parte, per i teoremi di cambiamento di variabile d'integrazione, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\overrightarrow{\lambda}\cdot\overrightarrow{x}}\, \mathcal{I}_t^r(\mathrm{d}x\,;\, \overrightarrow{k},\, \overrightarrow{h}) &= \int_\Omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\overrightarrow{\lambda}\cdot\overrightarrow{X}_t^r(k,h)(\omega)}\, \mathcal{I}_t^r(\mathrm{d}\omega) \\ &= \int_\Omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\overrightarrow{X}_t^r(\overrightarrow{\lambda}\cdot\overrightarrow{k},\overrightarrow{\lambda}\cdot\overrightarrow{h})(\omega)}\, \mathcal{I}_t^r(\mathrm{d}\omega) = \mathcal{G}\left(t, r; \sum_{j=1}^m \lambda_j k_j, \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i\right).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Invertendo, dunque, la trasformata di Fourier da

$$\operatorname{Tr}\left\{a\,\mathcal{G}\big(t, r; \overrightarrow{\lambda}\cdot\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\lambda}\cdot\overrightarrow{h}\big)[\tau]\right\}$$

otteniamo

$$\operatorname{Tr}\left\{a\,\mathcal{I}_t^r(\cdot\,; \overrightarrow{k}, \overrightarrow{h})[\tau]\right\}$$

e facendo variare a e τ otteniamo lo "strumento finito dimensionale" $\mathcal{I}_t^r\big(\cdot\,; \overrightarrow{k}, \overrightarrow{h}\big)$.

Capitolo 4

Teoremi di esistenza e unicità della soluzione

Ciò che ci accingiamo a fare in questo capitolo è considerare l'EDS non lineare come punto di partenza delle nostre analisi e non come frutto delle trasformazioni e dei cambiamenti di probabilità dall'EDS lineare, presentati nella Sezione 2.4. Perché può risultare importante poter prendere l'EDS non lineare come punto di partenza e formulare per quest'equazione risultati di esistenza e unicità della soluzione? Tentiamo di dare alcune possibili risposte a questo quesito. Innanzitutto molte proprietà degli stati a posteriori (in particolare proprietà asintotiche) seguono dall'EDS non lineare, ammesso che possiamo affermare una qualche forma di unicità della soluzione. In secondo luogo, in certe teorie, EDS non lineari come quelle ottenute nel Capitolo 2 sono postulate come punto di partenza. Possiamo inoltre motivare l'analisi che seguirà ricordando che le simulazioni numeriche efficienti partono dall'equazione non lineare nella versione su spazi di Hilbert. L'idea è che i processi di Wiener e di conteggio devono poter essere costruiti nel modo più comodo ed efficiente possibile e non come delle trasformazioni dei processi che appaiono nell'equazione lineare (2.18).

4.1 Problemi strutturali dell'EDS non lineare

Seguendo l'impostazione di [14, 15], partiamo dallo stato a posteriori ρ_t per un sistema quantistico sottoposto a misurazione continuata; ρ_t dovrebbe essere determinato dall'equazione (2.79), che richiamiamo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\rho_t = \Bigg(\mathcal{L}(t)[\rho_{t-}] + \sum_{k=1}^{m_J}\Big(\mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\}\rho_{t-} - \mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\Big)\Bigg)\mathrm{d}t \\
+ \sum_{j=1}^{m_R}\left(\mathcal{R}_j(t)[\rho_{t-}] - \mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\rho_{t-}]\}\rho_{t_-}\right) d\widehat{W}_j(t) \\
+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]}{\mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\}} - \rho_{t-}\right)\mathrm{d}N_k(t). \quad (4.1)
\end{aligned}
$$

Come già visto ogni $N_k(t)$ è un processo di conteggio con intensità stocastica

$$I_k(t) = \mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\rho_t]\} = \sum_r \mathrm{Tr}\{V_k^r(t)\rho_t V_k^r(t)^*\}, \quad (4.2)$$

e ogni $\mathcal{J}_k(t)$ è della forma (2.7). Inoltre il ground process $N(t)$, processo somma degli $N_k(t)$, è regolare secondo la Definizione B.4. Ricordiamo le notazioni usate in precedenza

$$m_j(t) = \mathrm{Tr}\left\{\left(R_j(t) + R_j(t)^*\right)\rho_{t_-}\right\}, \quad (4.3)$$

e per tutte le matrici $\tau \in M^n$

$$\mathcal{R}_j(t)[\tau] = R_j(t)\tau + \tau R_j(t)^*; \quad (4.4)$$

quindi in particolare $m_j(t) = \mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\tau]\}$.

Notiamo come l'equazione (4.1) presenti diversi problemi in termini di formulazione matematica.

a) Innanzitutto non sono applicabili i risultati classici di esistenza e unicità della soluzione in quanto i coefficienti non presentano crescita sublineare in ρ_t, quando ρ_t non è limitato ad essere uno stato ma è un generico elemento di M^n.

b) In secondo luogo è bene intendersi su come dare senso all'equazione (4.1). Infatti è un'equazione con processi di conteggio la cui intensità stocastica (4.2) dipende a sua volta dalla soluzione; come se il processo $N_k(t)$ determinasse in qualche modo ρ_t e ne fosse a sua volta influenzato attraverso $I_k(t)$. Risulta quindi fondamentale dare una nozione di soluzione in questo caso e, ovviamente, dare una definizione dello spazio di probabilità in cui dar senso all'equazione in esame.

4.2 Estensione dell'EDS e concetto di soluzione

Osserviamo che l'equazione non lineare (4.1) è stata ottenuta, nelle Sezioni 2.4 e 2.5, ed ha significato fisico, solo per $\rho_t \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, cioè per operatori in

M^n che sono stati. Quello che ora vogliamo fare è costruire un'equazione che abbia senso per qualsiasi condizione iniziale $\rho \in M^n$ e non solo per ρ stato; vogliamo cioè estendere l'equazione (4.1) a tutte le matrici $n \times n$. Inoltre ci interesserà far in modo che l'equazione (4.1) abbia coefficienti a crescita sub-lineare.

4.2.1 Come ottenere un'EDS equivalente con coefficienti a crescita sub-lineare

Attraverso delle modificazioni dell'equazione (4.1) faremo in modo che i coefficienti della stessa verifichino le Ipotesi A.1 e A.3 dei teoremi classici di esistenza e unicità della soluzione per equazioni differenziali stocastiche (per esempio proponiamo il Teorema A.8). E' importante notare che le modificazioni che presenteremo in seguito risultano banali nel caso in cui ρ_t sia uno stato, infatti se $\rho_t \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ (si veda (A.14)) allora l'equazione (4.1) non viene modificata.

La parte in $\mathrm{d}t$, così come la parte in $\mathrm{d}\widehat{W}_j(t)$, non sembra presentare una crescita sub-lineare. Inoltre, se ρ_t non è uno stato allora la quantità

$$\mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\}$$

potrebbe anche risultare complessa o negativa. Per superare queste difficoltà possiamo moltiplicare e dividere per $\|\rho_{t-}\|_1$ qualunque termine dove risulti opportuno; infatti finché ρ_{t-} è uno stato tale quantità vale 1. Inoltre per la positività di ρ_{t-} si ha

$$\mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\} \equiv \|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1.$$

Alla luce di queste osservazioni proponiamo allora la seguente equazione

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\rho_t = \Bigg(\mathcal{L}(t)[\rho_{t-}] + \sum_{k=1}^{m_J}\Bigg(\frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1\,\rho_{t-}}{\|\rho_{t-}\|_1} - \mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\Bigg)\Bigg)\mathrm{d}t \\ + \sum_{j=1}^{m_R}\left(\mathcal{R}_j(t)[\rho_{t-}] - \frac{\mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\rho_{t-}]\}\rho_{t\_}}{\|\rho_{t-}\|_1}\right)d\widehat{W}_j(t) \\ + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\|\rho_{t-}\|_1\,\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]}{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1} - \rho_{t-}\right)\mathrm{d}N_k(t). \quad (4.5)\end{aligned}$$

Si noti che se ρ_t è uno stato la (4.1) non è modificata.

Chiediamo inoltre che il processo $N_k(t)$ abbia intensità stocastica

$$I_k(t,\rho_{t-}) = \begin{cases} \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1}{\|\rho_{t-}\|_1}\,, \ \mathrm{se}\, \rho_{t-} \neq 0 \\ 0\,, \ \mathrm{se} \ \ \rho_{t-} = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

anziché $\mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\}$.

Abbiamo così controllato la crescita del termine di drift e di quello diffusivo ed inoltre con la (4.5) abbiamo anche in parte curato la singolarità nello zero della parte dei salti dell'equazione. Inoltre così facendo è come se avessimo diminuito, in qualche senso, la singolarità dell'intensità stocastica infatti, mentre $\mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\}$ potrebbe essere nulla anche se $\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]$ non risulta nulla, nel caso di intensità $\frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1}{\|\rho_{t-}\|_1}$ questa è nulla solo nel caso in cui si ha $\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1$ nulla, ossia $\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]$ nulla. Osserviamo inoltre che nell'equazione (4.5) abbiamo sostanzialmente limitato l'intensità stocastica e ne abbiamo curato la singolarità nell'origine. Queste modifiche saranno importanti nella sezione successiva per la formulazione di risultati di esistenza ed unicità di soluzione.

Infine introduciamo per semplicità di notazione le scritture

$$n_j(t,\tau) := \begin{cases} \frac{\mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\tau]\}}{\|\tau\|_1} & \tau \neq 0, \\ 0 & \tau = 0, \end{cases}$$

$$\hat{n}_j(t,\tau) := \mathcal{R}_j(t)[\tau] - n_j(t,\tau)\tau. \tag{4.7}$$

Definiamo inoltre

$$\widehat{\mathcal{L}}(t) = \mathcal{L}_0(t) + \mathcal{L}_1(t) - \frac{1}{2}\{J(t),\cdot\}. \tag{4.8}$$

Osserviamo che $\widehat{\mathcal{L}}(t)$ non è altro che $\widetilde{\mathcal{L}}(t)$, definito in (2.20), in cui si pone $\lambda = 0$.

Utilizzando queste formule otteniamo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\rho_t = &\left(\widehat{\mathcal{L}}(t)[\rho_{t-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t,\rho_{t-})\,\rho_{t-}\right)\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{j=1}^{m_R} \hat{n}_j(t,\rho_{t-})\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]}{I_k(t,\rho_{t-})} - \rho_{t-}\right)\mathrm{d}N_k(t). \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.2.2 Definizione di soluzione

Incominciamo ad affrontare anche il secondo dei problemi introdotti nella Sezione 4.1. Poiché $N_k(t)$ dipende dalla soluzione, come già visto, e non ha una definizione intrinseca, allora uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ deve essere definito in modo tale che l'equazione (4.9) abbia senso.

Un possibile approccio al problema è quello presentato in [14].

Definizione 4.1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità con filtrazione in ipotesi usuali. *Un processo ρ_t soluzione* dell'equazione (4.9), con condizione iniziale una matrice ρ, è un processo cadlag (continuo a destra con limite a sinistra finito) tale che esistono m_J processi di conteggio $N_k(t)$, ognuno con compensatore prevedibile (o intensità stocastica)

$$t \mapsto \int_0^t I_k(s,\rho_{s-})\,\mathrm{d}s$$

con $\overline{N}(t)$ processo regolare e tale che la coppia $(\rho_t, \overline{N}(t))$ soddisfa la (4.9).

Ricordiamo che $\overline{N}(t)$ è il vettore dei processi $N_k(t)$ definito in (B.1). Per la nozione di processo prevedibile si veda la Definizione B.2.

Osserviamo che se esiste un processo/soluzione ρ_t per l'equazione (4.9) con $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ e se $\rho_t \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ per ogni t, allora possiamo dire di avere un processo/soluzione della nostra EDS non lineare originale, infatti se ρ_t è uno stato allora le modificazioni effettuate non hanno variato nulla nell'EDS non lineare di partenza.

4.3 Trasformazione ad un'equazione con rumori assegnati a priori

Un modo per costruire i processi $N_k(t)$, che compaiono nella Definizione 4.1 e che sono assunti essere processi di conteggio, consiste nell'usare la teoria della misura casuale di Poisson [14, 10].

Qui di seguito si seguirà proprio questa strada.

4.3.1 Misura casuale di conteggio semplice e di Poisson

Definizione 4.2. Presa una base stocastica $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ in ipotesi usuali, si dice *misura casuale di conteggio semplice* su $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ una famiglia di misure $\mu = (\mu(\omega, \cdot),\ \text{con } \omega \in \Omega)$ su tale spazio tale che

1. $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)),\ \forall\ \omega \in \Omega,$ la quantità $\mu(\omega, A)$ prende valori in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
2. $\forall\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mu(\cdot, A)$ è una varibaile aleatoria (eventualmente estesa).
3. $\forall\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\forall\, t > 0$, $\mu(\cdot\,, (0, t] \otimes A)$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile.
4. $\forall\ \omega \in \Omega, \forall\, t > 0, \quad \mu(\omega, \{t\} \times \mathbb{R}^d) \leq 1.$
5. $\forall\ \omega \in \Omega, \quad \mu(\omega, \{0\} \times \mathbb{R}^d) = 0.$

Tale misura si chiama *misura casuale di Poisson* se inoltre

1. la misura m definita da $m(A) = \mathbb{E}[\mu(A)]$ su $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ è σ-finita e non atomica.
2. Se $t \in \mathbb{R}_+$ e se $A_i \in \mathcal{B}((t, +\infty)) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, per $i = 1, \ldots, l$, sono a due a due disgiunti con $m(A_i) < +\infty$, le variabili aleatorie $\mu(A_i)$ sono mutuamente indipendenti e sono indipendenti da $\mathcal{F}_t$.

La misura m è detta intensità della misura casuale di Poisson μ.

Il Teorema 2.4 in [8] assicura che $\mu(A)$ ha distribuzione di Poisson.

Osservazione 4.3. In seguito, in questo lavoro, prenderemo sempre in considerazione delle misure μ_k intendendo con questa scrittura un numero finito di misure casuali di Poisson $\{\mu_k\}_{k=1}^{m_J}$ su $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, indipendenti tra loro.

4.3.2 Processo di conteggio costruito con la misura casuale di Poisson

Introduciamo ora un teorema che ci consente di scrivere l'equazione (4.9) facendo uso della misura casuale di Poisson; il teorema infatti dimostra che la soluzione di (4.10), che fa uso della misura casuale di Poisson, fornisce una soluzione dell'equazione (4.9). L'idea è quella di costruire ogni processo di conteggio $N_k(t)$ facendo uso della teoria della misura casuale di Poisson, secondo l'Osservazione 4.3.

Teorema 4.4. *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *una base stocastica in ipotesi usuali dove sono definiti* m_R *processi di Wiener* $\widehat{W}_j$ *indipendenti (come nell'Assunzione 2.4) e con* m_J *misure casuali di Poisson* μ_k *su* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$*, indipendenti dai* $\widehat{W}_j$ *e indipendenti tra loro, con intensità* $\mathrm{d}t \times \mathrm{d}x$*. Se* ρ_t *è soluzione dell'equazione*

$$\rho_t = \rho + \int_0^t \left(\widehat{\mathcal{L}}(s)[\rho_{s-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(s, \rho_{s-})\rho_{s-} \right) \mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m_R} \int_0^t \hat{n}_j(s, \rho_{s-}) \mathrm{d}\widehat{W}_j(s)$$
$$+ \sum_{k=1}^{m_J} \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{\mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}]}{I_k(s, \rho_{s-})} - \rho_{s-} \right) \mathbb{1}_{\{0 \le x \le I_k(s, \rho_{s-})\}} \, \mu_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \tag{4.10}$$

allora i processi di conteggio $N_k(t)$ *della forma*

$$N_k(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{0 \le x \le I_k(s, \rho_{s-})\}} \, \mu_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \tag{4.11}$$

sono non esplosivi e regolari (come processo vettoriale) e la coppia $(\rho_t, \overline{N}(t))$ *è un processo/soluzione dell'equazione* (4.9)*, dove il processo* $\overline{N}(t) = (N_1(t), N_2(t), \cdots, N_{m_J}(t))$*.*

Una prima formulazione del teorema appena enunciato è dovuta a Jacod e Protter, in [10], successivamente è stato rielaborato da Clément Pellegrini, in [14] e qui è presentato in una forma nuova e adattata allo studio della nostra equazione (4.9). La dimostrazione del teorema è divisa in due parti. La prima consiste nel dimostrare che il processo somma $N(t)$ dei processi della forma (4.11) è ben definito e non esplosivo. La seconda parte consiste nel dimostrare che $\overline{N}(t)$ è regolare e ha le intensità volute. A questo punto, proprio grazie alla scrittura (4.11) dei processi di conteggio è banale dire che se si ha una soluzione dell'equazione (4.10) allora questa sarà anche un processo/soluzione dell'equazione (4.9).

Dimostrazione. Prendiamo un generico processo cadlag X_t e definiamo, fissato k

$$N_k^X(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq I_k(s,\, X_{s-})\}}\, \mu_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x). \tag{4.12}$$

Dobbiamo verificare che $N_k^X(t)$ è ben definito e non esplosivo. La proprietà di non esplosività di $N_k^X(t)$ è associata al carattere di limitatezza di $I_k(t, X_{t-})$, che poi dimostreremo essere la sua intensità stocastica. Dimostriamo la limitatezza di $I_k(t, X_{t-})$. Se $I_k(t, X_{t-}) = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Se invece $I_k(t, X_{t-}) > 0$ si ha

$$\begin{aligned} 0 < I_k(t, X_{t-}) &= \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[X_{t-}]\|_1}{\|X_{t-}\|_1} = \frac{\|\sum_r V_r^k(t)\, X_{t-}\, V_r^k(t)^*\|_1}{\|X_{t-}\|_1} \\ &\leq \frac{\sup_{a \in M^n :\, \|a\|_\infty = 1} |\operatorname{Tr}\{a \sum_r V_r^k(t)\, X_{t-}\, V_r^k(t)^*\}|}{\|X_{t-}\|_1} \\ &= \frac{\sup_{a \in M^n :\, \|a\|_\infty = 1} |\operatorname{Tr}\{\sum_r V_r^k(t)^*\, a\, V_r^k(t) X_{t-}\}|}{\|X_{t-}\|_1} \\ &\leq \|X_{t-}\|_1 \frac{\sup_{a \in M^n :\, \|a\|_\infty = 1} \|\sum_r V_r^k(t)^*\, a\, V_r^k(t)\|_\infty}{\|X_{t-}\|_1} \\ &\leq \Big\| \sum_r V_r^k(t)^* V_r^k(t) \Big\|_\infty = \|J_k(t)\|_\infty, \end{aligned} \tag{4.13}$$

dove gli ultimi passaggi sono giustificati dal fatto che il sup è raggiunto in $a = \mathbb{1}$ per via della positività.

Dall'Osservazione 2.3 si ha $\sup_{t \in (0,T)} \|\sum_k J_k(t)\| < +\infty$ e quindi fissato un intervallo di tempo $[0, T]$ esiste una costante M tale che vale

$$0 \leq I_k(t, X_{t-}) \leq M. \tag{4.14}$$

Scriviamo $N_k^X(t)$ dalla (4.12) come

$$N_k^X(t) = \int_{s \in (0,t]} \int_{x \in [0,\, I_k(s,\, X_{s-})]} \mu_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x); \tag{4.15}$$

per la positività se maggioriamo $I_k(s,\, X_{s-})$ con M otteniamo

$$0 \leq N_k^X(t) \leq \int_{s \in (0,t]} \int_{x \in [0,\, M]} \mu_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x). \tag{4.16}$$

Prendendo il valore atteso e ricordando che l'intensità di μ_k è, per ipotesi, $\mathrm{d}t \times \mathrm{d}x$ abbiamo

$$0 \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[N_k^X(t)\right] = M\, t. \tag{4.17}$$

Per la positività della variabile aleatoria abbiamo che

$$\mathbb{P}[N_k^X(t) = +\infty] = 0. \tag{4.18}$$

Quindi qualunque sia il processo X, $N_k^X(t)$ non esplode in tempo finito; quindi anche il processo somma degli $N_k^X(t)$ varrà la proprietà di non esplosione.

La seconda parte consiste nel dimostrare che il processo vettoriale $\overline{N}(t)$ è regolare e ha le intensità volute.

Vogliamo verificare che $N_k^X(t)$ ha proprio l'intensità $I_k(t,\, X_{t-})$. Consideriamo l'integrale (4.12) come limite di integrali su integrandi semplici e predicibili. Ricordando le proprietà di indipendenza della misura di Poisson abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[N_k^X(t)\right] &= \int_0^t \int_0^M \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{0\le x\le I_k(s,X_{s-})\}}\right]\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mu_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right] \\ &= \int_0^t \int_0^M \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{0\le x\le I_k(s,X_{s-})\}}\right] \mathrm{d}s\mathrm{d}x = \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^{I_k(s,X_{s-})} \mathrm{d}x\right] \\ &= \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[I_k(s,\, X_{s-})\right]. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Con calcoli analoghi a quelli della (4.19) (utilizzando una variabile aleatoria $\mathcal{F}_s$-misurabile a moltiplicare $\mathbb{1}$) possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[N_k^X(t)|\mathcal{F}_s\right] &= N_k^X(s) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[N_k^X(t)-N_k^X(s)|\mathcal{F}_s\right] = \\ &N_k^X(s) + \int_s^t \mathrm{d}r\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[I_k(r,\, X_{r-})|\mathcal{F}_s\right]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Abbiamo dunque verificato che l'integrale di I_k compensa N_k e che quindi l'integrale della somma delle I_k compensa il ground process degli N_k. Resta da verificare la regolarità del processo $\overline{N}(t)$. Dalla Definizione B.6 si ha che $\overline{N}(t)$ è regolare se è regolare il ground process. Bisogna verificare la condizione di regolarità (B.3) per il processo somma degli N_k. Si ha

$$0 \le \sum_k N_k^X(t+\Delta\, t) - N_k^X(t) \le \sum_k \mu_k((t, t+\Delta\, t)\times M) \;\sim\; \text{Poiss}(M\Delta\, t). \tag{4.21}$$

Allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[\sum_k N_k^X(t+\Delta\, t) - N_k^X(t) \ge 2\big] &\le \mathbb{P}\left[\sum_k \mu_k((t,t+\Delta\, t)\times M)\ge 2\right] \\ &= 1-\mathrm{e}^{-M\,\Delta\, t} - M\Delta\, t\mathrm{e}^{-M\,\Delta\, t}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Facendo il limite per $\Delta\, t \to 0$ nella (4.22) (riconoscendo lo sviluppo di una funzione esponenziale arrestato al primo ordine) si ha che la condizione di regolarità (B.3) per il ground è verificata.

Abbiamo verificato che il processo vettoriale $\overline{N}(t)$ è regolare e che ha le intensità volute. E' semplice quindi osservare che, per come si sono costruiti i processi $N_k(t)$, secondo la formula (4.11), un processo soluzione dell'equazione (4.10) è anche un processo/soluzione dell'equazione (4.9). $\square$

4.4 Interpretazione dell'equazione con salti e componente diffusiva

Richiamiamo l'equazione (4.10), in forma differenziale, e cerchiamo di comprendere come può essere interpretata:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\rho_t = &\left(\widehat{\mathcal{L}}(t)[\rho_{t-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t,\rho_{t-})\,\rho_{t-}\right)\mathrm{d}t\ + \sum_{j=1}^{m_R} \hat{n}_j(t,\rho_{t-})\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) \\ &+ \sum_{k=1}^{m_J} \int_{x\in\,[0,I_k(t,\rho_{t-})]} \left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]}{I_k(t,\rho_{t-})} - \rho_{t-}\right)\mu_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x). \end{aligned} \tag{4.23}$$

La (4.23) è un'equazione che presenta un numero finito di processi di conteggio $N_k(t)$, con misure μ_k indipendenti tra loro, come nell'Osservazione 4.3 e una componente diffusiva rappresentata dai processi di Wiener $\widehat{W}_j(t)$, standard ed indipendenti; va quindi discussa proprio in funzione dell'esistenza o meno dei salti. Infatti se supponiamo che T_1 sia il primo tempo di salto del processo somma $N(t)$, allora nell'intervallo $[0,T_1)$ l'equazione (4.23) diventa semplicemente un'equazione stocastica diffusiva della forma:

$$\mathrm{d}\rho_t = \left(\widehat{\mathcal{L}}(t)[\rho_{t-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t,\rho_{t-})\,\rho_{t-}\right)\mathrm{d}t\ + \sum_{j=1}^{m_R} \hat{n}_j(t,\rho_{t-})\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) \tag{4.24}$$

e in queste condizioni $\rho_{t-} = \rho_t$. Per equazioni di questa forma ci interesseremo in seguito di fornire risultati di esistenza e unicità della soluzione.

Quando invece mi trovo in prossimità di un salto di tipo k, $\mathrm{d}N_k(t)$ risulta essere non nullo, con $N_k(t)$ della forma (4.11). Allora l'equazione (4.23) può essere vista come l'equazione (4.24) tra i due tempi di salto più una prescrizione in prossimità del salto. Tale prescrizione dipende dalla soluzione ρ nell'istante t_-. Questo ragionamento ci conduce all'unicità della soluzione per l'equazione (4.23). Punto essenziale dell'idea appena esposta è la verifica della non esplosività, in tempo finito, dei termini in gioco nell'equazione stessa; si veda in merito il Teorema 4.4, appena dimostrato.

Queste considerazioni si riveleranno essenziali per la comprensione dei risultati che introdurremo nelle Sezioni 4.5 e 4.6.

Nella Sezione 4.1 abbiamo manipolato l'equazione (4.1) fino a ricondurci all'equazione (4.10). Quello che ci interessa fare ora è enunciare e dimostrare risultati di esistenza e unicità della soluzione dell'equazione

(4.10). Per far ciò sopprimiamo, in un primo momento, la componente dipendente dai processi di conteggio $N_k(t)$ e ci concentriamo solo sull'equazione con drift e parte diffusiva.

La motivazione di un simile approccio al problema risiede proprio nell'interpretazione dell'equazione (4.23) appena svolta. Infatti se riusciamo a dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione (4.24) ragionevolmente possiamo supporre che in seguito non sarà difficile arrivare ad un risultato analogo per l'equazione (4.23), completa anche di salti.

4.5 Esistenza e unicità per la parte senza salti

Proponiamoci di voler dimostrare allora un teorema di esistenza in senso forte e unicità per traiettorie e in legge della soluzione dell'equazione (4.24). Grazie alle modificazioni introdotte nella Sezione 4.2.1 siamo in grado di ricondurre questa equazione a risultati classici di esistenza e unicità della soluzione che sono richiamati in Appendice A.4.2.

Teorema 4.5. *Presi m_J processi di Wiener standard, indipendenti tra loro, $\widehat{W}_j(t)$, per $t \geq 0$, l'equazione*

$$\mathrm{d}\rho_t = \left(\widehat{\mathcal{L}}(t)[\rho_t] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t,\rho_{t-})\,\rho_{t-}\right)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R} \hat{n}_j(t,\rho_t)\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) \tag{4.25}$$

ammette soluzione in senso forte; e tale soluzione è unica per traiettorie e in legge.

Dimostrazione. L'equazione (4.25) può essere scritta in modo esteso, grazie alla formula (4.7) come segue:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\rho_t = &\left(\widehat{\mathcal{L}}(t)[\rho_t] + \sum_{k=1}^{m_J} \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1\,\rho_{t-}}{\|\rho_t\|_1}\right)\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{j=1}^{m_R}\left(\mathcal{R}_j(t)[\rho_t] - \frac{\mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\rho_t]\}\rho_t}{\|\rho_t\|_1}\right)\mathrm{d}\widehat{W}_j(t).\end{aligned} \tag{4.26}$$

Dall'Osservazione 2.3 si ha la condizione di misurabilità per i coefficienti della (4.26). Dobbiamo quindi dimostrare, per rientrare nelle ipotesi dei teoremi classici di esistenza ed unicità, la lipschitzianità globale dei coefficienti e la loro crescita sub-lineare.

Poiché, come già osservato, $\widehat{\mathcal{L}}(t)$ non è altro che $\widetilde{\mathcal{L}}(t)$, definito in (2.20), in cui si pone $\lambda = 0$, allora la stima (2.25), dalla quale si otteneva la sub-linearità e la globale lipschitzianità di $\widetilde{\mathcal{L}}(t)$, vale, a meno di costanti deterministiche, anche per $\widehat{\mathcal{L}}(t)$.

Per la parte $\frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_1\,\tau}{\|\tau\|_1}$, ricordando le disuguaglianze tra norme (A.8) e (A.9), si ha:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_1\,\tau}{\|\tau\|_1}\right\|_2 = \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_1\,\|\tau\|_2}{\|\tau\|_1} &= \left\|\sum_r V_k^r(t)\tau V_k^r(t)^*\right\|_1 \frac{\|\tau\|_2}{\|\tau\|_1}\\ = \sup_{a\in M^n:\,\|a\|_\infty=1} &|\operatorname{Tr}\{a\sum_r V_k^r(t)\tau V_k^r(t)^*\}|\,\frac{\|\tau\|_2}{\|\tau\|_1}\\ \leq \|\tau\|_1 \sup_{a\in M^n:\,\|a\|_\infty=1} &|\operatorname{Tr}\{\sum_r V_k^r(t)\,a\,V_k^r(t)^*\}|\,\frac{\|\tau\|_2}{\|\tau\|_1}\\ &\leq \|\tau\|_1\|J_k(t)\|_\infty\frac{\|\tau\|_2}{\|\tau\|_1} = \big\|J_k(t)\big\|\|\tau\|_2, \end{aligned} \tag{4.27}$$

dove gli ultimi passaggi sono giustificati dal fatto che il sup è raggiunto in $a=1$. E' sufficiente quindi richiamare l'Osservazione 2.3, grazie alla quale si ha $\sup_{t\in[0,T]}\|\sum_k J_k(t)\|_\infty < +\infty$. , per riuscire a controllare la stima (4.27) su tutti i tempi $t\leq T$. E' provata quindi la crescita sub-lineare del termine $\frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_1\,\tau}{\|\tau\|_1}$; resta da dimostrare la globale lipschitzianità.

Grazie alle disuguaglianze tra norme esposte nella sezione A.1.2 e chiamando $\widehat{x} := \frac{x}{\|x\|_1}$ e $\widehat{y} := \frac{y}{\|y\|_1}$ si ha

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\|\mathcal{J}_k(t)[x]\|_1\,x}{\|x\|_1} - \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[y]\|_1\,y}{\|y\|_1}\right\|_2 &= \big\|\,\|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\,x - \|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{y}]\|_1\,y\,\big\|_2\\ \leq \|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\|x-y\|_2 &+ \big\|\|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\,y - \|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{y}]\|_1\,y\big\|_2\\ \leq \|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\|x-y\|_2 + \big\|\big(\|\mathcal{J}_k(t)[x]\|_1 &- \big\|\mathcal{J}_k(t)[y]\|_1\big)\,\widehat{y} - \|\mathcal{J}_k(t)[x]\|_1\,\widehat{y}\\ +\|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\,y\big\|_2 \leq \|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\|x-y\|_2 &+ \big|\|\mathcal{J}_k(t)[x]\|_1 - \big\|\mathcal{J}_k(t)[y]\|_1\big|\frac{\|y\|_2}{\|y\|_1}\\ &+ \big\|\|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\,\|y\|_1\,\widehat{y} - \|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\,\|x\|_1\,\widehat{y}\big\|_2\\ \leq \|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\|x-y\|_2 + \|\mathcal{J}_k(t)[x-y]\|_1 &+ \|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\|\widehat{y}\|_2\big|\|x\|_1 - \|y\|_1\big|\\ \leq \|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\|x-y\|_2 &+ \|\mathcal{J}_k(t)\|\|x-y\|_1 + \|\mathcal{J}_k(t)[\widehat{x}]\|_1\|x-y\|_1\\ &\leq 3\|\mathcal{J}_k(t)\|\|x-y\|_1 \leq 3\,\mathrm{cost}\,n\,\|x-y\|_2. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Restano da studiare i termini relativi alla componente diffusiva dei processi di Wiener; $\forall\, j$ si ha il coefficiente:

$$\hat{n}_j(t,\tau) := \mathcal{R}_j(t)[\tau] - \frac{\operatorname{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\tau]\}}{\|\tau\|_1}\,\tau, \tag{4.29}$$

con

$$\mathcal{R}_j(t)[\tau] = R_j(t)\tau + \tau R_j(t)^*. \tag{4.30}$$

Analogamente alle equazioni (2.23) e (2.24), nella dimostrazione del Lemma 2.5 possiamo porre

$$l_T := \max\left(\sup_{t\in[0,T]} \|H(t)\|\,,\ \sup_{t\in[0,T]} \left\| \sum_{j=1}^{m_R} R_j(t)^* R_j(t) \right\| \right), \tag{4.31}$$

allora si ha, grazie all'Osservazione 2.3, $l_T < +\infty$ e

$$\|R_j(t)\|^2 = \|R_j(t)^* R_j(t)\| \leq l_T. \tag{4.32}$$

Ancora ricordando le disuguaglianze tra norme (A.8) e (A.9) si hanno le seguenti relazioni :

$$\|\tau\|_2 \leq \|\tau\|_1 \leq n\|\tau\|_2, \quad |\,\mathrm{Tr}\{\tau\}\,| \leq \|\mathbb{1}\|\,\|\tau\|_1 = \|\tau\|_1,$$

$$|\,n_j(t,\tau)| \leq \ 2\,\|R_j(t)\|,\ \forall\,\tau \in M^n. \tag{4.33}$$

La (4.33) può essere facilmente dimostrata, ricordando la scrittura (A.7)

$$\begin{aligned} |\,n_j(t,\tau)\,| = \left| \frac{\mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\tau]\}}{\|\tau\|_1} \right| &\leq \left| \frac{\mathrm{Tr}\,\{(R_j(t)+R_j(t)^*)\,\tau\}}{\|\tau\|_1} \right| \\ &\leq \frac{\|R_j(t)+R_j(t)^*\|\,\|\tau\|_1}{\|\tau\|_1} \leq 2\|R_j(t)\|. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Dalla (4.32) si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_R} \left\|\mathcal{R}_j(t)[\tau]\right\|_2^2 &\leq 2\sum_{j=1}^{m_R} \left(\left\|R_j(t)\tau\right\|_2^2 + \left\|\tau R_j(t)^*\right\|_2^2 \right) \\ &\leq 4\sum_{j=1}^{m_R} \left\|R_j(t)\right\|^2 \|\tau\|_2^2 \leq 4\,m_R\,l_T\|\tau\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Grazie a questi risultati e ricordando la nota disuguaglianza $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ è possibile ottenere

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_R} \left\|\hat{n}_j(t,\tau)\right\|_2^2 &\leq 2\sum_{j=1}^{m_R} \left(\left\|\mathcal{R}_j(t)[\tau]\right\|_2^2 + 2\left\| \frac{\mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\tau]\}\tau}{\|\tau\|_1} \right\|_2^2 \right) \\ &\leq 2\sum_{j=1}^{m_R} \left(\left\|\mathcal{R}_j(t)[\tau]\right\|_2^2 +\ 2\,\frac{|\mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\tau]\}|^2}{\|\tau\|_1^2}\,|\,\mathrm{Tr}\{\tau\}|^2\,\|\tau\|_2^2 \right) \\ &\leq 2\sum_{j=1}^{m_R} \left(\left\|\mathcal{R}_j(t)[\tau]\right\|_2^2 + 4\left\|R_j(t)\right\|^2 \|\tau\|_2^2 \right) \\ &\leq 2(\,4\,m_R\,l_T\|\tau\|_2^2) + 4\,l_T\|\tau\|_2^2 \leq 16\,m_R\,l_T\|\tau\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.36}$$

E' così provata, con la stima (4.36) la crescita sub-lineare per i coefficienti $\widehat{n}_j(t,\tau)$ della parte del Wiener dell'equazione (4.25). Dobbiamo verificare che soddisfino la condizione di Lipschitz globale. Prese due matrici $x \neq 0$ e $y \neq 0$ e ponendo $\widehat{x} := \frac{x}{\|x\|_1}$ e $\widehat{y} := \frac{y}{\|y\|_1}$ allora si ha, $\forall\, j$

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{n}(t,x) - \widehat{n}(t,y)\|_2 &\leq \|\mathcal{R}_j(t)[x-y]\|_1 + \\
&\quad \|\operatorname{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[x-y]\}\,\widehat{x} + \operatorname{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\,\widehat{y}\,]\}\,(\|y\|_1\,\widehat{x} - y)\|_1 \\
&\leq 2\,\|R_j(t)\|\,(2\,\|x-y\|_1 + \|(\|y\|_1 - \|x\|_1)\,\widehat{x} + x - y\|_1) \\
&\leq 2\,\|R_j(t)\|\,(\,3\,\|x-y\|_1 + \mid \|y\|_1 - \|x\|_1 \mid) \\
&\leq 8\|R_j(t)\|\|x-y\|_1 \leq 8\,\sqrt{l_T}\,n\,\|x-y\|_2. \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

E' quindi provata anche la globale lipschitzianità dei coefficienti del termine diffusivo. Abbiamo così verificato di rientrare nelle ipotesi presentate in Sezione A.4.2, ossia nelle ipotesi del Teorema A.8. $\square$

Si osservi come la catena di disuguaglianze (4.37) coinvolge la dimensione n dello spazio $\mathbb{C}^n$ e non è quindi estendibile al caso infinito dimensionale.

4.6 Esistenza e unicità per l'equazione completa

Seguendo la stessa argomentazione presentata nella Sezione 4.4 possiamo affermare che se siamo in grado di enunciare condizioni per l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione (4.25) e dato che la parte con salto ci dà un'unica prescrizione in corrispondenza del tempo di salto, allora ragionevolmente possiamo supporre che esistano opportune condizioni sui coefficienti che siano in grado di garantire per l'equazione (4.23) un'unica soluzione, che non esploda in tempo finito.

Risultano, in tale senso importanti le modifiche di controllo sull'intensità del processo di conteggio introdotte precedentemente, infatti con la limitazione dell'intensità stocastica si ha la garanzia che valga un'ipotesi fondamentale nel teorema che introdurremo qui di seguito. L'idea di fondo è che l'aumento dell'intensità del processo andrebbe ad aumentare il numero di salti, rischiando di rendere in questo modo esplosiva la soluzione. Riscriviamo la (4.23) in forma estesa:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\rho_t &= \left(\widehat{\mathcal{L}}(t)[\rho_{t-}] + \sum_{k=1}^{m_J} \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1\,\rho_{t-}}{\|\rho_{t-}\|_1}\right)\mathrm{d}t \;+ \sum_{j=1}^{m_R} \hat{n}_j(t,\rho_{t-})\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m_J} \int_{x\in\left[0,\frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1}{\|\rho_{t-}\|_1}\right]} \left(\frac{\|\rho_{t-}\|_1\,\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]}{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1} - \rho_{t-}\right)\mu_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x). \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

Alcune osservazioni sull'equazione appena scritta prima di introdurre il teorema di esistenza ed unicità della sua soluzione:

1 Per ogni $\rho_t \neq 0$ l'intensità stocastica modificata $\frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1}{\|\rho_{t-}\|_1}$ è ben definita, limitata e non corre il rischio di risultare complessa né negativa; cosa che sarebbe stata possibile mantenendola nella forma originaria di partenza $I_k(t) = \mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\rho_t]\}$.

2 Il problema si presenta in zero, infatti a seconda di come ci avviciniamo all'origine si hanno valori diversi per l'intensità; non si ha quindi continuità nell'origine.

3 L'integrando $\left(\frac{\|\rho_{t-}\|_1\,\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]}{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1} - \rho_{t-}\right) \to 0$, per $\rho_t \to 0$ e questo cura la singolarità dell'intensità stocastica nell'origine.

4 Per $\frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1}{\|\rho_{t-}\|_1} \to 0$ la misura μ_k sarà integrata su un insieme di misura nulla non dà contributi.

La seguente proposizione si interessa di verificare che supporre ρ_t una soluzione positiva dell'equazione (4.38) sarebbe consistente poiché la traccia viene conservata per ogni tempo t.

Proposizione 4.6. *Prendiamo l'equazione* (4.38) *e sia ρ_t una soluzione positiva di questa equazione, allora la traccia di ρ_t è conservata.*

Dimostrazione. La verifica discende dalla formula (A.15), dalle caratteristiche di cui godono gli stati, introdotte nella (A.14) e dalla proprietà di linearità della traccia (A.1). Studiando la traccia della parte diffusiva dell'equazione (4.38) si ha:

$$\mathrm{Tr}\{\hat{n}_j(t,\tau)\} = \mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\tau]\} - \frac{\mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\tau]\}\ \mathrm{Tr}\{\tau\}}{\|\tau\|_1}. \tag{4.39}$$

Questo termine risulta, in generale, non nullo a meno che τ non sia positivo; infatti per $\tau \geq 0$ si ha $\|\tau\|_1 = \mathrm{Tr}\{\tau\}$, grazie alla (A.15).

Per la parte con salti si ha:

$$\mathrm{Tr}\left\{\frac{\mathcal{J}_k(t)[\tau]\,\|\tau\|_1}{\|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_1} - \tau\right\} = \frac{\mathrm{Tr}\left\{\mathcal{J}_k(t)[\tau]\right\}\|\tau\|_1}{\|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_1} - \mathrm{Tr}\{\tau\}, \tag{4.40}$$

e ancora grazie alla (A.15) si ha che, se τ è positivo, anche la componente dei salti ha traccia nulla.

Per quanto riguarda infine il coefficiente di drift si ha, grazie alla linearità della traccia e alla scrittura di $\widehat{\mathcal{L}}(t)$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\left\{\widehat{\mathcal{L}}(t)[\tau] + \sum_{k=1}^{m_J} \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_1\,\tau}{\|\tau\|_1}\right\} \\ &= \mathrm{Tr}\left\{\mathcal{L}(t)[\tau]\right\} - \sum_{k=1}^{m_J} \mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\tau]\} + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_1\ \mathrm{Tr}\{\tau\}}{\|\tau\|_1}\right) \end{aligned} \tag{4.41}$$

che risulta nullo se τ è positivo. E' quindi verificato che la soluzione positiva ρ_t è tale per cui

$$\mathrm{Tr}\{\rho_t\} = \rho \tag{4.42}$$

con $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, condizione iniziale dell'equazione (4.38). □

Osservazione 4.7. L'equazione (4.38) preserva la positività, ossia partendo da una condizione iniziale positiva, $\rho \geq 0$, si avrà il processo $\rho_t \geq 0$. Il problema è che non siamo ancora in grado, con la teoria sviluppata finora, di dimostrarlo. Rimandiamo questo risultato e la sua dimostrazione alla Sezione 5.1, Proposizione 5.2.

Il risultato di esistenza e unicità che segue è stato formulato in prima istanza da Jacod e Protter [10] in un contesto diverso, in seguito importato nel nostro contesto da Pellegrini [14] ed è qui riadattato alla nostra equazione (4.38) con salti e Wiener.

Teorema 4.8. *Sia data la nostra equazione*

$$\begin{aligned}\rho_t = \rho + &\int_0^t \left(\widehat{\mathcal{L}}(s)[\rho_{s-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(s,\rho_{s-})\rho_{s-}\right)\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m_R}\int_0^t \hat{n}_j(s,\rho_{s-})\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(s)\\ &+ \sum_{k=1}^{m_J}\int_0^t \int_{x\in[0,\,I_k(t,\rho_{t-})]}\left(\frac{\mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}]}{I_k(s,\rho_{s-})} - \rho_{s-}\right)\mu_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\end{aligned} \tag{4.43}$$

con $\widehat{W}_j$ Wiener indipendenti tra loro e misure μ_k indipendenti tra loro (come nell'Osservazione 4.3) e dai Wiener, per ogni $\rho \in M^n$ esiste una soluzione $\rho_t \in M^n$ cadlag che non esplode in tempo finito e tale soluzione è unica per traiettorie.

Dimostrazione. Possiamo riscrivere l'equazione (4.43) nella forma

$$\begin{aligned}\rho_t = \rho + &\int_0^t \left(\widehat{\mathcal{L}}(s)[\rho_{s-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(s,\rho_{s-})\,\rho_{s-}\right)\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m_R}\int_0^t \hat{n}_j(s,\rho_{s-})\mathrm{d}\widehat{W}_j(s)\\ &+ \sum_{k=1}^{m_J}\int_0^t \int_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{\mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}]}{I_k(s,\rho_{s-})} - \rho_{s-}\right)\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq I_k(s,\rho_{s-})\}}\mu_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

Ricordiamo che

$$I_k(t,\rho_{t-}) = \begin{cases} \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1}{\|\rho_{t-}\|_1}\,, & \text{se}\, \rho_{t-} \neq 0 \\ 0\,, & \text{se}\ \ \rho_{t-} = 0\end{cases} \qquad \text{e} \qquad I(t,\rho_{t-}) = \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t,\rho_{t-}) \tag{4.44}$$

e $\forall\, \rho \in M^n$ il processo di conteggio somma sarà

$$N^\rho(t) = \sum_{k=1}^{m_J} N_k(t) = \sum_{k=1}^{m_J}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{0\leq x\leq I_k(s,\rho_{s-})\}}\,\mu_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right), \tag{4.45}$$

dove le misure di Poisson μ_k sono prese come nell'Osservazione 4.3. Qui di seguito si definisce per ricorrenza una successione $(\rho(n)_t)$, per $n \geq 0$, di processi di M^n e una successione strettamente crescente di tempi d'arresto (T_n), per $n \geq 0$. Poniamo $T(0) = 0$ e $\rho(0)_t = 0$ e partiamo da $n = 1$. Chiamiamo per semplicità di notazione:

$$f(\rho)_t := \widehat{\mathcal{L}}(t)[\rho_{t-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t, \rho_{t-})\, \rho_{t-}$$

e definiamo ora il primo tempo di salto T_1 e $\rho(1)$

$$\begin{cases} \rho(1)_t = \rho + \int_0^t f(\rho(1)_s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m_R} \int_0^t \hat{n}_j(s, \rho(1)_s)\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) \\ T_1 = \inf\{t \ \text{ tale che } \ N_t^{\rho(1)} > 0\}. \end{cases} \tag{4.46}$$

Abbiamo che

$$N_{T_1}^{\rho(1)}(\omega) = \mu(\omega, G(\rho, T_1, 0)) = 1, \tag{4.47}$$

con $G(\rho, t, s) = \Big\{(u, y) \ \text{ tali che } \ t > u > s,\ 0 \leq y \leq \frac{\|\mathcal{J}_k(u)[\rho_{u-}]\|_1}{\|\rho_{u-}\|_1}\Big\}$.

La quantità $\mu(\omega, G(\rho, t, s))$ rappresenta il numero di punti sotto la curva $t \mapsto \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1}{\|\rho_{t-}\|_1}$. Se $T_1 < \infty$ abbiamo che $\frac{\|\mathcal{J}_k(T_1)[\rho(1)_{T_1-}]\|_1}{\|\rho_{T_1-}\|_1} > 0$.

Dalla regolarità del processo somma $N(t)$, (si veda in merito la Sezioni B.2.1) e dall'indipendenza delle misure casuali di Poisson μ_k, espressa nell'Osservazione 4.3, si deduce l'impossibilità di avere due salti simultaneamente. Euristicamente questa proprietà può essere rappresentata dalla formula (B.5.2).

Abbiamo definito, in (4.46), il primo tempo di salto, T_1, per processo somma $N^\rho(t)$, guardando la traiettoria ω saremo in grado di dire quale è il processo del vettore $\overline{N}(t)$ che salta. Conseguenza di ciò sarà il verificarsi del salto di un solo N_k in T_1 e quindi la prescrizione sarà univocamente determinata e data da

$$\begin{aligned} \rho_{T_1+} - \rho_{T_1-} &= \frac{\mathcal{J}_k(T_1)[\rho_{T_1-}]\,\|\rho_{T_1-}\|_1}{\|\mathcal{J}_k(T_1)[\rho_{T_1-}]\|_1} - \rho_{T_1-} \\ \Rightarrow\ \rho_{T_1} &= \begin{cases} \frac{\mathcal{J}_k(T_1)[\rho_{T_1-}]\,\|\rho_{T_1-}\|_1}{\|\mathcal{J}_k(T_1)[\rho_{T_1-}]\|_1}, & \text{se } \|\mathcal{J}_k(T_1)[\rho_{T_1-}]\|_1 \neq 0 \\ \widetilde{\rho}, & \text{se } \|\mathcal{J}_k(T_1)[\rho_{T_1-}]\|_1 = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.48}$$

poiché $\rho_{T_1+} = \rho_{T_1}$ (ρ_t è un processo cadlag) e poiché i termini in $\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}\widehat{W}_j$ sono trascurabili rispetto alla prescrizione. Come conseguenza si ha che $\rho(1)_t$, dall'equazione (4.46), è un processo cadlag. Osserviamo che nell'intervallo $[0, T_1)$ l'equazione (4.43) risulta essere semplicemente l'equazione

$$\rho_t = \rho + \int_0^t \Big(\widehat{\mathcal{L}}(s)[\rho_{s-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I(s,\rho_{s-})\rho_{s-} \Big) \mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m_R} \int_0^t \hat{n}_j(s,\rho_{s-}) \mathrm{d}\widehat{W}_j(s), \tag{4.49}$$

di cui si hanno già risultati di esistenza e unicità della soluzione (si veda in merito il Teorema 4.5, dimostrato precedentemente); mentre in corrispondenza del salto in T_1 si ha un'unica prescrizione, data dalla formula (4.48).

Il passo successivo è costruire il secondo tempo di salto T_2 e ρ_2, $(n = 2)$. Definiamo:

$$\begin{cases} \rho(2)_t = \rho_{T_1} + \int_{T_1}^t f(\rho(2)_s)\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m_R} \int_{T_1}^t \hat{n}_j(s,\rho(2)_s)\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) \\ T_2 = \inf\{t > T_1 \text{ tale che } N_t^{\rho(2)} > N_{T_1}^{\rho(1)}\}. \end{cases} \tag{4.50}$$

Se $T_2 < \infty$ abbiamo che l'intensità $\frac{\|\mathcal{J}_k(T_2)[\rho_{T_2-}]\|_1}{\|\rho_{T_2-}\|_1} > 0$. La soluzione dell'equazione (4.50) esiste ed è unica per traiettorie grazie al Teorema C.1 che è stato adattato, nella sezione C.2, proprio al caso dell'equazione (4.50).

In modo ricorsivo si arriva a definire:

$$\begin{cases} \rho(n+1)_t = \rho_{T_n} + \int_{T_n}^t f(\rho(n+1)_s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m_R} \int_{T_n}^t \hat{n}_j(s,\rho(n+1)_s)\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) \\ T_{n+1} = \inf\{t > T_n \text{ tale che } N_t^{\rho(n+1)} > N_{T_n}^{\rho(n)}\}. \end{cases} \tag{4.51}$$

con unica prescrizione in prossimità del tempo di salto T_{n+1}

$$\rho_{T_{n+1}} = \begin{cases} \frac{\mathcal{J}_k(T_{n+1})[\rho_{T_{n+1}-}] \left\|\rho_{T_{n+1}-}\right\|_1}{\left\|\mathcal{J}_k(T_{n+1})[\rho_{T_{n+1}-}]\right\|_1}, \text{ se } \left\|\mathcal{J}(T_{n+1})[\rho_{T_{n+1}-}]\right\|_1 \neq 0 \\ \widetilde{\rho}, \text{ se } \left\|\mathcal{J}_k(T_{n+1})[\rho_{T_{n+1}-}]\right\|_1 = 0. \end{cases} \tag{4.52}$$

Anche qui, come prima, la soluzione dell'equazione (4.51) esiste ed è unica per traiettorie grazie al Teorema C.1, con condizione iniziale il processo cadlag ρ_{T_n}.

La successione crescente dei tempi di salto T_n soddisfa la proprietà $T_{n+1} > T_n$ sull'insieme $\{T_n < \infty\}$; chiamiamo

$$T := \lim_{n\to\infty} T_n. \tag{4.53}$$

L'idea centrale della dimostrazione consiste nel prendere in esame ora le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \rho(n)_t = \rho_{T_{n-1}} + \int_{T_{n-1}}^t f(\rho(n)_s)\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m_R} \int_{T_{n-1}}^t \hat{n}_j(s,\rho(n)_s)\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) \\ \rho(n)_t = \rho(n-1)_t \text{ nell'intervallo } [0, T_{n-1}). \end{cases} \tag{4.54}$$

La dimostrazione delle proprietà (4.54) è fatta per induzione e si fonda sul fatto che una volta presa la prescrizione (4.52) l'equazione con salti diventa semplicemente un'equazione della forma (4.51), che, come già visto, ammette un'unica soluzione. Per $n = 1$ le proprietà (4.54) sono banalmente verificate. Supponiamole vere anche per $p \leq n$. Ora, poiché l'equazione (4.51) ammette un'unica soluzione, grazie alla successione (4.52) dei valori iniziali che sono i processi cadlag per ogni n, confrontando (4.54) e (4.51), si ha che $\rho(n+1) = \rho(n)$ sull'intervallo $[0, T_n)$. Per successione si ha

$$\begin{aligned} &\frac{\|\rho(n)_{T_n}\|_1 \mathcal{J}_k(T_n)[\rho(n)_{T_n}]}{\|\mathcal{J}_k(T_n)[\rho(n)_{T_n}]\|_1} - \rho(n)_{T_n} \\ &\qquad = \frac{\|\rho(n+1)_{T_n}\|_1 \mathcal{J}_k(T_n)[\rho(n+1)_{T_n}]}{\|\mathcal{J}_k(T_n)[\rho(n+1)_{T_n}]\|_1} - \rho(n+1)_{T_n} \end{aligned} \tag{4.55}$$

sull'insieme $\{T_n < \infty\}$ e grazie alla (4.51) si ha che $\rho(n+1)$ soddisfa la (4.54) e quindi la (4.54) è verificata per tutti gli indici $n \geq 1$. Siamo in grado quindi di esprimere la soluzione ρ_t dell'equazione con salti (4.43). Per ogni $t < T$ si ha

$$\rho_t = \rho(n)_t \quad \text{sull'insieme} \quad [0, T_n) \tag{4.56}$$

Dalla relazione (4.54) si deduce che: $I(t, \rho(n)_{t-}) = I(t, \rho(n-1)_{t-})$ in $[0, T_{n-1})$ quindi $N^{\rho(n)} = N^{\rho(n-1)}$ sull'intervallo $[0, T_{n-1})$ e dunque generalizzando si ha $N^{\rho(n)} = N^{\rho(p)}$ sull'intervallo $[0, T_p)$ per $p \leq n$.

Abbiamo già definito T, in (4.53), prevedibile e strettamente positivo. Dalle equazioni (4.54) si definisce ρ_t su $[0, T)$ ponendo $\rho_t = \rho(n)_t$ su $[0, T_n)$ e ρ_t è soluzione sull'intervallo $[0, T)$.

Mostreremo che T è un tempo di esplosione della soluzione e che in particolare grazie alla forma limitata dell'intensità si ha $T = \infty$ quasi certamente.

Abbiamo già verificato nella stima (4.13) che

$$0 \leq I(t, \rho_{t-}) \leq \sum_{k=1}^{m_J} \|J_k(t)\|_\infty$$

allora si può scrivere

$$0 \leq \int_0^t I(s, \rho_{s-})\, \mathrm{d}s \leq \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{m_J} \|J_k(s)\|_\infty \right) ds =: A_t \tag{4.57}$$

con A_t processo crescente a valori finiti. Sia ora $S_n = \inf\{t : A_t \geq n\}$. Allora si ha $A_{S_{n-}} \leq n$, dunque $\int_0^{S_n} I(s, \rho_{s-})\, \mathrm{d}s \leq n$; vale quindi

$$\mathbb{E}\left[N^\rho_{T_p \wedge S_n} \right] \leq \mathbb{E}\left[N^\rho_{S_n} \right] \leq n. \tag{4.58}$$

Ricordando la scrittura (4.45) di $N^\rho(t)$ la (4.58) diventa

$$\mathbb{E}\left[N^\rho_{T_p\wedge S_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{m_J}\int_0^{T_p\wedge S_n}\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{1}_{\{0\le x\le I_k(s,\rho_{s-})\}}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{m_J}\int_0^{T_p\wedge S_n} I_k(s,\rho_{s-})\,\mathrm{d}s\right] \le \mathbb{E}\left[\int_0^{S_n} I(s,\rho_{s-})\,\mathrm{d}s\right] \le n. \quad (4.59)$$

Inoltre $N^\rho_{T_p\wedge S_n} = p$ sull'insieme $\{T_p < S_n\}$. Dunque $p\,\mathbb{P}(T_p < S_n) \le n$, e quindi $\mathbb{P}(T < S_n) = 0$ per ogni n. Grazie a questo risultato e poiché $S_n \to \infty$ allora si ha $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$. E' così dimostrato che il tempo di esplosione del processo di conteggio somma $N^\rho(t)$ ha probabilità nulla di avvenire in tempo finito.

Resta da verificare l'unicità della soluzione dell'equazione (4.43) che discende dall'unicità della soluzione dell'equazione (4.51) e dall'unicità della prescrizione in prossimità dei tempi di salto T_n. □

La dimostrazione del Teorema 4.8, appena presentato, dà implicitamente un modo per costruire la soluzione dell'equazione (4.43) e i tempi di salto T_n.

4.7 Un approccio alternativo

Un modo parzialmente alternativo di affrontare il problema è far vedere che la nostra equazione (4.38) rientra nella situazione studiata nel lavoro [10] di Jacod e Protter.

Notazione 4.1. Chiamiamo D lo spazio di tutti i processi reali cadlag (continui a destra e con limite finito a sinistra) adattati; e $\overline{P}$ lo spazio dei processi reali prevedibili.

Per la nozione di processo prevedibile si veda la Definizione B.2.

Definizione 4.9. Si dice che l'*applicazione* H da D in $\overline{P}$ è *prevedibile* se per tutti i processi $X, X' \in D$, preso T un tempo d'arresto, se $X_{T-} = (X')_{T-}$, allora si ha che $H(X)_T$ e $H(X')_T$ sono indistinguibili.

Con X_{T-} intendiamo il processo X arrestato un istante prima di T e per la nozione di processi indistinguibili si veda la Definizione A.3.

In seguito verificheremo che i coefficienti della nostra equazione (4.38) rientrano nelle ipotesi del Teorema 27 del lavoro [10] di Jacod e Protter che riportiamo

Teorema 4.10. *Presa l'equazione*

$$X_t = X_0 + \int_0^t F(X)_s \, \mathrm{d}s + \sum_j \int_0^t C_j(X)_s \, \mathrm{d}\widehat{W}_j(s)$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} G(X)_s \, \mathbb{1}_{\{0 \le x \le \lambda(X)_s\}} \, \mu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \quad (4.60)$$

se F, G, λ e C_j, per ogni j, sono applicazioni prevedibili da D in $\overline{P}$, se l'equazione

$$X_t = X_0 + \int_0^t F(X)_s \, \mathrm{d}s + \sum_j \int_0^t C_j(X)_s \, \mathrm{d}\widehat{W}_j(s) \quad (4.61)$$

ammette un'unica soluzione per ogni condizione iniziale $X_0 \in D$ e se valgono

$$\lambda(X) \ge 0 \quad e \quad \int_0^t \lambda(X)_s \, \mathrm{d}s \le A_t \quad \forall\, X \in D, \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.62)$$

con A_t processo crescente a valori finiti, allora l'equazione (4.60) *ammette uno e un solo processo soluzione $X \in D$ che non esplode in tempo finito.*

Vogliamo verificare se la nostra equazione con salti (4.38) verifica le ipotesi del Teorema 4.10. Cominciamo con l'osservare che, come già discusso e dimostrato nella Sezione 4.5, l'equazione con solo drift e componente diffusiva

$$\mathrm{d}\rho_t = \left(\widehat{\mathcal{L}}(t)[\rho_t] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t, \rho_{t-}) \, \rho_t \right) \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R} \hat{n}_j(t, \rho_t) \, \mathrm{d}\widehat{W}_j(t)$$

ammette un'unica soluzione per traiettorie e in legge, come richiesto dal Teorema 4.10. In secondo luogo l'intensità presente nell'equazione (4.38) verifica le richieste (4.62). Possiamo infatti costruire un processo A_t crescente e a valori finiti, proprio grazie alla limitatezza dell'intensità ottenuta con le opportune modificazioni proposte nel corso di questo lavoro. Infatti dalla stima (4.27) si ha

$$0 \le \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t, \tau) = \sum_{k=1}^{m_J} \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_1}{\|\tau\|_1} \le \sum_{k=1}^{m_J} \big\| J_k(t) \big\|_\infty . \quad (4.63)$$

E' sufficiente quindi richiamare l'Osservazione 2.3, grazie alla quale si ha $\sup_{t \in [0,T]} \| \sum_k J_k(t) \|_\infty < +\infty$, per controllare la stima (4.27) su tutti i tempi $t \le T$. Riusciamo così ad ottenere le seguenti stime che soddisfano la (4.62) del teorema precedente:

$$\frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1}{\|\rho_{t-}\|_1} \ge 0 \quad \text{e} \quad \int_0^t \sum_{k=1}^{m_J} \frac{\|\mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}]\|_1}{\|\rho_{s-}\|_1} \, \mathrm{d}s \le A_t \, , \quad \forall\, \rho \in D, \forall\, t \in \mathbb{R}_+$$

prendendo il processo, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$,

$$A_t = t \sum_{k=1}^{m_J} \big\| J_k(t) \big\|_\infty = t \cdot \text{cost}.$$

Restano infine da verificare le richieste sui coefficienti dell'equazione (4.38). Qui di seguito facciamo uso della nozione di applicazione prevedibile data nella Definizione 4.9. Definiamo, in analogia al Teorema 4.10, le seguenti applicazioni da D in $\overline{P}$

$$F(\rho)_s := \left(\widehat{\mathcal{L}}(s)[\rho_{s-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(s, \rho_{s-})\, \rho_{s-} \right), \tag{4.64}$$

ricordando che l'insieme degli indici j è finito si ha, per ogni j,

$$C_j(\rho)_s := \hat{n}_j(s, \rho_{s-}), \tag{4.65}$$

$$G(\rho)_s := \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}]}{I_k(s, \rho_{s-})} - \rho_{s-} \right), \tag{4.66}$$

ed infine, nel nostro caso,

$$\lambda(\rho)_s := \sum_{k=1}^{m_J} I_k(s, \rho_{s-}) = \sum_{k=1}^{m_J} \frac{\|\mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}]\|_1}{\|\rho_{s-}\|_1}. \tag{4.67}$$

Supponiamo quindi di avere due processi ρ e $\rho' \in D$ e prendiamo T un tempo d'arresto. Se vale l'uguaglianza $\rho_{T-} = (\rho')_{T-}$ voglio dimostrare che $F(\rho)_T$ e $F(\rho')_T$ sono indistinguibili. Mi interessa allora verificare la relazione che segue:

$$\begin{aligned} F(\rho)_T = \left(\widehat{\mathcal{L}}(T)[\rho_{T-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(T, \rho_{T-})\, \rho_{T-} \right) = \\ \left(\widehat{\mathcal{L}}(T)[\rho'_{T-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(T, \rho'_{T-})\, \rho'_{T-} \right) = F(\rho')_T. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Poiché $\rho_{T-} = (\rho')_{T-}$ e ricordando le assunzioni della sezione 2.2 sui coefficienti $H(t)$, $L_l(t)$, $R_j(t)$, $V_k^r(t)$ e $J_k(t)$, ossia che sono operatori lineari su $\mathcal{H}$ (matrici $n \times n$), continui da sinistra e con limiti finiti da destra, ne discende che la catena di uguaglianze in (4.68) è verificata quasi certamente. Analogamente anche per le altre applicazioni si ha, per ogni j

$$C_j(\rho)_T = \hat{n}_j(T, \rho_{T-}) = \hat{n}_j(T, \rho'_{T-}), = C_j(\rho')_T, \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned} G(\rho)_T = \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\mathcal{J}_k(T)[\rho_{T-}]}{I_k(T, \rho_{T-})} - \rho_{T-} \right) = \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\mathcal{J}_k(T)[\rho'_{T-}]}{I_k(T, \rho'_{T-})} - \rho'_{T-} \right) \\ = G(\rho')_T, \end{aligned} \tag{4.70}$$

ed infine

$$\lambda(\rho)_T = \sum_{k=1}^{m_J} \frac{\|\mathcal{J}_k(T)[\rho_{T-}]\|_1}{\|\rho_{T-}\|_1} = \sum_{k=1}^{m_J} \frac{\|\mathcal{J}_k(T)[\rho'_{T-}]\|_1}{\|\rho'_{T-}\|_1} = \lambda(\rho')_T. \qquad (4.71)$$

Abbiamo quindi dimostrato che le applicazioni F, C_j, G e λ sono applicazioni prevedibili da D in $\overline{P}$, secondo la Definizione 4.9.

Per la nostra equazione (4.38) risultano allora verificate tutte le ipotesi del Teorema 4.10.

Capitolo 5

La master equation stocastica

5.1 Passaggio dall'EDS non lineare alla lineare

Nel Capitolo 2 abbiamo ottenuto l'equazione non lineare per lo stato a posteriori ρ_t di un sistema quantistico partendo da uno spazio di probabilità teorico $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{Q})$ assegnato e dall'EDS lineare

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_t = \mathcal{L}(t)[\sigma_{t_-}]\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R} \mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t_-}]\,\mathrm{d}W_j(t) \\ + \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_-}]}{\lambda_k} - \sigma_{t_-} \right) (\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k \mathrm{d}t)\,. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Con un opportuno cambio di misura di probabilità abbiamo costruito le probabilità fisiche $\mathbb{P}_T$ che dipendono dalla scelta dello stato iniziale ρ del sistema e che formano una famiglia consistente al variare di T.

Ora possiamo invece considerare lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ assegnato e l'EDS non lineare

$$\begin{aligned} \rho_t = \rho + \int_0^t \left(\widehat{\mathcal{L}}(s)[\rho_{s-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(s, \rho_{s-})\,\rho_{s-} \right) \mathrm{d}s \\ + \sum_{j=1}^{m_R} \int_0^t \hat{n}_j(s, \rho_{s-})\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) + \sum_{k=1}^{m_J} \int_0^t \left(\frac{\mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}]}{I_k(s, \rho_{s-})} - \rho_{s-} \right) \mathrm{d}N_k(s), \end{aligned} \quad (5.2)$$

come punto di partenza e ricavare un'equazione lineare (2.40) tramite passaggi inversi a quelli svolti nel Capitolo 2. Lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ sarà dato una volta per tutte e la probabilità $\mathbb{P}$ sarà indipendente dall'intervallo di tempo $[0, T]$ in cui ci mettiamo e dallo stato iniziale ρ del sistema. I processi $\widehat{W}_j(t)$ dell'equazione (5.2) sono dei Wiener standard e indipendenti tra loro. I processi $N_k(t)$ sono processi di conteggio regolari definiti dalla (4.11) a partire dalle misure di Poisson μ_k

(Definizione 4.2). Ricordiamo che l'intensità stocastica di N_k è data da

$$I_k(t,\rho_{t-}) = \begin{cases} \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1}{\|\rho_{t-}\|_1}\,, \text{ se } \rho_{t-} \neq 0 \\ 0\,, \text{ se } \rho_{t-} = 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

che

$$n_j(t,\tau) := \begin{cases} \frac{\operatorname{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\tau]\}}{\|\tau\|_1} & \tau \neq 0, \\ 0 & \tau = 0, \end{cases}$$

e che gli $\widehat{n}_j(t,\tau)$ sono definiti da

$$\hat{n}_j(t,\tau) := \mathcal{R}_j(t)[\tau] - \frac{\operatorname{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\tau]\}}{\|\tau\|_1}\,\tau.$$

Prendiamo la soluzione dell'EDS non lineare (5.2), con condizione iniziale $\rho \in M^n$ e definiamo, per analogia con le scritture (2.50) e (2.52), rispettivamente dei processi ρ_t e p_t, date nel Capitolo 2

$$\begin{aligned} p_t := \exp\Bigg\{&\sum_{j=1}^{m_R}\left[\int_0^t n_j(s,\rho_{s-})\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) + \frac{1}{2}\int_0^t n_j(s,\rho_{s-})^2\mathrm{d}s\right] \\ &+ \sum_{k=1}^{m_J}\left[\int_0^t \ln\left(\frac{I_k(s,\rho_{s-})}{\lambda_k}\right)\mathrm{d}N_k(s) + \int_0^t (\lambda_k - I_k(s,\rho_{s-}))\,\mathrm{d}s\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\sigma_t := p_t\,\rho_t. \tag{5.5}$$

Nel caso in cui si abbia $I_k(s,\rho_{s-}) = 0$ la scrittura rigorosa di p_t è simile alla (2.60).

Le costanti λ_k, nella (5.4), sono arbitrarie e hanno come unico vincolo quelle di essere positive. Notiamo come le λ_k non abbiano alcun significato di tipo fisico; non appaiono infatti nella probabilità fisica $\mathbb{P}$ né nell'equazione non lineare per lo stato a posteriori ρ_t del sistema quantistico. Quindi la scelta delle λ_k, per $k = 1, 2, \ldots, m_J$, non condiziona fisicamente il sistema; possono quindi essere scelte arbitrariamente.

Differenziando p_t in (5.4) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p_t = p_{t_-}\Bigg\{&\sum_{j=1}^{m_R} n_j(t,\rho_{t-})\left(\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + n_j(t,\rho_{t-})\mathrm{d}t\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{I_k(t,\rho_{t-})}{\lambda_k} - 1\right)\left(\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k\,\mathrm{d}t\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Proposizione 5.1. *Il differenziale stocastico di σ_t è*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_t = \mathcal{L}(t)[\sigma_{t_-}]\mathrm{d}t &+ \sum_j \mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t_-}]\left(\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + n_j(t,\rho_{t-})\,\mathrm{d}t\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_-}]}{\lambda_k} - \sigma_{t_-}\right)(\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k\mathrm{d}t)\,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Se la condizione iniziale è autoaggiunta, $\rho = \rho^*$, il processo

$$(p_t)^{-1} = \exp\Bigg\{\sum_{j=1}^{m_R}\left[\int_0^t (-\,n_j(s,\rho_{s-}))\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) - \frac{1}{2}\int_0^t n_j(s,\rho_{s-})^2 \mathrm{d}s\right] + \sum_{k=1}^{m_J}\left[\int_0^t \ln\left(\frac{\lambda_k}{I_k(s,\rho_{s-})}\right)\mathrm{d}N_k(s) + \int_0^t (I_k(s,\rho_{s-}) - \lambda_k \mathrm{d}s)\right]\Bigg\} \tag{5.8}$$

è una $\mathbb{P}$-martingala positiva a media uno.

Dimostrazione. Applicando la formula di Ito per il prodotto possiamo scrivere il differenziale del processo, σ_t, definito in (5.5), come

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_t &= \mathrm{d}(p_t\,\rho_t) = p_{t-}\,\mathrm{d}(\rho_t) + \mathrm{d}(p_t)\,\rho_{t-} + \mathrm{d}(p_t)\,\mathrm{d}(\rho_t) = \\
& p_{t-}\left[\left(\widehat{\mathcal{L}}(t)[\rho_{t-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t,\rho_{t-})\,\rho_{t-}\right)\mathrm{d}t + \sum_j \widehat{n}_j(t,\rho_{t-})\mathrm{d}\widehat{W}_j(t)\right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]}{I_k(t,\rho_{t-})} - \rho_{t-}\right)\mathrm{d}N_k(t)\right] + p_{t_-}\left\{\sum_{j=1}^{m_R} n_j(t,\rho_{t-})\left(\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + n_j(t,\rho_{t-})\mathrm{d}t\right)\right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\widehat{I}_k(t,\rho_{t-})}{\lambda_k} - 1\right)\left(\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k\,\mathrm{d}t\right)\right\}\rho_{t-} \\
& + \left[p_{t_-}\left\{\sum_{j=1}^{m_R} n_j(t,\rho_{t-})\left(\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + n_j(t,\rho_{t-})\mathrm{d}t\right)\right.\right. \\
& \left.\left. + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{I_k(t,\rho_{t-})}{\lambda_k} - 1\right)\left(\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k\,\mathrm{d}t\right)\right\}\right] \\
& \left[\left(\widehat{\mathcal{L}}(t)[\rho_{t-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t,\rho_{t-})\,\rho_{t-}\right)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R} \widehat{n}_j(t,\rho_{t-})\mathrm{d}\widehat{W}_j(t)\right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]}{I_k(t,\rho_{t-})} - \rho_{t-}\right)\mathrm{d}N_k(t)\right].
\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_t = \left(\widehat{\mathcal{L}}(t)[\sigma_{t-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t,\rho_{t-})\,\sigma_{t-}\right)\mathrm{d}t \\
+ \sum_{j=1}^{m_R}\left(\mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t-}] - \frac{\operatorname{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\rho_{t-}]\}\sigma_{t_-}}{\|\rho_{t-}\|_1}\right)\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) \\
+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t-}]}{I_k(t,\rho_{t-})} - \sigma_{t-}\right)\mathrm{d}N_k(t) \\
+ \sum_{j=1}^{m_R}\left(\frac{\operatorname{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\rho_{t-}]\}\sigma_{t_-}}{\|\rho_{t-}\|_1}\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + \sigma_{t-}n_j(t,\rho_{t-})^2\,\mathrm{d}t\right) \\
+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{I_k(t,\rho_{t-})\,\sigma_{t_-}}{\lambda_k} - \sigma_{t_-}\right)\mathrm{d}N_k(t) - I_k(t,\rho_{t-})\,\sigma_{t-}\,\mathrm{d}t + \lambda_k\,\sigma_{t-}\,\mathrm{d}t \\
+ \sum_{j=1}^{m_R}\left(\mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t-}] - \frac{\operatorname{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\rho_{t-}]\}\sigma_{t_-}}{\|\rho_{t-}\|_1}\right)\left(\frac{\operatorname{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\rho_{t-}]\}}{\|\rho_{t-}\|_1}\right)\mathrm{d}t \\
+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_-}]}{I_k(t,\rho_{t-})} - \sigma_{t_-}\right)\left(\frac{I_k(t,\rho_{t-})}{\lambda_k} - 1\right)\mathrm{d}N_k(t).
\end{aligned}
$$

Semplificando, raccogliendo i termini e ricordando la scrittura (4.8) di $\widehat{\mathcal{L}}$ segue l'EDS (5.7) a cui volevamo ricondurci.

Si verifica banalmente che ρ_t^* soddisfa la stessa EDS di ρ_t; se partiamo da una condizione iniziale autoaggiunta, $\rho = \rho^*$, per l'unicità per traiettorie della soluzione si ha che i due processi ρ_t e ρ_t^* sono indistinguibili.

Dalla scrittura (5.4) di p_t è semplice scrivere il processo $(p_t)^{-1}$, come in (5.8). Definiamo

$$
\begin{aligned}
Z_t := \sum_{j=1}^{m_R}\left[\int_0^t (-\,n_j(s,\rho_{s-}))\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) - \frac{1}{2}\int_0^t n_j(s,\rho_{s-})^2\mathrm{d}s\right] \\
+ \sum_{k=1}^{m_J}\left[\int_0^t \ln\left(\frac{\lambda_k}{I_k(s,\rho_{s-})}\right)\mathrm{d}N_k(s) + \int_0^t (I_k(s,\rho_{s-}) - \lambda_k)\,\mathrm{d}s\right], \quad (5.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_t := \sum_{j=1}^{m_R}\int_0^t (-\,n_j(s,\rho_{s-}))\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) \\
+ \sum_{k=1}^{m_J}\int_0^t \left(\frac{\lambda_k}{I_k(s,\rho_{s-})} - 1\right)\big(\mathrm{d}N_k(s) - I_k(s,\rho_{s-})\,\mathrm{d}s\big). \quad (5.10)
\end{aligned}
$$

Assumiamo la condizione iniziale autoaggiunta in modo che X_t e Z_t siano reali.

Poiché X_t è una $\mathbb{P}$-martingala locale allora anche $(p_t)^{-1} = \mathcal{E}(X_t) = \exp\{Z_t\}$ lo è (si veda in merito il Teorema 2 in [12]), dove $\mathcal{E}(X_t)$ è l'esponenziale stocastico di X_t. Abbiamo dunque che $(p_t)^{-1}$ è una $\mathbb{P}$-martingala locale positiva; allora $(p_t)^{-1}$ è una super martingala e si ha che

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\,(p_t)^{-1}\,] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\,(p_0)^{-1}\,] = 1. \tag{5.11}$$

Il Lemma 7 in [11] ci dice che per stabilire l'uguaglianza in (5.11), cioè perché $(p_t)^{-1}$ sia una martingala, deve essere verificata la cosiddetta condizione di Kabanov, Liptser e Shiryayev

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \int_0^t \left[\sum_{j=1}^{m_R} (-\,n_j(s,\rho_{s-}))^2 + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\sqrt{\frac{\lambda_k}{I_k(s,\rho_{s-})}}-1\right)^2 I_k(s,\rho_{s-})\right]\mathrm{d}s \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \int_0^t \left[\sum_{j=1}^{m_R} (-\,n_j(s,\rho_{s-}))^2 + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{I_k(s,\rho_{s-})}\right)^2\right]\mathrm{d}s < +\infty.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Grazie alla limitatezza dei coefficienti dell'integrale in $[0,t]$ si ha la limitatezza dell'estremo superiore essenziale in (5.12), ne segue che $(p_t)^{-1}$ è una $\mathbb{P}$-martingala. Poiché Z_t è reale segue che $(p_t)^{-1}$ è positiva, la (5.11) diviene un'uguaglianza e $(p_t)^{-1}$ ha media uno. □

Proposizione 5.2. *Presa una condizione iniziale positiva, $\rho \geq 0$, allora il processo ρ_t è positivo e la traccia di ρ_t è conservata.*

Dimostrazione. Mettiamoci nell'intervallo $[0,T]$. Definiamo

$$\mathbb{Q}_t(\mathrm{d}\omega) := (p_t)^{-1}\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \quad \text{su} \quad \mathcal{F}_t^0. \tag{5.13}$$

Dalla Proposizione 5.1 otteniamo che $\mathbb{Q}$ è una nuova misura di probabilità. Dal teorema di Girsanov e dalle sue generalizzazioni in situazioni con salti, abbiamo che, sotto la misura di probabilità $\mathbb{Q}_t$

- i processi $W_j(t) := \widehat{W}_j(t) + \int_0^t n_j(s,\rho_{s-})\,\mathrm{d}s$ sono dei Wiener standard e indipendenti tra loro
- i processi $N_k(t)$ sono processi di conteggio con intensità deterministica e costante nel tempo λ_k. Gli $N_k(t)$ sono quindi dei processi di Poisson con intensità λ_k.

Questo risultato discende da teoremi che generalizzano il teorema di Girsanov - Meyer, si veda in merito [16], teorema 20, pag 109.

Dalla Proposizione 5.1 il processo σ_t soddisfa, sotto $\mathbb{Q}_T$, l'EDS lineare

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_t = \mathcal{L}(t)[\sigma_{t-}]\mathrm{d}t &+ \sum_{j=1}^{m_R} \mathcal{R}_j(t)[\sigma_{t-}]\,\mathrm{d}W_j(t) \\
&+ \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\sigma_{t_}]}{\lambda_k} - \sigma_{t_}\right)(\mathrm{d}N_k(t) - \lambda_k\mathrm{d}t)\,.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Dalla positività della condizione iniziale e dalla Proposizione 2.8 si ha $\sigma_t \geq 0$. Essendo $p_t \geq 0$ per costruzione, si ottiene $\rho_t \geq 0$. Abbiamo già verificato con la Proposizione 4.6 che la traccia dell'equazione (5.2) è conservata quando la soluzione ρ_t è positiva. $\square$

Osservazione 5.3. Si noti che anche con l'EDS non lineare (5.2) sussiste il problema della verifica della positività, proprio come era accaduto con l'EDS lineare (2.18) nel Capitolo 2. Non risulta, infatti, banale la verifica della positività dell'EDS (5.2) a vista, come avevamo già notato nell'Osservazione 4.7. Nella dimostrazione della Proposizione 5.2 abbiamo infatti utilizzato la scrittura di ρ_t come il prodotto di due fattori positivi.

5.2 Strumenti

Essendo arrivati ad un'equazione lineare dello stesso tipo di quelle introdotte all'inizio è quasi ovvio che possiamo ricostruire gli strumenti e tutte le previsioni di tipo fisico che potevamo ottenere nella teoria che partiva dalla master equation lineare.

Per semplicità prendiamo 0 come tempo iniziale e fissiamo l'intervallo temporale $[0, T]$. In modo analogo si potrebbe trattare il caso di un qualunque tempo iniziale.

Sia $\sigma_\rho(t)$ la soluzione della (5.14) sotto $\mathbb{Q}_T$ e condizione iniziale $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Costruiamo al solito modo gli strumenti relativi all'osservazione dell'output W_j e $\overline{N}$. Otteniamo che $\forall\ G \in \mathcal{F}_t^0$ e $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_t^0(G)[\rho] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}[\mathbb{1}_G\, \sigma_\rho(t)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(p_t)^{-1}\, \mathbb{1}_G\, \sigma_\rho(t)] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_G\, (p_t)^{-1}\, \sigma_\rho(t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_G\, \rho_t] \quad (5.15)\end{aligned}$$

La relazione (5.15) ci dice che $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_G\, \rho_t]$ è lineare in ρ, che definisce uno strumento $\mathcal{I}_t^0(\cdot)$ e che i ρ_t sono proprio gli stati a posteriori di tale strumento. Analogamente a quanto fatto nella Sezione 3.3, possiamo definire gli "strumenti finito dimensionali" $\mathcal{I}_t^r(\cdot\,; \overrightarrow{k}, \overrightarrow{h})$.

5.3 Operatore caratteristico

Prendiamo ora i seguenti ingredienti:

- I processi $W_j(t) := \widehat{W}_j(t) + \int_0^t n_j(s, \rho_{s-})\, \mathrm{d}s$ e $N_k(t)$, interpretati come output;
- la condizione iniziale $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$;
- la soluzione ρ_t della master equation stocastica (5.2), dove ρ_t è inteso come stato a posteriori;
- la probabilità $\mathbb{P}$.

Prendiamo lo spazio $\mathcal{S}$, introdotto nella notazione 3.1 e una coppia di funzioni $(k,h) \in \mathcal{S}$. Introduciamo le variabili aleatorie

$$X_t^r(k,h) := \sum_{j=1}^{m_R} \int_r^t k_j(s)\mathrm{d}W_j(s) + \sum_{k=1}^{m_J} \int_r^t h_k(s)\,\mathrm{d}N_k(s). \tag{5.16}$$

Proviamo quindi a studiare

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[e^{\mathrm{i}\,X_t^0(k,\,h)}\rho_t\right]. \tag{5.17}$$

Per semplicità di notazione introduciamo

$$z_t := \exp\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m_R}\int_0^t k_j(s)\mathrm{d}W_j(s) + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{m_J}\int_0^t h_k(s)\,\mathrm{d}N_k(s)\right\}, \tag{5.18}$$

$$x_t := z_t\,\rho_t. \tag{5.19}$$

Vogliamo quindi ottenere la scrittura di $\mathrm{d}x_t$. A questo scopo utilizzeremo il differenziale di z_t, ottenuto applicando la formula di Ito nel caso con salti, come mostrato con l'equazione (B.40). Quindi si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_t &= \mathrm{d}z_t\,\rho_{t-} + z_{t-}\,\mathrm{d}\rho_t + \mathrm{d}z_t\,\mathrm{d}\rho_t = \\
&\quad z_{t-}\Bigg(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)\big(\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + n_j(t,\rho_{t-})\mathrm{d}t\big) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)^2\mathrm{d}t \\
&+ \sum_{k=1}^{m_J}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,h_k(t)} - 1\big)\,\mathrm{d}N_k(t)\Bigg)\rho_{t-} + z_{t-}\cdot\Bigg(\widehat{\mathcal{L}}(t)[\rho_{t-}] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t,\rho_{t-})\,\rho_{t-}\Bigg)\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m_R}\hat{n}_j(t,\rho_{t-})\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + \sum_{k=1}^{m_J}\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]}{I_k(t,\rho_{t-})} - \rho_{t-}\right)\mathrm{d}N_k(t)\Bigg) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m_R}\mathrm{i}\,k_j(t)\,\left(\mathcal{R}_j(t)[x_{t-}] - \frac{\mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\rho_{t-}]\,\}x_{t-}}{\|\rho_{t-}\|_1}\right)\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m_J}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,h_k(t)} - 1\big)\left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[x_{t-}]}{I_k(t,\rho_{t-})} - x_{t-}\right)\mathrm{d}N_k(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{i} \sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)\, x_{t-}\, \mathrm{d}\widehat{W}_j(t) + \mathrm{i} \sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)\, x_{t-} n_j(t, \rho_{t-})\, \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)^2\, x_{t-} \mathrm{d}t \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m_J} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, h_k(t)} - 1\right) x_{t-} \mathrm{d}N_k(t) + \widehat{\mathcal{L}}(t)[x_{t-}]\mathrm{d}t \\
&+ \sum_{k=1}^{m_J} \left(I_k(t, \rho_{t-})\, x_{t-}\right) \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m_R} \left(\mathcal{R}_j(t)[x_{t-}] - \frac{\mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_j(t)[\rho_{t-}]\}x_{t-}}{\|\rho_{t-}\|_1} \right) \mathrm{d}\widehat{W}_j(t) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[x_{t-}]}{I_k(t, \rho_{t-})} - x_{t-} \right) \mathrm{d}N_k(t) + \sum_{j=1}^{m_R} \mathrm{i}\, k_j(t)\, \hat{n}_j(t, x_{t-}) \mathrm{d}t \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{m_J} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, h_k(t)} - 1\right) \left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[x_{t-}]}{I_k(t, \rho_{t-})} - x_{t-} \right) \mathrm{d}N_k(t).
\end{aligned}
$$

Raccogliendo si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x_t = &\left\{ \widehat{\mathcal{L}}(t)[x_t] + \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t, \rho_{t-})\, x_{t-} + \sum_{j=1}^{m_R} \mathrm{i}\, k_j(t) x_{t-} n_j(t, \rho_{t-}) - \frac{1}{2} k_j(t)^2 x_{t-} \right. \\
&\qquad \left. + \mathrm{i}\, k_j(t) \big(\mathcal{R}_j(t)[x_{t-}] - x_{t-} n_j(t, \rho_{t-}) \big) \right\} \mathrm{d}t \\
&+ \sum_{j=1}^{m_J} \left\{ \mathrm{i} k_j(t) x_{t-} + \big(\mathcal{R}_j(t)[x_{t-}] - x_{t-} n_j(t, \rho_{t-}) \big) \right\} \mathrm{d}\widehat{W}_j(t) \\
&+ \sum_{k=1}^{m_J} \left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, h_k(t)} - 1\right) \left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[x_{t-}]}{I_k(t, \rho_{t-})} - x_{t-} \right) + \left(\frac{\mathcal{J}_k(t)[x_{t-}]}{I_k(t, \rho_{t-})} - x_{t-} \right) \right. \\
&\qquad \left. + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, h_k(t)} - 1\right) x_{t-} \right) \mathrm{d}N_k(t).
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Dall'Osservazione 2.3 circa la limitatezza dei coefficienti della (5.20), dal fatto che l'integrale stocastico del Wiener $\widehat{W}_j(t)$ ha media nulla sotto la probabilità $\mathbb{P}$, dalla scrittura di $\widehat{\mathcal{L}}(t)$, dall'equazione $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\,\mathrm{d}N_k(t)\,|\mathcal{F}_t^0] = I_k(t, \rho_{t-})\,\mathrm{d}t$ ottengo che l'espressione $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, X_t^0(k,h)}\, \rho_t\right]$ definisce un map lineare in ρ che chiamiamo $\mathcal{G}$. L'espressione di questo map lineare, dai calcoli che abbiamo svolto, coincide con quello della Sezione 3.2, equazioni (3.16) e (3.17), che richiamiamo

$$
\mathcal{G}(t, 0; k, h) = \mathrm{Id}_n + \int_0^t \Lambda_s(k(s), h(s)) \circ \mathcal{G}(s, 0; k, h) \mathrm{d}s \tag{5.21}
$$

con

$$\Lambda_t(k(t), h(t)) := \mathcal{L}(t) + \sum_{j=1}^{m_J} \left(\mathrm{i}\, k_j(t) \mathcal{R}_j(t) - \frac{1}{2} k_j(t)^2 \, \mathrm{Id}_n \right) + \sum_{k=1}^{m_J} \mathcal{J}_k(t) \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, h_k(t)} - 1 \right). \tag{5.22}$$

Più precisamente l'identità dei due map $\mathcal{G}$ discende dall'unicità della soluzione dell'equazione (5.21).

In altre parole, costruiti σ_t e $\mathbb{Q}_T$, con $T \geq t$, come fatto nella Sezione 5.1, stiamo dicendo che, preso lo stato iniziale ρ, si ha

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, X_t^0(k,h)} \, \rho_t \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, X_t^0(k,h)} \, \sigma_t \right] = \mathcal{G}(t, 0; k, h)[\rho]. \tag{5.23}$$

Un altro modo per vedere che si può partire sia dalla master equation stocastica lineare sia da quella non lineare e ottenere lo stesso modello fisico è di ragionare sugli operatori caratteristici. Nei due approcci si parte da spazi di probabilità diversi dove sono definiti processi di Wiener e di conteggio diversi; con due regole diverse si costruiscono degli operatori caratteristici che risultano essere uguali (perché soddisfano la stessa equazione differenziale). Dunque, almeno gli "strumenti finito dimensionali" della Sezione 3.3 coincidono.

Appendice A

Notazioni e nozioni fondamentali

A.1 Alcune notazioni

In questa tesi consideriamo solo sistemi quantistici finito dimensionali; dunque l'ambiente di base è uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ finito dimensionale, di dimensione n. Scegliendo un sistema ortonormale completo $\{e_i\}_{i=1}^n$, si identifica $\mathcal{H}$ con $\mathbb{C}^n$, cioè

$$\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^n.$$

Possiamo quindi pensare gli operatori A su $\mathcal{H}$ come delle matrici complesse $n \times n$. Denotiamo l'insieme delle matrici quadrate complesse di dimensione n con M^n.

A.1.1 Operatore traccia, commutatore e anticommutatore

Per un operatore A su $\mathcal{H}$ è definito l'*operatore traccia* come

$$\mathrm{Tr}\{A\} = \sum_i A_{ii}\,;$$

è un operatore che corrisponde quindi al prendere gli elementi diagonali e sommarli tra loro. E' indipendente dalla base scelta. Vale inoltre la seguente proprietà: per ogni $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Tr}\{aA + bB\} = a\,\mathrm{Tr}\{A\} + b\,\mathrm{Tr}\{B\}, \qquad \mathrm{Tr}\{AB\} = \mathrm{Tr}\{BA\}. \tag{A.1}$$

Dati due operatori A e B su $\mathcal{H}$ possiamo considerare il *commutatore* tra i due:

$$[A, B] := AB - BA \tag{A.2}$$

e l'*anti-commutatore*:

$$\{A, B\} := AB + BA\,. \tag{A.3}$$

A.1.2 Norme e disuguaglianze

E' possibile introdurre tre norme utili in M^n. La prima è la *norma operatoriale* o *norma infinito*, definita da

$$\|A\| \equiv \|A\|_\infty := \sup_{\psi\in\mathcal{H}:\|\psi\|=1} \|A\psi\| \,. \tag{A.4}$$

La seconda è la *norma di Hilbert-Schmidt* o *norma due*:

$$\|A\|_2 := \sqrt{\mathrm{Tr}\{A^*A\}} = \sqrt{\sum_{ij} |A_{ij}|^2} \,. \tag{A.5}$$

La terza è la norma costruita con la traccia detta *norma traccia* o *norma uno*:

$$\|A\|_1 := \mathrm{Tr}\left\{\sqrt{A^*A}\right\}. \tag{A.6}$$

E' utile notare che

$$\text{se} \;\; B \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \|B\|_1 = \mathrm{Tr}\{B\}.$$

Inoltre si ha:

$$\|A^*\| = \|A\| \,, \qquad \|A^*\|_2 = \|A\|_2 \,, \qquad \|A^*\|_1 = \|A\|_1 \,. \tag{A.7}$$

Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\|A\| \equiv \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq n\;\|A\|_\infty \,, \tag{A.8}$$

$$|\langle\varphi|A\psi\rangle| \leq \|A\|\,\|\psi\|\,\|\varphi\| \,, \qquad |\,\mathrm{Tr}\{AB\}\,| \leq \begin{cases} \|A\|\,\|B\|_1 \,, \\ \|A\|_2\,\|B\|_2 \,. \end{cases} \tag{A.9}$$

Ogni operatore A definisce un funzionale lineare su M_n sotto la corrispondenza $A \mapsto \mathrm{Tr}\{A\cdot\}$. Questa corrispondenza permette di identificare $(M_n, \|\cdot\|_\infty)$ con lo spazio duale di $(M_n, \|\cdot\|_1)$. Abbiamo, allora

$$\|A\|_\infty = \sup_{B\in M_n:\|B\|_1=1} |\mathrm{Tr}\{AB\}| \,, \qquad \|B\|_1 = \sup_{A\in M_n:\|A\|_\infty=1} |\mathrm{Tr}\{AB\}| \,. \tag{A.10}$$

Osserviamo inoltre che per ogni $\tau \in M^n$ vale:

$$\|\tau^*\tau\|_1 = \|\tau\tau^*\|_1 = \|\tau\|_2^2, \tag{A.11}$$

che segue dalla definizione delle due norme ((A.5) e (A.6)) e dalla positività di $\tau^*\tau$ e $\tau\tau^*$. Inoltre per ogni matrice A abbiamo:

$$\|A\tau\|_2^2 = \mathrm{Tr}\{\tau^*A^*A\tau\} = \mathrm{Tr}\{A^*A\tau\tau^*\} \leq \|A^*A\|\,\|\tau\tau^*\|_1 = \|A\|^2\|\tau\|_2^2, \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} \|A\tau A^*\|_2^2 &= \mathrm{Tr}\{A\tau^*A^*A\tau A^*\} = \mathrm{Tr}\{A^*A\tau^*A^*A\tau\} \\ &\leq \|A^*A\tau^*\|_2\,\|A^*A\tau\|_2 \leq \|A^*A\|\|\tau^*\|_2\,\|A^*A\|\|\tau\|_2 = \|A^*A\|^2\|\tau\|_2^2. \end{aligned} \tag{A.13}$$

A.1.3 Notazioni di Dirac

Se ψ è un vettore $\mathcal{H}$, il "ket" $|\psi\rangle$ denota il vettore ψ stesso pensato come vettore colonna e il "bra" $\langle\psi|$ denota il vettore trasposto coniugato:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}, \qquad \langle\psi| = \begin{pmatrix} \overline{\psi_1} & \overline{\psi_2} & \dots & \overline{\psi_n} \end{pmatrix}.$$

Inoltre $|\psi\rangle\langle\psi'|$ ha elementi $\forall\, i,\, j$

$$(|\psi\rangle\langle\psi'|)_{ij} = \psi_i\, \overline{\psi'_j}\,.$$

Notiamo che, per ogni operatore A, $\mathrm{Tr}\{A\,|\psi\rangle\langle\varphi|\} = \langle\varphi|A\psi\rangle$.

A.1.4 Operatori statistici e loro proprietà

Uno stato di un sistema quantistico è rappresentato da un operatore detto *statistico* $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, dove

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{\rho \in M^n \;\text{ tali che }\; \rho \geq 0, \quad \mathrm{Tr}\{\rho\} = 1\}. \tag{A.14}$$

$\mathcal{S}(\mathcal{H})$ è quindi l'insieme degli operatori su $\mathcal{H}$ autoaggiunti, positivi e a traccia unitaria.

$$\text{Dato che }\; \rho \geq 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{Tr}\{\rho\} = \|\rho\|_1, \tag{A.15}$$

allora per gli operatori positivi norma uno e traccia si identificano e per gli stati valgono 1.

A.2 Spazi di probabilità e variabili aleatorie

Richiamiamo la terminologia e poche notazioni di teoria delle probabilità.

Spazi di probabilità

Un spazio di probabilità è una tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove $(\Omega, \mathcal{F})$ è uno spazio misurabile e $\mathbb{P}$ è una misura di probabilità su $\mathcal{F}$. L'insieme Ω consiste in tutti i possibili risultati ω di un esperimento aleatorio classico ed è detto *spazio campionario.* L'insieme $\mathcal{F}$ è detto *spazio degli eventi* ed è composto da sottoinsiemi A di Ω, ogni A descrive un evento che accade ogni volta che l'esperimento produce un risultato $\omega \in A$. Prima dell'esperimento, $\mathbb{P}(A)$ valuta la probabilità che l'evento A accada. Dopo l'esperimento, un solo ω è stato prodotto, allora tutti gli eventi A con $\omega \in A$ sono accaduti mentre tutti gli altri no.

Uno *spazio misurabile* è una coppia $(E, \mathcal{E})$, dove E è un insieme non vuoto $\mathcal{E}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di E. Una *σ-algebra* è una famiglia di sottoinsiemi di E per cui

(a) $E \in \mathcal{E}$,

(b) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow E \setminus A \in \mathcal{E}$,

(c) $\{A_j, j = 1, \ldots\} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{E}$.

Misura di probabilità

Una *misura di probabilità* $\mathbb{P}$ on $\mathcal{F}$, o su $(\Omega, \mathcal{F})$, è una misura non negativa, σ-additiva con massa 1, e quindi:

(a) $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$,

(b) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(c) $\{A_j, j = 1, \ldots\} \subset \mathcal{F}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$.

Una proprietà p si dice valere *quasi certamente* o *con probabilità uno* in Ω se $\exists\, A \in \mathcal{F}$ tale che $A \supset \{\omega : p \text{ è falsa per } \omega\}$ e $\mathbb{P}(A) = 0$. L'espressione "quasi certamente" in teoria delle probabilità corrisponde all'espressione "quasi ovunque" in teoria della misura.

Variabili aleatorie

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una *variabile aleatoria* X con valori in uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ è una funzione misurabile da Ω in E, e spesso si scrive $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$. Una variabile aleatoria descrive una quantità, osservata durante un esperimento aleatorio. Alla fine dell'esperimento, se è stato osservato ω, allora sappiamo che X ha assunto il valore $x = X(\omega)$, mentre in una valutazione a priori di X è data solo la sua *distribuzione* (o legge), cioè la probabilità $\mathbb{P}_X$ su $(E, \mathcal{E})$ definita da $\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}[X \in A] \equiv \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}]$. Data una funzione $X : \Omega \to (E, \mathcal{E})$, la più piccola σ-algebra in Ω che rende X misurabile è $\sigma(X) = \{X^{-1}(F) | F \in \mathcal{E}\}$; dove $\sigma(X)$ è detta la *σ-algebra generata dalla variabile aleatoria* X.

A.3 Filtrazioni e processi

A.3.1 Processo stocastico

Un processo stocastico è una famiglia $\{X(t),\, t \in \mathcal{I}\}$ di variabili aleatorie definite in un qualche spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e con valori in un qualche spazio misurabile. Noi ci limitiamo a $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ e a X che prende valori in $\mathbb{C}^d$. Come per una qualunque famiglia di variabili aleatorie, $\sigma\big(X(t),\, t \in I\big)$ denota la σ-algebra generata dal processo. Due o più processi sono detti indipendenti se le σ-algebre da loro generate sono indipendenti.

Un processo stocastico si occupa di modellare matematicamente una quantità osservata continuativamente nel tempo, durante un esperimento aleatorio. Se X è un processo stocastico e $\omega \in \Omega$ un evento elementare, la funzione $t \mapsto X(t, \omega)$ è una *traiettoria* del processo X. Un processo X è *continuo* se tutte le sue traiettorie sono funzioni continue, è *continuo a destra* se tutte le sue traiettorie sono funzioni continue a destra, eccetera.

A.3.2 Filtrazioni

Preso lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una *filtrazione* è una famiglia $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ di sotto-σ-algebre crescenti di $\mathcal{F}$, cioè $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ per $0 \leq s < t < +\infty$. Alle volte $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}\big)$ è detta *base stocastica.* Tipicamente una filtrazione descrive l'accumulazione di informazioni nel tempo: ogni $\mathcal{F}_t$ è la collezione di tutti gli eventi per i quali siamo in grado di dire se sono accaduti prima del tempo t oppure no.

Chiamiamo con $\mathcal{N}$ la classe di tutti gli insiemi di $\mathbb{P}$ nulla in $\mathcal{F}$, cioè:

$$\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0\}\,.$$

- La filtrazione è detta *continua a destra* se $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t_+}$ per tutti $t \geq 0$, dove $\mathcal{F}_{t_+}$ è la σ-algebra degli eventi decidibile un istante dopo t, cioè:

$$\mathcal{F}_{t_+} := \bigcap_{s:s>t} \mathcal{F}_s\,. \tag{A.16}$$

- Si dice che la base stocastica (o la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) soddisfa le *ipotesi usuali* se la filtrazione è continua a destra e $\mathcal{F}_0$ contiene $\mathcal{N}$. Ovviamente $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ implica $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$.

Data una base stocastica $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}\big)$ possiamo costruire una base stocastica $\big(\Omega, \mathcal{F},\ (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \mathbb{P}\big)$, che soddisfa le ipotesi usuali, prendendo $\widetilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{t_+} \vee \mathcal{N}$.

A.3.3 Processi adattati

Definizione A.1. Un processo stocastico X è detto *adattato* ad una filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ se, per tutti i tempi $t \geq 0$, la variabile aleatoria $X(t)$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile.

La nozione di processo adattato ha un'interpretazione fisica importante: cattura sostanzialmente l'idea di non-anticipazione del futuro.

Definizione A.2. Un processo stocastico X è detto *cadlag* se per ogni ω la funzione $t \to X_t(\omega)$ è una funzione continua a destra e con limite finito a sinistra ed è detto *caglad* se per ogni ω la funzione $t \to X_t(\omega)$ è una funzione continua a sinistra e con limite finito a destra.

Definizione A.3. Due processi complessi d-dimensionali X e Y, definiti in due spazi di probabilità anche differenti $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$, si dice che hanno la *stessa legge* se hanno le stesse leggi finito-dimensionali, che è come dire che per ogni scelta di un intero m e dei tempi $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ i vettori aleatori $(X(t_1), \ldots, X(t_m))$ e $(Y(t_1), \ldots, Y(t_m))$ hanno la stessa distribuzione su $\mathbb{C}^{m\,d}$.

Quando $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$, il processo Y si dice *modificazione* o *versione* di X se $Y(t)$ e $X(t)$ sono due variabili aleatorie equivalenti per ogni t:

$$\mathbb{P}[X(t) = Y(t)] = 1\,, \qquad \forall t \geq 0\,.$$

I due processi si dicono *indistinguibili* se quasi tutte le loro traiettorie coincidono, che è come dire che il complementare dell'insieme $\big\{\omega \in \Omega : X(t,\omega) = Y(t,\omega),\ \forall t \geq 0\big\}$ è contenuto in un insieme misurabile di probabilità nulla.

Quando l'insieme $\{\omega \in \Omega : X(t,\omega) = Y(t,\omega),\ \forall t \geq 0\}$ è misurabile, cosa vera se valgono opportune ipotesi di regolarità per le traiettorie dei due processi, possiamo dire che X e Y sono indistinguibili se

$$\mathbb{P}[X(t) = Y(t),\, \forall t \geq 0] = 1\,.$$

Se X e Y sono indistinguibili, allora uno è anche la modificazione dell'altro. Quando Y è una modificazione di X, allora i due processi hanno la stessa legge.

A.4 Equazioni differenziali stocastiche di tipo diffusivo

Consideriamo l'EDS

$$\mathrm{d}X(t) = b\big(X(t),t\big)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d} \sigma_j\big(X(t),t\big)\mathrm{d}W_j(t)\,, \tag{A.17}$$

per il processo X con valori in $\mathbb{C}^d$. Il termine in $\mathrm{d}t$ è detto drift e b è il *coefficiente di drift*, il termine in $\mathrm{d}W(t)$ è detto di diffusione e σ è il *coefficiente di diffusione*.

Una *soluzione* dell'equazione (A.17) con condizioni iniziali $X(t_0) = \eta$ è un processo che soddisfa (quasi certamente, $\forall t \geq t_0$)

$$X(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} b\big(X(s),s\big)\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{d} \int_{t_0}^{t} \sigma_j\big(X(s),s\big)\mathrm{d}W_j(s). \tag{A.18}$$

Si noti che quando considero un'equazione del tipo (A.17) sto considerando una versione continua di $X(t)$.

A.4.1 Tipi di soluzioni

Possiamo ora distinguere tra differenti concetti di esistenza e unicità delle soluzioni.

Definizione A.4. Una *soluzione debole* dell'EDS (A.17) con una condizione iniziale con legge μ è una base stocastica $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}\big)$ che soddisfa le usuali condizioni, con un processo di Wiener W, e una variabile aleatoria $\eta \sim \mu$ a valori in $\mathbb{C}^d$, $\mathcal{F}_{t_0}$-misurabile e un processo continuo e adattato X tale che per ogni $t \geq t_0$ l'equazione (A.17) è soddisfatta.

Definizione A.5. L'EDS (A.17) ammette *soluzioni forti* se, per ogni scelta di una base stocastica, che soddisfi le condizioni usuali, con un processo di Wiener W e per ogni $x_0 \in \mathbb{C}^d$, esiste un processo continuo adattato X tale che l'equazione (A.17) è verificata per $\eta = x_0$.

Definizione A.6. La soluzione dell'EDS (A.17) è *unica in legge* se, prese due soluzioni $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}\big)$, W, η, X and $\big(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P'\big)$, W', η', X', con $\eta \sim \eta'$, allora i processi X e X' hanno la stessa legge.

Definizione A.7. La soluzione dell'EDS (A.17) è *unica per traiettorie* se, prese due soluzioni $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P\big)$, W, η, X e $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P\big)$, W, η, X' allora i processi X e X' sono indistinguibili.

A.4.2 Condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità della soluzione

Ci sono varie ipotesi sufficienti che implicano l'esistenza e l'unicità della soluzione per la nostra EDS (A.17). Qui di seguito con la norma $\|\cdot\|^2$ intendiamo la norma vettoriale della somma dei quadrati delle componenti. Notiamo che se $b(x,\cdot)$ risulta essere una matrice quadrata, allora la norma $\|\cdot\|^2$ non è altro che la norma di Hilbert-Schmidt (A.5).

Ipotesi A.1 (Condizione di Lipschitz globale)**.** Tale condizione risulta verificata se esiste una costante $L(T) > 0$ tale che:

$$\|b(x,t) - b(y,t)\|^2 + \sum_j \|\sigma_j(x,t) - \sigma_j(y,t)\|^2 \leq L(T)\,\|x-y\|^2 \quad \text{(A.19)}$$

per tutti $x, y \in \mathbb{C}^d$ e $t \in [t_0, T]$.

Ipotesi A.2 (Condizione di Lipschitz locale)**.** Tale condizione risulta verificata se per ogni $N > 0$ esiste una costante $L(N,T) > 0$ tale che

$$\|b(x,t) - b(y,t)\|^2 + \sum_j \|\sigma_j(x,t) - \sigma_j(y,t)\|^2 \leq L(N,T)\,\|x-y\|^2 \quad \text{(A.20)}$$

per tutti $t \in [t_0, T]$ e per tutti $x, y \in \mathbb{C}^n$ con $\|x\| \leq N$, $\|y\| \leq N$.

Ipotesi A.3 (Condizione di crescita sub-lineare)**.** Tale condizione risulta verificata se esiste una costante $M(T) > 0$ tale che

$$\|b(x,t)\| + \left(\sum_j \|\sigma_j(x,t)\|^2 \right)^{1/2} \leq M(T)\,(1 + \|x\|) \qquad \text{(A.21)}$$

per tutti gli $x \in \mathbb{C}^d$ e $t \in [t_0, T]$.

Osservazioni:

- La condizione di Lipschitz globale A.1 implica la condizione di Lipschitz locale A.2.
- Per coefficienti indipendenti dal tempo, cioè $b(x,t) = b(x)$ e $\sigma_j(x,t) = \sigma_j(x)$, la condizione di Lipschitz globale A.1 implica la condizione di crescita sub-lineare A.3.

Teorema A.8 ([1, Teorema 8.8 p. 165])**.** *Sotto le ipotesi di misurabilità dei coefficienti, A.1 e A.3 l'EDS* (A.17) *ammette soluzioni forti* $[t_0, T]$*; e l'unicità è verificata per traiettorie e in legge.*

Appendice B

Processi di conteggio

I risultati che presenteremo in questa appendice trovano largo uso nel presente lavoro di tesi. Ci interesseremo, qui di seguito, di illustrare i processi di conteggio e loro tipiche proprietà. Presenteremo, in particolare, i processi di Poisson come particolari processi di conteggio.

B.1 Processi di conteggio

Cominciamo con l'introdurre, in prima istanza, una possibile definizione di un processo di conteggio, $N(t)$, su $\mathbb{R}_+$ come un processo stocastico, a valori interi, e non decrescente nel tempo; $N(t)$ conta quanti punti ci sono in $[0, t]$.

Indichiamo con $\mathrm{d}N(t) = N(t + \mathrm{d}t) - N(t)$ l'incremento del processo nell'intervallo di lunghezza infinitesima $\mathrm{d}t$, dove t rappresenta il presente e $t + \mathrm{d}t$ il futuro; assumiamo che la probabilità di avere un conteggio in tale intervallo sia proporzionale a $\mathrm{d}t$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{d}N(t) = 1) \propto \mathrm{d}t,$$

e che la probabilità di avere più di un conteggio sia trascurabile

$$\mathbb{P}(\mathrm{d}N(t) \geq 2) = o(\mathrm{d}t).$$

Nel corso di questa tesi compaiono i processi di conteggio, $N_k(t)$, per $k \in \{1, 2, \ldots, m_J\}$. E' possibile sviluppare un'ampia teoria circa tali processi.

Prendiamo il processo vettoriale

$$\overline{N}(t) := (N_1(t), N_2(t), \ldots, N_k(t), \ldots, N_{m_J}(t)) . \tag{B.1}$$

Ogni processo $N_k(t)$ è un processo di conteggio su $\mathbb{R}_+$ e il processo somma, detto *ground process*, è dato da

$$N(t) := \sum_{k=1}^{m_J} N_k(t). \tag{B.2}$$

Definiamo, in generale, un *processo marcato di punto* come una collezione indicizzata di processi di conteggio. L'insieme di tali indici è detto inisieme delle marche e si indica con $\mathcal{K}$. E' possibile che $\mathcal{K}$ prenda valori in un insieme finito di elementi o anche in uno spazio più generale, continuo o in uno spazio euclideo. Si veda in merito il Capitolo 7.3 in [8].

Nel caso di cui ci stiamo interessando il processo $\overline{N}(t)$ è un *processo marcato di punto* con marca discreta, infatti l'insieme delle marche è $\mathcal{K} = \{1, 2, \ldots, k, \ldots, m_J\}$, dove m_J è un intero finito che rappresenta il numero dei tipi di conteggi della nostra equazione.

Il processo $\overline{N}(t)$ è quindi un processo marcato di punto su $[0, \infty) \times \mathcal{K}$. Nel corso del nostro lavoro abbiamo a che fare con particolari processi di conteggio detti *regolari* che introdurremo nella sezione B.2 seguente.

B.2 Processi di conteggio regolari

Vogliamo, in questa sezione, introdurre il concetto di processo marcato di punto regolare e di processi di conteggio regolari.

B.2.1 Intensità prevedibili e processi marcati di punto regolari

Introduciamo di seguito la nozione di σ-algebra prevedibile e di processo prevedibile.

Definizione B.1. Definiamo la sotto-σ-algebra di $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$, generata dagli insiemi prodotto della forma $(s, t] \times U$, con $U \in \mathcal{F}_s$ e s e t che variano, con $0 \leq s < t < +\infty$, come la *σ-algebra prevedibile*, che denotiamo con $\Psi^{\mathcal{F}}$.

La terminologia è ben scelta perché riflette il fatto che si possa fare una previsione per un tempo futuro t, data l'evoluzione del processo, rappresentata dagli insiemi $U \in \mathcal{F}_s$, fino al tempo presente s. Grazie alla definizione di σ-algebra prevedibile possiamo ora introdurre la definizione di processo prevedibile.

Definizione B.2. Un processo X reale è detto $(\mathcal{F}_t)$-*prevedibile* se è $\Psi^{\mathcal{F}_t}-$ misurabile, cioè per ogni insieme $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ si ha

$$\{(t, \omega) : \; X(t, \omega) \in A\} \in \Psi^{\mathcal{F}}.$$

Il lemma A3.3.I, presentato in [8], mette in relazione processi prevedibili e processi adattati.

Lemma B.3. *Un processo $(\mathcal{F}_t)$-prevedibile è un processo $(\mathcal{F}_{t-})$-adattato.*

Interessiamoci, per il momento, di fornire la nozione di regolarità per un processo di conteggio unidimensionale.

Definizione B.4. Sia il processo di conteggio $\{N(t),\ \text{con}\ t \geq 0\}$ $(\mathcal{F}_t)$-adattato e tale che

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}[N(t-\Delta t) - N(t) \geq 2]}{\Delta t} = 0. \tag{B.3}$$

Sia $I(t)$ un processo non negativo e prevedibile tale che, definito

$$\Lambda(t) = \int_0^t I(s)\,\mathrm{d}s, \tag{B.4}$$

si ha che il processo

$$M(t) = N(t) - \Lambda(t) \ \text{ è una } \ (\mathcal{F}_t)\text{-martingala}; \tag{B.5}$$

cioè

$$\mathbb{E}[\,M(t)\,|\,\mathcal{F}_s\,] = M(s) \quad \text{con } 0 < s < t. \tag{B.6}$$

Un processo $N(t)$ con queste proprietà è detto *regolare*, il processo $\Lambda(t)$ è detto *compensatore* e $I(t)$ è detta *intensità stocastica* del processo di conteggio $N(t)$.

Notiamo che chiedere $I(t)$ prevedibile implica chiedere che $I(t)$ sia $\mathcal{F}_{t-}$-misurabile.

L'intensità stocastica $I(t)$ è una grandezza che racchiude implicitamente la legge del processo di conteggio. Grazie alla definizione B.4 siamo in grado di ricavare una scrittura euristica dell'intensità stocastica alla luce della quale $I(t)$ può essere interpretata come il rischio di avere un conteggio in t condizionatamente a tutta la storia passata nell'intervallo $[0, t)$.

Vediamone la derivazione.

Partendo dall'equazione (B.6) possiamo scrivere, per $0 < s < t$:

$$\mathbb{E}[\,M(t)|\,\mathcal{F}_s\,] = \mathbb{E}[\,N(t) - \Lambda(t)|\,\mathcal{F}_s\,] = \\ \mathbb{E}\left[\,N(t) - \int_0^t I(r)\,\mathrm{d}r \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = N(s) - \int_0^s I(r)\,\mathrm{d}r. \tag{B.7}$$

Allora si ha

$$\mathbb{E}\left[N(t) - N(s)|\,\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t I(r)\mathrm{d}r \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = \int_s^t \mathbb{E}\left[I(r)|\,\mathcal{F}_s\right]\mathrm{d}r. \tag{B.8}$$

Facendo tendere ora $t \to t + \mathrm{d}t$ e $s \to t$ si ottiene:

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{d}N(t)|\,\mathcal{F}_{t-}\right] = \int_t^{t+\mathrm{d}t} \mathbb{E}\left[I(r)|\,\mathcal{F}_{t-}\right]\mathrm{d}r \simeq I(t)\,\mathrm{d}t \tag{B.9}$$

Siamo così giunti alla formula euristica dell'intensità stocastica (data anche da [8])

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{d}N(t)|\,\mathcal{F}_{t-}\right] = I(t)\,\mathrm{d}t, \tag{B.10}$$

dove $\mathcal{F}_{t-}$ è la σ-algebra degli eventi che accadono fino all'istante prima del tempo t.

Osservazione B.5. Abbiamo introdotto la nozione di processo di conteggio regolare attraverso l'intensità prevedibile. Possiamo ora chiederci: come è possibile estendere questo discorso al MPP $\overline{N}(t)$? Bisogna prestare molta attenzione in quanto non basta chiedere che ogni $N_k(t)$, che compone $\overline{N}(t)$, sia regolare, secondo la definizione B.4, perché il processo marcato di punto $\overline{N}(t)$ sia regolare. E' necessario riuscire a dire qualcosa di più sulle interazioni tra i vari processi $N_k(t)$ e $N_h(t)$, per $k, h \in \mathcal{K}$, che compongono $\overline{N}(t)$.

Prendiamo come definizione di processo di conteggio vettoriale $\overline{N}(t)$ regolare una delle condizioni equivalenti della Proposizione 7.3.I in [8].

Definizione B.6. Un processo di conteggio vettoriale $\overline{N}(t)$, su $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{K}$, dove $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, k, \dots, m_J\}$, è regolare se è regolare il ground process $N(t)$.

Una tale definizione di regolarità per $\overline{N}(t)$ ci garantisce per prima cosa la regolarità di ogni componente $N_k(t)$ di $\overline{N}(t)$. In tal caso ogni $N_k(t)$ ha la sua intensità $I_k(t)$ secondo la Definizione B.4; possiamo quindi scrivere l'intensità del ground process $N(t)$ come

$$I(t) := \sum_{k=1}^{m_J} I_k(t). \tag{B.11}$$

B.2.2 Densità di probabilità esclusive e processi marcati di punto regolari

Un'altra via possibile per introdurre la nozione di processi di conteggio vettoriali regolari è quella di utilizzare le così dette *densità di Janossy* o *densità di probabilità esclusive*, seguendo la trattazione teorica fatta in [8]. Nella sezione 7.3 in [8] è mostrato come l'intensità, come nella Definizione B.4, e le densità di probabilità esclusive siano legate. Questi due approcci alla nozione di regolarità dei processi di conteggio risultano quindi equivalenti.

Notazione B.1. Indichiamo con $\mathbb{P}_{t_0}^t(0)$ la probabilità di non avere nessun conteggio nell'intervallo di tempo $(t_0, t]$. Ovviamente questa probabilità non ha associata alcuna densità.

Introduciamo inoltre, anche se in modo intuitivo, le *densità di Janossy*. Denotiamo la quantità

$$p_{t_0}^{t,n}\left(k_1, t_1; k_2, t_2, \dots, k_n, t_n\right), \tag{B.12}$$

con $t_0 < t_1 < t_2, \dots, t_n \leq t$ e con k_i che può assumere valori nell'insieme $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, k, \dots, m_J\}$, come la densità di probabilità, rispetto alla misura di Lebesgue, detta *densità di Janossy*. La quantità (B.12) è la densità di probabilità di avere un conteggio di tipo k_1 intorno al tempo

t_1, un conteggio di tipo k_2 intorno al tempo t_2 e così via, e nessun altro conteggio nel resto dell'intervallo $(t_0, t]$ (questo è il senso del termine *esclusive*).

Per normalizzazione delle densità in (B.12) si intenderà che vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1,\cdots,k_n} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{t} \mathrm{d}t_n \; p_{t_0}^{t,n}\,(\,k_1, t_1; k_2, t_2, \ldots, k_n, t_n\,) \\ = 1 - \mathbb{P}_{t_0}^{t}(0). \quad \text{(B.13)}$$

Osserviamo che l'ordine degli integrali nella (B.13) è importante in quanto stiamo calcolando la probabilità di avere dei conteggi su un insieme ordinato $(t_0, t]$, in cui si ha $t_0 < t_1 < t_2 <, \cdots, t_m \le t$. Su questo insieme vogliamo la probabilità che un conteggio di tipo k_1 cada prima di un conteggio di tipo k_2 e così via. Sono quindi integrali in torre in cui l'ordine risulta essenziale.

La Proposizione 7.3.I in [8] garantisce che se il ground è un processo regolare allora le densità di Janossy esistono. In realtà si potrebbe dimostrare anche l'affermazione inversa, cioè che l'esistenza delle densità di Janossy implica la regolarità del ground process.

L'esistenza delle densità di Janossy garantisce che per piccoli intervalli la probabilità di un conteggio sia proporzionale alla lunghezza dell'intervallo e che la probabilità di 2 o più conteggi sia trascurabile.

Una volta introdotta la nozione di processo marcato di punto regolare $\overline{N}(t)$ possiamo richiamare la Proposizione 7.3.IV in [8] che garantisce la determinazione univoca della legge dei processi $N_k(t)$ che compongono $\overline{N}(t)$.

Proposizione B.7. *Sia* $\overline{N}(t = (\,N_1(t),\, N_2(t), \ldots, N_k(t), \ldots,\, N_{m_J}(t)\,)$ *un processo di punto marcato regolare allora la legge dell'intero processo* $\overline{N}(t)$ *è univocamente determinata dalle intensità stocastiche* $I_1(t), \cdots, I_{m_J}(t)$.

B.3 Tempi di conteggio

Prendiamo il k-esimo processo di conteggio $N_k(t)$ e chiamiamo

$$T_1^k,\, T_2^k, \cdots \tag{B.14}$$

i tempi di conteggio di tale processo. Chiamiamo inoltre

$$T_1,\, T_2, \cdots \tag{B.15}$$

i tempi di conteggio del ground process definito in B.2. Definiti i tempi (B.14) il processo N_k, presa la traiettoria ω, è della forma

$$N_k(t,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n^k \le t\}}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(0,\,t]}(T_n^k(\omega)). \tag{B.16}$$

L'idea è quella di sommare tanti 1 quanti sono i tempi di salto del processo N_k prima del tempo t. La (B.16) fornisce N_k in funzione dei tempi di conteggio T_n^k; viceversa, dato il processo di conteggio si possono ottenere i tempi di salto

$$T_n^k(\omega) = \inf\{t : \; N_k(t,\omega) \geq n\} \tag{B.17}$$

La nozione di regolarità della Definizione B.4, implica, in termini dei tempi di conteggio

$$\mathbb{P}[\, T_n^k = T_{n'}^{k'} \,] = 0 \quad \text{se} \quad (k,n) \neq (k',n'). \tag{B.18}$$

B.4 Processi di Poisson

Un particolare tipo di processo di conteggio è il processo di Poisson.

Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. con legge esponenziale di parametro λ (con $\lambda > 0$) e si ponga

$$T_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{B.19}$$

per ogni $n \geq 1$. Allora T_n ha legge $\Gamma(n;\lambda)$. Per ogni numero reale $t \geq 0$ definiamo la variabile aleatoria $N(t)$ a valori interi

$$N(t) := \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}. \tag{B.20}$$

Il processo di conteggio $\{N(t),\, t \geq 0\}$ così ottenuto si chiama processo di Poisson. Le variabili aleatorie esponenziali reali i.i.d. X_n sono gli intertempi del processo mentre T_n è il tempo d'attesa dell'n-esimo salto.

Una definizione equivalente è:

1 $N(0) = 0$

2 $N(t) - N(s) \sim \text{Poiss}\,(\lambda(t-s))$, con $0 \leq s < t$

3 $N(t_1) - N(t_0)$, $N(t_2) - N(t_1)$, $\cdots$, $N(t_m) - N(t_{m-1})$ sono variabili aleatorie indipendenti per ogni scelta dell'intero m e dei tempi $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$.

Il punto 2 equivale a dire che

$$\mathbb{P}[N(t) - N(s) = r] = \exp\{-\lambda(t-s)\} \, \frac{\big(\lambda\,(t-s)\big)^r}{r!}$$

.

La variabile aleatoria $N(t)$ ha legge di Poisson di parametro $\lambda\, t$ per ogni $t > 0$ ed in particolare $\mathbb{P}[N(t) = +\infty] = 0$ per ogni $t \geq 0$.

Prendiamo un Poisson $N(t)$ di intensità λ allora si ha che $N(t) - \lambda t$ è una martingala. Posto $I(t) = \lambda$ si ha, dalla Definizione B.4, che il processo di Poisson $N(t)$ è un processo regolare con intensità deterministica λ e compensatore $\Lambda(t) = \lambda\, t$.

Osservazione B.8. Si può dimostrare che un processo di conteggio regolare con intensità deterministica e costante nel tempo $\lambda > 0$ è un processo di Poisson.

Introduciamo inoltre un vettore di processi di Poisson indipendenti tra loro

$$\overline{N}^p(t) := \left(N_1^p(t), N_2^p(t), \ldots, N_k^p(t), \ldots, N_{m_J}^p(t)\right). \tag{B.21}$$

Poichè la somma di Poisson indipendenti è ancora un processo di Poisson allora anche il ground process

$$N^p(t) = \sum_{k=1}^{m_J} N_k^p(t) \tag{B.22}$$

associato al processo vettoriale (B.21) è regolare, con intensità λ, data dalla somma delle intensità delle componenti di $N^p(t)$. Questo implica, dalla Proposizione B.6, che anche il processo vettoriale $\overline{N}^p(t)$ è regolare.

Prendendo il valore atteso rispetto alla misura di probabilità teorica $\mathbb{Q}$ si ha, analogamente a quanto dimostrato in modo euristico con la scrittura (B.10),

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{d}N_k(t) \,|\, \mathcal{F}_{t-}] = \lambda_k \,\mathrm{d}t. \tag{B.23}$$

Densità di Janossy per un processo di Poisson

Nel caso di un processo di Poisson le densità di Janossy, introdotte in (B.12) sono facilmente scrivibili. Prendiamo il ground $N^p(t)$ introdotto in (B.22). La probabilità di non avere nessun conteggio nell'intervallo di tempo $(t_0, t]$, denotata con $\mathbb{P}_{t_0}^t(0)$ nella notazione B.1, sarà data da

$$\mathbb{P}_{t_0}^t(0) = \mathbb{P}[\, N^p(t) - N^p(t_0) = 0\,] = \mathrm{e}^{-\lambda\,(t-t_0)}. \tag{B.24}$$

Le densità di Janossy, introdotte in (B.12), saranno euristicamente

$$\begin{aligned} p_{t_0}^{t,n}(k_1, t_1; k_2, t_2, \ldots, k_n, t_n) &\simeq \frac{1}{\prod_{j=1}^n \Delta t_j} \mathbb{P}[\, N^p(t) - N^p(t_0) = n, \\ &\quad N_{k_1}^p(t_1 + \Delta t_1) - N_{k_1}^p(t_1) = 1, \cdots, N_{k_n}^p(t_n + \Delta t_n) - N_{k_n}^p(t_n) = 1\,] \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda\,(t-t_0)} \prod_{j=1}^n \lambda_{k_j} \end{aligned} \tag{B.25}$$

Possiamo verificare la proprietà di normalizzazione delle densità in (B.25) poiché si ha

$$\sum_{k_1, \cdots, k_n} p_{t_0}^{t,n}(k_1, t_1; k_2, t_2, \ldots, k_n, t_n) = \mathrm{e}^{-\lambda\,(t-t_0)} \lambda^n, \tag{B.26}$$

$$\int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1 \int_{t_1}^t \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^t \mathrm{d}t_n \left(\mathrm{e}^{-\lambda\,(t-t_0)} \lambda^n\right) = \mathrm{e}^{-\lambda\,(t-t_0)} \frac{\left(\lambda\,(t-t_0)\right)^n}{n!}. \tag{B.27}$$

Ora sommando su tutti gli n si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\,(t-t_0)} \frac{\big(\lambda\,(t-t_0)\big)^n}{n!} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\,(t-t_0)} = 1 - \mathbb{P}_{t_0}^{\,t}(0).$$

B.5 Calcolo stocastico con processi di conteggio

Per i calcoli e la teoria che sono svolti in questo lavoro di tesi è necessaria l'introduzione del calcolo stocastico con i processi di conteggio e in particolare della scrittura della formula di Ito nel caso in cui, come quello che stiamo trattando, i processi in gioco non siano solo i processi di Wiener ma anche i conteggi.

B.5.1 Integrale in $\mathrm{d}N(t)$

Vogliamo dar senso all'integrale

$$\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}N(t) \tag{B.28}$$

dove $a(\cdot)$ una funzione caglad e $N(t)$ è un processo di conteggio regolare con tempi di salto $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$

Tale integrale può essere inteso come fatto a traiettoria fissata nel senso di Stieljes; in altri termini è definito da

$$\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}N(t) = \sum_{0<s\le t} a(s)\Delta N(s). \tag{B.29}$$

Nella (B.29) c'è una sommatoria su un indice continuo, $0 < s \le t$, che va intesa nel seguente modo: $\Delta N(s)$ risulterà non nullo, traiettoria per traiettoria, solo lì dove avviene il salto e quindi la somma continua ha un effettivo incremento positivo solo in prossimità dei salti; è quindi, in realtà, una sommatoria su indice discreto.

Alla luce di questa interpretazione della scrittura (B.29) si ha

$$\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}N(t) = \sum_{n:\ 0<T_n\le t} a(T_n) \tag{B.30}$$

dove T_n è l' n-esimo tempo di salto del processo di conteggio $N(t)$.

Possiamo estendere il discorso appena fatto anche nel caso di un MPP, con marca discreta $\overline{N}(t) = \{N_1(t), N_2(t), \dots, N_k(t), \dots, N_{m_J}(t)\}$. In questo caso si avrà, per ogni $k \in \mathcal{K}$

$$\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}N_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(T_n^k)\,\mathbb{1}_{(0,t]}(T_n^k) \tag{B.31}$$

dove $a(\cdot)$ è, come prima, una funzione caglad e dove T_n^k è il tempo di salto n-esimo del processo di conteggio regolare $N_k(t)$.

B.5.2 Formula di Ito per processi di conteggio

Alla luce dell'interpretazione dell'integrale in $\mathrm{d}N_k(t)$ svolta nella sezione B.5.1 supponiamo ora di avere il processo

$$X(t) = X(0) + \int_0^t c(s)\,\mathrm{d}s + \sum_j \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}W_j(s) + \sum_k \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}N_k(s), \tag{B.32}$$

con $W_j(t)$ processi di Wiener, con $N_k(t)$ processi di conteggio con tempi di salto $T_1^k, T_2^k, \ldots, T_n^k, \ldots$, con $\overline{N}(t)$ processo di conteggio vettoriale regolare, e con l'integrale in $\mathrm{d}N_k(t)$ che va interpretato come in (B.31); gli integrandi sono processi caglad.

Tabelle di Ito per processi di conteggio

Per processi della forma (B.32) la formula di Ito per il prodotto sarà riassunta dalle seguenti tabelle di Ito.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}N_k(t)\,\mathrm{d}N_h(t) = \delta_{kh}\mathrm{d}N_k(t), \qquad \mathrm{d}N_k(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \mathrm{d}N_k(t)\,\mathrm{d}W_j(t) = 0 \\ \mathrm{d}W_i(t)\,\mathrm{d}W_j(t) = \delta_{ij}\mathrm{d}t \quad \mathrm{d}t\,\mathrm{d}W_j(t) = 0. \end{aligned} \tag{B.33}$$

Le regole per gli incrementi dei conteggi traducono il fatto che, euristicamente

$$\forall\ k, \quad \mathrm{d}N_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{se c'è un salto nell'intervallo } (t, t + \mathrm{d}t] \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{B.34}$$

e che sono impossibili due salti, anche di tipo diverso, in un intervallo infinitesimo.

La tabella (B.5.2) non basta però per i calcoli che vogliamo svolgere in questa tesi. Abbiamo bisogno anche della scrittura della formula di Ito per funzioni di processi della forma (B.32). Tale formula occorrerà, nel corso del nostro lavoro, solo per lo sviluppo di prodotti e per calcolare il differenziale di un processo esponenziale unidimensionale. Alla luce di ciò ne diamo una formulazione per una funzione f che non dipende esplicitamente dal tempo e per un processo $X(t)$ unidimensionale.

Presa f una funzione $\mathcal{C}^2$ complessa, grazie al Teorema 32 in [16], possiamo scrivere la seguente formula di Ito estesa al caso con conteggio

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(X(0)) = \int_0^t f'(X(s_-))\mathrm{d}X(s)^c \\ + \sum_j \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s_-))\,\mathrm{d}[X, X]_s^c + \sum_{0<s\le t} \left\{ f(X(s)) - f(X(s_-)) \right\} \end{aligned} \tag{B.35}$$

dove $\mathrm{d}[X, X]_s^c = \sum_j b(t)^2 \mathrm{d}W_j(t)^2 = \sum_j b(t)^2 \mathrm{d}t$ è la variazione quadratica cioè, euristicamente, il differenziale al quadrato della sola parte continua di X, mentre $\mathrm{d}X(s)^c = c(t)\mathrm{d}t + \sum_j b(t)\mathrm{d}W_j(t)$ è il differenziale della sola parte continua di X. La componente $\sum_{0<s\leq t} \{ f(X(s)) - f(X(s_-)) \}$ rappresenta la sommatoria degli incrementi del processo X in corrispondenza dei salti dei processi di conteggio $N_k(t)$ ai tempi $T_1^k, T_2^k, \ldots, T_n^k, \ldots$; è apparentemente una sommatoria continua ma può essere facilmente espressa come

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0<s\leq t} \{ f(X(s)) - f(X(s_-)) \} \\
&\qquad = \sum_{0<s\leq t} \sum_k \{ f(X(s_-) + a(s)) - f(X(s_-)) \} \Delta N_k(t) \\
&\qquad = \sum_k \int_0^t \{ f(X(s_-) + a(s)) - f(X(s_-)) \} \, \mathrm{d}N_k(t) \\
&\qquad = \sum_k \sum_{n:\, 0<T_n^k\leq t} \{ f(X(T_{n-}^k) + a(T_n^k)) - f(X(T_{n-}^k)) \}. \qquad \text{(B.36)}
\end{aligned}
$$

Allora per il nostro processo (B.32) la (B.35) diventa

$$
\begin{aligned}
f(X(t)) - f(X(0)) &= \int_0^t f'(X(s_-)) \{ c(s)\mathrm{d}s + \sum_j b(s)\mathrm{d}W_j(s) \} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s_-)) \sum_j b(t)^2 \mathrm{d}s + \sum_{0<s\leq t} \{ f(X(s)) - f(X(s_-)) \} \\
= \int_0^t f'(X(s_-)) \{ c(s)\mathrm{d}s + \sum_j b(s)\mathrm{d}W_j(s) \} &+ \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s_-)) \sum_j b(t)^2 s \\
&\quad + \sum_k \sum_{n:\, 0<T_n^k\leq t} \{ f(X(T_{n-}^k) + a(T_n^k)) - f(X(T_{n-}^k)) \}. \qquad \text{(B.37)}
\end{aligned}
$$

Applicazione della formula di Ito ad un processo esponenziale unidimensionale

Ci interessa applicare ora la teoria sul calcolo stocastico con conteggi appena introdotta e la formula di Ito (B.37) al processo

$$
X_t := \mathrm{i} \sum_j \int_0^t k_j(s)\mathrm{d}W_j(s) + \mathrm{i} \sum_k \int_0^t h_k(s) \, \mathrm{d}N_k(s). \qquad \text{(B.38)}
$$

Il risultato che otterremo da questa applicazione della formula di Ito è stato spesso usato nel corso di questo lavoro.

Prendiamo $f(X_t)$ funzione esponenziale complessa della forma

$$
f(X_t) := \exp\{X_t\} = \exp\left\{ \mathrm{i} \sum_j \int_0^t k_j(s)\mathrm{d}W_j(s) + \mathrm{i} \sum_k \int_0^t h_k(s) \, \mathrm{d}N_k(s) \right\}. \qquad \text{(B.39)}
$$

In questo caso valgono

$$\mathrm{d}[X,X]_t^c = (\mathrm{i})^2\,\frac{1}{2}\,\sum_{j=1}^{m} k_j(t)^2\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}X(t)^c = \mathrm{i}\sum_{j=1}^{m} k_j(t)\mathrm{d}W_j(t).$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(X_t) &= f(X_t)\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)\mathrm{d}W_j(t) + (\mathrm{i})^2\,\frac{1}{2}\,\sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)^2\mathrm{d}t\right\}\\ &\qquad + \sum_{k=1}^{m_J}\left\{f(X_t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h_k(t)} - f(X_t)\right\}\mathrm{d}N_k(t)\\ &= f(X_{t\_})\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)\mathrm{d}W_j(t) - \frac{1}{2}\,\sum_{j=1}^{m_R} k_j(t)^2\mathrm{d}t\,\sum_{k=1}^{m_J}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}h_k(t)} - 1\right\}\right\}\mathrm{d}N_k(t).\end{aligned} \tag{B.40}$$

In modo euristico e istruttivo tale formula può essere ottenuta dalla tabella di Ito usando sviluppi in serie. Abbiamo, infatti

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(X_t) &= f(X_{t+\mathrm{d}t}) - f(X_{t-})\\ &= f(X_{t-})\left(\exp\left\{\mathrm{i}\,\sum_{j=1}^{m} k_j(t)\mathrm{d}W_j(t) + \mathrm{i}\,\sum_{k=1}^{m_J} h_k(t)\,\mathrm{d}N_k(t)\right\} - 1\right)\\ &= f(X_{t-})\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\left\{\mathrm{i}\,\sum_{j=1}^{m} k_j(t)\mathrm{d}W_j(t) + \mathrm{i}\,\sum_{k=1}^{m_J} h_k(t)\,\mathrm{d}N_k(t)\right\}^n\right)\\ &= f(X_{t-})\Bigg(\mathrm{i}\,\sum_{j=1}^{m} k_j(t)\mathrm{d}W_j(t) + \mathrm{i}\,\sum_{k=1}^{m_J} h_k(t)\,\mathrm{d}N_k(t)\\ &+ \frac{1}{2}\big(-\sum_{j=1}^{m} k_j(t)^2\mathrm{d}t + (\mathrm{i})^2\,\sum_{k=1}^{m_J} h_k(t)^2\,\mathrm{d}N_k(t)\big) + \frac{1}{3\,!}(\mathrm{i})^3\,\sum_{k=1}^{m_J} h_k(t)^3\,\mathrm{d}N_k(t)\\ &\qquad + \cdots + \frac{1}{n\,!}(\mathrm{i})^n\,\sum_{k=1}^{m_J} h_k(t)^n\,\mathrm{d}N_k(t) + \cdots\Bigg).\end{aligned}$$

Quindi raccogliendo i termini si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(X_t) = f(X_{t-})\Bigg\{&\mathrm{i}\,\sum_{j=1}^{m} k_j(t)\mathrm{d}W_j(t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} k_j(t)^2\mathrm{d}t\\ &+ \sum_{k=1}^{m_J}\,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\,(\mathrm{i}\,h_k(t))_n\,\mathrm{d}N_k(t)\Bigg\}\end{aligned}$$

e in conclusione

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(X_t) = f(X_{t-}) \Bigg\{ \mathrm{i} \sum_{j=1}^{m} k_j(t) \mathrm{d}W_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} k_j(t)^2 \mathrm{d}t \\ + \sum_{k=1}^{m_J} \left(e^{\mathrm{i}\, h_k(t)} - 1 \right) \mathrm{d}N_k(t) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{B.41}$$

che è la formula che otteniamo applicando il Teorema 32 in [16], come mostrato nella (B.40).

Appendice C

EDS funzionali

Introduciamo il Teorema 7, pag. 197 da [16] che viene utilizzato nel corso di questo lavoro sia nel Teorema 2.7 della sezione 2.3 che nel Teorema 4.8 della sezione 4.6.

C.1 Caso con Wiener e Poisson

Analizziamo il caso con componente diffusiva e con salti (rappresentati dai processi di Poisson) che è utilizzato nella sezione 2.3.

Teorema C.1. *Dato un vettore di semimartingale* $Z = (Z^1, Z^2, \cdots, Z^d)$ *con* $Z_0 = 0$*, dati i processi* $B^i \in D$*, per* $1 \leq i \leq n$*, e date le mappe* F^i_j*, Lipschitz funzionali, per* $1 \leq i \leq n$ *e* $1 \leq j \leq d$ *allora il sistema di equazioni*

$$X^i_t = B^i_t + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t F^i_j(X)_{s-} \, \mathrm{d}Z^j_s \quad \textit{per} \;\; 1 \leq i \leq n \tag{C.1}$$

ammette una soluzione in D^n *che è unica per traiettorie.*

Diamo senso di seguito a tutte le nozioni che appaiono nel Teorema C.1.

Notazione C.1. Chiamiamo D l'insieme dei processi cadlag adattati. Denotiamo, inoltre, con D^n lo spazio dei processi $X = (X^1, X^2, \cdots, X^n)$, dove ogni $X_i \in D$, per $1 \leq i \leq n$.

La definizione del termine *semimartingala* è più complessa e introdurla in modo rigoroso non rientra nello scopo di questo lavoro. Può comunque essere trovata nella Definizione a pag. 44 di [16]. L'idea di fondo è che una semimartingala è un processo cadlag, adattato e che ha la proprietà di essere un buon integratore.

Introduciamo di seguito due teoremi (Teorema 7, 8 pag. 47 di [16]) che sono condizioni sufficienti in grado di garantire che i processi che entrano in gioco nel caso di cui ci stiamo interessando siano effettivamente delle semimartingale.

Teorema C.2. *Ogni processo adattato con cammini cadlag a variazione finita è una semimartingala.*

Ne segue che t è una semimartingala.

Teorema C.3. *Ogni martingala quadrato integrabile con cammini cadlag è una semimartingala.*

Ne segue che W_j e N_k (processi di Poisson con intensità λ_k) sono semimartingale.

Ci interessa introdurre ora le nozioni fondamentali per verificare che l'EDS lineare con componente diffusiva e con salti (2.40) rientra nelle ipotesi del Teorema C.1 e che quindi quest'ultimo ne dimostra l'esistenza e l'unicità per traiettorie della soluzione come enunciato nel Teorema 2.7 della sezione 2.3.

Nel caso dell'EDS lineare (2.40) il vettore Z sarà

$$Z = (t,\, W_1,\, W_2, \cdots, W_{m_R},\, N_1,\, N_2, \cdots, N_{m_J}) \tag{C.2}$$

dove $d := 1 + m_R + m_J$ mentre l'indice i sarà l'indice degli elementi di matrice di $\sigma \in M^n$. I processi $B^i \in D$ si riducono nel nostro caso banalmente alla condizione iniziale $\sigma_0 = \rho \in M^n$. I coefficienti F_j sono invece le componenti del vettore

$$F = \Bigg(\widetilde{\mathcal{L}},\ \mathcal{R}_1,\ \mathcal{R}_2, \cdots, \mathcal{R}_{m_R}, \\ \left(\frac{\mathcal{J}_1}{\lambda_1} - \mathrm{Id}_n\right),\ \left(\frac{\mathcal{J}_2}{\lambda_2} - \mathrm{Id}_n\right), \cdots, \left(\frac{\mathcal{J}_{m_J}}{\lambda_{m_J}} - \mathrm{Id}_n\right)\Bigg) \tag{C.3}$$

di cui prendo l'elemento di matrice i- esimo. Seguendo la scritture matriciale σ, questi maps F_j si applicano a σ_t come segue

- $F_1(\sigma)_{t-} = \widetilde{\mathcal{L}}(t)[\sigma_{t-}]$,
- $F_2(\sigma)_{t-} = \mathcal{R}_1(t)[\sigma_{t-}]$,
- $F_3(\sigma)_{t-} = \mathcal{R}_2(t)[\sigma_{t-}]$,

...

Sui i coefficienti F_j^i è richiesto che siano Lipschitz funzionali. Si veda in merito la Definizione che segue

Definizione C.4. Un *operatore* da D^n a D è detto *Lipschitz funzionale* se per ogni X e Y, processi in D^n, sono soddisfatte le due seguenti condizioni

1. per ogni tempo d'arresto T, $X^{T-} = Y^{T-}$ implica $F(X)^{T-} = F(Y)^{T-}$

2. esiste un processo crescente a valori finiti $K = (\, K_t \,)_{t \geq 0}$ tale che

$$|F(X)_t - F(Y)_t| \leq K_t \sup_{s \in [0,t]} |X_s - Y_s|, \tag{C.4}$$

quasi certamente, per ogni $t \geq 0$.

Osservazione C.5. Richiedere di lavorare nell'insieme D dei processi adattati e cadlag impone una buona regolarità sui coefficienti che fa le veci della richiesta della sub-linearità tipica dei teoremi classici di esistenza ed unicità della soluzione per EDS.

Nel nostro caso le due richieste sui coefficienti della Definizione C.4 sono soddisfatte. Infatti se $X^{T-} = Y^{T-}$, ricordando le assunzioni della sezione 2.2 sui coefficienti $H(t)$, $L_l(t)$, $R_j(t)$, $V_k^r(t)$ e $J_k(t)$, ossia che sono operatori lineari su $\mathcal{H}$ (matrici $n \times n$), continui da sinistra e con limiti finiti da destra, ne discende che $F_j(X)^{T-} = F_j(Y)^{T-}$ quasi certamente, per ogni $j \leq d$.

Componente per componente la (C.4) diventa

$$|F_j(X)_t - F_j(Y)_t| \leq K_t^j \sup_{s \in [0,t]} |X_s - Y_s|, \tag{C.5}$$

prendendone i quadrati a destra e sinistra e sommando su tutte le j si ha

$$\begin{aligned} |F(X)_t - F(Y)_t| &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (K_t^j)^2 \big(\sup_{s \in [0,t]} |X_s - Y_s| \big)^2} \\ &\leq \sum_{j=1}^{d} K_t^j \sup_{s \in [0,t]} |X_s - Y_s| \leq d\,\widehat{k} \sup_{s \in [0,t]} |X_s - Y_s| \end{aligned} \tag{C.6}$$

dove $\widehat{k} := \max_{1 \leq j \leq d} K_t^j$. Verificare, quindi, la (C.4) della Definizione C.4 globalmente per il vettore F oppure separatamente per ogni sua componente è la stessa cosa. Posso allora considerare

$$|\,\widetilde{\mathcal{L}}(t)[X_{t-}] - \widetilde{\mathcal{L}}(t)[Y_{t-}]\,| \leq K_t \sup_{s \in [0,t]} |X_s - Y_s| \tag{C.7}$$

che discende dalla stima (2.25); mentre, per $1 \leq j \leq m_R$

$$|\mathcal{R}_j(t)[X_{t-}] - \mathcal{R}_j(t)[Y_{t-}]| \leq K_t \sup_{s \in [0,t]} |X_s - Y_s|, \tag{C.8}$$

discende dalla stima (2.26). Infine per i coefficienti della parte dei processi di Poisson $N_k(t)$ si ha, per $1 \leq j \leq m_J$

$$\left| \left(\frac{\mathcal{J}_j(t)[X_{t-}]}{\lambda_j} - X_{t-} \right) - \left(\frac{\mathcal{J}_j(t)[Y_{t-}]}{\lambda_j} - Y_{t-} \right) \right| \leq K_t \sup_{s \in [0,t]} |X_s - Y_s|, \tag{C.9}$$

che discende dalla stima

$$\begin{aligned}\|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_2 &= \Big\|\sum_r V_k^r(t)\tau V_k^r(t)^*\Big\|_2 \le \sum_r \big\|V_k^r(t)\tau V_k^r(t)^*\big\|_2 \\ &\le \sum_r \big\|V_k^r(t)^* V_k^r(t)\big\| \|\tau\|_2 = \big\|J_k(t)\big\| \|\tau\|_2. \quad \text{(C.10)}\end{aligned}$$

Ci interessa controllare la stima (C.10) su tutti i tempi $t \le T$. A tal fine calcolo

$$\begin{aligned}\|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_2 \le \|\mathcal{J}_k(t)[\tau]\|_1 &= \|\sum_r V_k^r(t)\tau V_k^r(t)^*\|_1 \\ &= \sup_{a\in M^n:\, \|a\|_\infty=1} |\operatorname{Tr}\{a\sum_r V_k^r(t)\tau V_k^r(t)^*\}| \\ \le \|\tau\|_1 \sup_{a\in M^n:\, \|a\|_\infty=1} &|\operatorname{Tr}\{\sum_r V_k^r(t)\, a\, V_k^r(t)^*\}| \le \|\tau\|_1 \|J_k(t)\|_\infty. \quad \text{(C.11)}\end{aligned}$$

E' sufficiente quindi richiamare l'Osservazione 2.3, grazie alla quale si ha $\sup_{t\in[0,T]} \|\sum_k J_k(t)\|_\infty < +\infty$, per ottenere che la (C.9) è verificata.

C.2 Caso con soli Wiener

Analizziamo ora il caso con sola componente diffusiva che è utilizzato nel corso di questo lavoro nel Teorema 4.8 della sezione 4.6. Ci interessa, all'interno della dimostrazione del Teorema 4.8, dare un risultato di esistenza e unicità per l'EDS

$$\rho(2)_t = \rho_{T_1} + \int_{T_1}^t f(\rho(2)_s)\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m_R} \int_{T_1}^t \hat{n}_j(s,\rho(2)_s)\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) \qquad \text{(C.12)}$$

dove la condizione iniziale ρ_{T_1} è un processo cadlag.

Vogliamo utilizzare il Teorema C.1, adattato proprio al caso dell'equazione (C.12). Si renderà necessario, per fare ciò, riscrivere l'equazione (C.12) in modo tale che gli estremi dell'integrale non siano tempi random. Abbiamo quindi la seguente scrittura equivalente alla (C.12)

$$\begin{aligned}\rho(2)_t = \rho(1)_{T_1\wedge t} &+ \int_0^t \mathbb{1}_{(T_1,\,\infty)}(s) f(\rho(2)_s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \sum_{j=1}^{m_R} \int_0^t \mathbb{1}_{(T_1,\,\infty)}(s)\,\hat{n}_j(s,\rho(2)_s)\,\mathrm{d}\widehat{W}_j(s) \quad \text{(C.13)}\end{aligned}$$

dove la scrittura $\rho(1)_{T_1\wedge t}$ sta ad indicare un processo cadlag che assume per ogni $t \ge T_1$ il valore che $\rho(1)$ ha assunto in T_1; cioè che per ogni $t < T_1$, $\rho(1)_{T_1\wedge t}$ è la soluzione dell'equazione nell'intervallo $[0, T_1)$, mentre per

$t \geq T_1$ resta costante al valore $\rho(1)_{T_1}$. All'equazione (C.13), equivalente alla (C.12), possiamo ora applicare il Teorema 4.8, in quanto i tempi degli integrali in gioco sono deterministici. Il processo $B \in D$ gioca, ora, un ruolo fondamentale; è infatti $\rho(1)_{T_1 \wedge t}$ in cui sono incluse le prescrizioni di ρ in prossimità dei tempi di salto. In questo secondo caso il vettore Z sarà

$$Z = (t,\, W_1,\, W_2, \cdots, W_{m_R}) \tag{C.14}$$

dove $d := 1 + m_R$ mentre l'indice i sarà l'indice degli elementi di matrice di $\sigma \in M^n$. I coefficienti F_j sono le componenti del vettore

$$F = \big(\mathbb{1}_{(T_1,\infty)}\, f,\ \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}\, \hat{n}_1,\ \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}\, \hat{n}_2, \cdots,\ \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}\, \hat{n}_{m_R},\big) \tag{C.15}$$

Seguendo la scrittura matriciale ρ, questi maps F_j si applicano a $\rho(2)$ come segue

- $F_1(\rho(2)_t) = \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}(t)\, f(\rho(2)_t)$
- $F_2(\rho(2)_t) = \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}(t)\, \hat{n}_1(t, \rho(2)_t)$,
- $F_3(\rho(2)_t) = \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}(t)\, \hat{n}_2(t, \rho(2)_t)$,

$\cdots$

Con

$$\begin{aligned} F_1(\rho(2)_t) &= \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}(t) f(\rho(2)_t) \\ &= \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}(t) \left(\mathcal{L}(t)[\rho(2)_t] + \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\mathrm{Tr}\{\mathcal{J}_k(t)[\rho(2)_t]\}\rho(2)_t}{\|\rho(2)_t\|_1} - \mathcal{J}_k(t)[\rho(2)_t] \right) \right) \\ &\leq f(\rho(2)_t) \end{aligned} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned} F_2(\rho(2)_t) &= \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}(t) \hat{n}_1(t, \rho(2)_t) \\ &= \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}(t) \left(\mathcal{R}_1(t)[\rho(2)_t] - \frac{\mathrm{Tr}\{\mathcal{R}_1(t)[\rho(2)_t]\}}{\|\rho(2)_t\|_1}\, \rho(2)_t \right) \leq \hat{n}_1(t, \rho(2)_t) \end{aligned} \tag{C.17}$$

Sui coefficienti F_j^i è richiesto, come già visto che siano Lipschitz funzionali. Quello che bisogna andare a verificare è che

$$\begin{aligned} |\, F_1(X_{t-}) - F_1(Y_{t-})\, | &= |\, (\mathbb{1}_{(T_1,\infty)}(t))\big(f(X_{t-}) - f(Y_{t-})\big)\, | \\ &= \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}(t) |\, f(X_{t-}) - f(Y_{t-})\, | \leq K_t \sup_{s\,\in\,[0,\,t]} |X_s - Y_s|, \end{aligned} \tag{C.18}$$

$$\begin{aligned} |\, F_2(X_{t-}) - F_2(Y_{t-})\, | &= |(\mathbb{1}_{(T_1,\infty)}(t))\big(\hat{n}_1(t, X_{t-}) - \hat{n}_1(t, Y_{t-})\big)| \\ &= \mathbb{1}_{(T_1,\infty)}(t) |\, \hat{n}_1(t, X_{t-}) - \hat{n}_1(t, Y_{t-})\, | \leq K_t \sup_{s\,\in\,[0,\,t]} |X_s - Y_s| \end{aligned} \tag{C.19}$$

e così via.

Le disuguaglianze (C.18) e (C.19) per i coefficienti F_j^i si verificano in modo del tutto analogo a quanto svolto nella sezione C.1 facendo uso, essenzialmente, delle stime proposte nella dimostrazione del Teorema 4.5.

E' quindi possibile applicare, sulla base delle considerazioni appena svolte, il Teorema C.1 all'equazione (C.13).

Osservazione C.6. Potremmo chiederci se è possibile applicare direttamente il Teorema C.1 all'EDS non lineare

$$\begin{aligned}\rho_t = \rho + \int_0^t \left(\mathcal{L}(s)[\rho_{s-}] + \sum_{k=1}^{m_J} \left(\frac{\operatorname{Tr}\{\mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}]\}\rho_{s-}}{\|\rho_{s-}\|_1} - \mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}] \right) \right) \mathrm{d}s \\ + \sum_{j=1}^{m_R} \int_0^t \hat{n}_j(s, \rho_{s-})\, \mathrm{d}\widehat{W}_j(s) \\ + \sum_{k=1}^{m_J} \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{\|\rho_{s-}\|_1\, \mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}]}{\|\mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}]\|_1} - \rho_{s-} \right) \mathbb{1}_{\left\{0 \le x \le \frac{\|\mathcal{J}_k(s)[\rho_{s-}]\|_1}{\|\rho_{s-}\|_1}\right\}} \mu_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x).\end{aligned} \tag{C.20}$$

esattamente come abbiamo fatto per la master equation stocastica lineare nel Teorema 2.7 della sezione 2.3.

La risposta a questa domanda è no in quanto il coefficiente della parte con salti non risulta essere Lipschitz funzionale a causa della presenza del termine

$$\mathbb{1}_{\left\{0 \le x \le \frac{\|\mathcal{J}_k(t)[\rho_{t-}]\|_1}{\|\rho_{t-}\|_1}\right\}},$$

che è una funzione indicatrice che dipende non dal tempo t, come accade nei coefficienti del vettore F in (C.15), bensì dall'incognita stessa dell'equazione ρ_t.

Bibliografia

[1] P. Baldi, *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, Quaderno UMI **28** (Pitagora, Bologna, 2000).

[2] A. Barchielli, *Some stochastic differential equations in quantum optics and measurement theory: the case of counting processes*, in L. Diòsi, B. Lukàcs (eds.), *Stochastic Evolution of Quantum States in Open Systems and in Measurement Processes* (World Scientific, Singapore, 1994) pp. 1–14.

[3] A. Barchielli, V. P. Belavkin, *Measurements continuous in time and a posteriori states in quantum mechanics*, J. Phys. A: Math. Gen. **24** (1991) 1495–1514; arXiv:quant-ph/0512189.

[4] A. Barchielli, M. Gregoratti, *Quantum Trajectories and Measurements in Continous Time - The diffusive case*, To apperar in Lecture Notes in Physics.

[5] A. Barchielli, A. S. Holevo, *Constructing quantum measurement processes via classical stochastic calculus*, Stoch. Proc. Appl. **58** (1995) 293–317.

[6] A. Barchielli, G. Lupieri, *Information gain in quantum continual measurements*, in V. P. Belavkin and M. Guţă, *Quantum Stochastic and Information* (World Scientific, Singapore, 2008) pp. 325–345; arXiv:quant-ph/0612010v1.

[7] A. Barchielli, A. M. Paganoni, F. Zucca, *On stochastic differential equations and semigroups of probability operators in quantum probability*, Stochastic Process. Appl. **73** (1998) 69–86.

[8] D.J. Daley, D. Vere-Jones *An Introduction to the Theory of Point Process*, volume I: Elementary Theory and Methods, (Springer, New York, 2005).

[9] N. Ikeda, S. Watanabe *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, (North-Holland/Kodansha, Tokyo, 1981).

[10] J. Jacod, P. Protter, *Quelques remarques sur un nouveau type d'equations differentielles stochastiques.* In *eminar on Probability*, XVI,

volume 920 of Lecture Notes in Math., pag 447-458. Springer, Berlin, 1982.

[11] Yu.M. Kabanov, R.Sh. Liptser, A.N. Shiryayev, *Absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous probability distributions*, I. Math. URSS Sbornik 35, (1979), pp. 631-680.

[12] R. Sh. Liptser, A. N. Shiryayev, *Theory of Martingales* (Kluwer, Dordrecht, 1989).

[13] C. Pellegrini, *Existence, uniqueness and approximation of stochastic Schrödinger equation: the diffusive case* (2007) arXiv:0709.1703v1 [math.PR]. To apperar in Ann. Probab.

[14] C. Pellegrini, *Existence, Uniqueness and Approximation of a Stochastic Schrödinger Equation: the Poisson Case*, (2007), arXiv:0709.3713v1 [math.PR].

[15] C. Pellegrini, *Markov chains approximations of jump-diffusion quantum trajectories* (2008) arXiv:0803.2593v1 [math.PR].

[16] P. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Applications of Mathematics **21** (Springer, Berlin, 1990).

[17] P. Protter, *Probability Essentials* (Springer, Berlin, 2004).

.

Questo lavoro di tesi non ci sarebbe senza la pazienza e la costanza del Prof. Barchielli a cui va un grazie sentito.

Ringrazio inoltre, in ordine sparso, Dino, Enza, Irene, la mia famiglia tutta, i miei nonni in particolar modo, i miei amici del sud e quelli del nord, le mie coinquiline ed i miei ragazzi scout.
Ognuno di loro sa il perché.