Rappels

1[er] octobre 2015

1 Groupe

Un groupe est un ensemble $\mathcal{G}$ muni d'une loi de composition (ou *opération*) interne $+ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, tel que les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. La loi est *interne* : $\forall x, y \in \mathcal{G},\ x + y \in \mathcal{G}$.
2. Associativité : $\forall x, y, z \in \mathcal{G},\ (x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Elément neutre : $\exists e \in \mathcal{G}, \forall x \in \mathcal{G},\ x + e = e + x = x$.
4. Elément inverse : $\forall x \in \mathcal{G}, \exists(-x) \in \mathcal{G},\ x + (-x) = (-x) + x = e$.

Le groupe est *commutatif* (ou abélien) si $\forall x, y \in \mathcal{G},\ x + y = y + x$.

$\mathcal{G}_s$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$ s'il est fermé par rapport à l'application de la loi de composition interne $+$, $\forall x, y \in \mathcal{G}_s, x + y \in \mathcal{G}_s$, et contient l'inverse de chacun de ses éléments, $\forall x \in \mathcal{G}_s, (-x) \in \mathcal{G}_s$.

Exemples de groupes commutatifs : $(\mathbb{Q}, +)$ ($\mathbb{Q}$ étant l'ensemble des nombres rationnels), $(\mathbb{R}, +)$ ($\mathbb{R}$ étant l'ensemble des nombres réels). $(\mathbb{N}, +)$ ($\mathbb{N}$ étant l'ensemble des nombres naturels) n'est pas un groupe car la propriété 4 n'est pas satisfaite.

2 Corps

Un corps est un ensemble $\mathcal{K}$ muni de deux lois de composition (ou opérations) interne $+ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (appelée par convention *addition*), $\bullet : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (appelée par convention *multiplication*), satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $(\mathcal{K}, +)$ est un groupe commutatif. On notera son élément neutre par 0.
2. $(\mathcal{K} - \{0\}, \bullet)$ est un groupe. On notera son élément neutre par 1.
3. Distributivité de la multiplication : $\forall x, y, z \in \mathcal{G},\ x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z), (y + z) \bullet x = (y \bullet x) + (z \bullet x)$.

Le corps est *commutatif* si $(\mathcal{K} - \{0\}, \bullet)$ est un groupe commutatif.

Exemples de corps commutatifs : $(\mathbb{Q}, +, \bullet)$, $(\mathbb{R}, +, \bullet)$.

3 Espace vectoriel

On appelle espace vectoriel sur un corps $\mathcal{K}$ un ensemble $\mathcal{V}$ muni d'une loi interne $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ et d'une loi externe de composition à gauche avec des éléments de $\mathcal{K}$, $\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, tel que les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $(\mathcal{V}, +)$ est un groupe commutatif. On note son élément neutre par θ.
2. L'élément neutre de $(\mathcal{K} - \{0\}, \bullet)$ est neutre à gauche pour la loi $\cdot$: $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V},\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.
3. La loi $\cdot$ est distributive à gauche par rapport à la loi $+$ de $(\mathcal{V}, +)$: $\forall a \in \mathcal{K}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V},\ a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (a \cdot \mathbf{x}) + (a \cdot \mathbf{y})$.
4. La loi $\cdot$ est exo-distributive à droite par rapport à la loi $+$ de $(\mathcal{K}, +)$: $\forall a, b \in \mathcal{K}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V},\ (a + b) \cdot \mathbf{x} = (a \cdot \mathbf{x}) + (b \cdot \mathbf{x})$.
5. La loi $\cdot$ est exo-associative par rapport à la loi $\bullet$ de $(\mathcal{K} - \{0\}, \bullet)$: $\forall a, b \in \mathcal{K}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V},\ (a \bullet b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot (b \cdot \mathbf{x})$.

Conséquences des propriétés :

1. L'élément neutre de $(\mathcal{K}, +)$ est exo-absorbant à gauche pour la loi $\cdot$: $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V},\ 0 \cdot \mathbf{x} = \theta$.
2. L'élément neutre de $(\mathcal{V}, +)$ est absorbant à droite pour la loi $\bullet$ de $(\mathcal{K} - \{0\}, \bullet)$: $\forall a \in \mathcal{K},\ a \cdot \theta = \theta$.

Exemple d'espace vectoriel : $(\mathbb{R}^d, +)$ sur le corps $(\mathbb{R}, +, \bullet)$, avec la loi externe $\cdot$.

$\mathcal{V}_s$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$ si $(\mathcal{V}_s, +)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{V}, +)$ et est fermé par rapport à l'application de la loi $\cdot$, $\forall a \in \mathcal{K}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_s,\ a \cdot x \in \mathcal{V}_s$.

Combinaison linéaire : $\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \mathbf{x}_i$, avec $a_i \in \mathcal{K}$ et $\mathbf{x}_i \in \mathcal{V}$.

Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d\}$ un ensemble de d vecteurs de $\mathcal{V}$. $\mathcal{B}$ est une *base* de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ si :

1. $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathcal{V}$: $a_1, \ldots, a_d \in \mathcal{K},\ \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \theta \ \Rightarrow\ a_1 = \ldots = a_d = 0$.
2. $\mathcal{B}$ génère $\mathcal{V}$: $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \exists a_1, \ldots, a_d \in \mathcal{K},\ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot \mathbf{u}_i$.

Si $\mathcal{V}$ a une base de d éléments (d fini), alors toute base de $\mathcal{V}$ a d éléments et d est appelée la dimension de $\mathcal{V}$.

4 Transformation linéaire

Considérons $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathcal{K}$. On utilisera la même notation, $\cdot$, pour les lois de composition externe à gauche avec des éléments de $\mathcal{K}$. Une application $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est appelée *transformation linéaire* (ou *application linéaire*) si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V},\ f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
2. $\forall a \in \mathcal{K}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V},\ f(a \cdot \mathbf{x}) = a \cdot f(\mathbf{x})$

5 Forme bilinéaire

Considérons un espace vectoriel $\mathcal{V}$ sur le corps $\mathcal{K}$. Une application $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{K}$ est appelée *forme bilinéaire* si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{V},\ g(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{z}, \mathbf{y}),\ \ g(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{z})$
2. $\forall a \in \mathcal{K}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V},\ g(a \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y}) = a \cdot g(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\ \ g(\mathbf{x}, a \cdot \mathbf{y}) = a \cdot g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

6 Produit scalaire, orthogonalité, norme

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ est appelée *produit scalaire* si

1. elle est symétrique : $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V},\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, et
2. la forme quadratique associée est définie positive : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{x} = \theta;\ \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} - \{\theta\},\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ (le même vocabulaire est parfois appliqué directement à la forme bilinéaire symétrique).

Deux vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ sont *orthogonaux* si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Une *norme* est une application $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^+$ ayant les propriétés suivantes :

1. Séparation : $\|\mathbf{x}\| = 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{x} = \theta$.
2. Homogénéité : $\forall a \in \mathcal{K}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V},\ \|a \cdot \mathbf{x}\| = |a|\, \|\mathbf{x}\|$.
3. Inégalité triangulaire : $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V},\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire, alors $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^+$ par $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ est une norme.

7 Base orthonormée

Une base $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d\}$ de l'espace à d dimensions $\mathcal{V}$ est *orthonormée* si

1. Ses vecteurs sont de norme unitaire : $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{B},\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1$, et
2. Ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux : $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{B},\ \mathbf{u} \neq \mathbf{v},\ \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Soit l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^d, +)$ sur le corps $(\mathbb{R}, +, \bullet)$, avec la loi externe $\cdot$. Considérons un vecteur $\mathbf{x}$ et une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $(\mathbb{R}^d, +)$, avec $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot \mathbf{u}_i$. Alors, $a_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle$, $1 \leq i \leq d$.

Pour l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^d, +)$ sur le corps $(\mathbb{R}, +, \bullet)$ nous emploierons la représentation d'un vecteur $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} a_i \cdot \mathbf{u}_i$ par la matrice colonne $[a_1 \ldots a_d]^t$ (^{t} indique la transposition).

8 Espace métrique

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble non vide et $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$. $(\mathcal{M}, d)$ est un *espace métrique* et d une *distance* si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. Symétrie : $\forall x, y \in \mathcal{M},\ d(x, y) = d(y, x)$.
2. Séparation : $d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$.
3. Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in \mathcal{M},\ d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Définissons $d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}^+$ par $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (où $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$, $-\mathbf{y}$ étant l'inverse de $\mathbf{y}$ par rapport à la loi interne $+$ de $\mathcal{V}$). Alors $(\mathcal{V}, d)$ est un espace métrique.

9 Matrices

Soit $(\mathcal{K}, +, \bullet)$ un corps commutatif. On appelle matrice $m \times n$ (ou (m, n)) à coefficients dans $\mathcal{K}$ un ensemble d'éléments de $\mathcal{K}$ indexé par les éléments du produit cartésien $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, $a_{ij} \in \mathcal{K}$. Représentation :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On notera par $\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$ l'ensemble des matrice $m \times n$ à coefficients dans $\mathcal{K}$. On définit les opérations suivantes :

- Addition entre matrices :
  $+ : \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}),\ \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (ce dernier $+$ étant l'opération de $(\mathcal{K}, +, \bullet)$), $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$.
- Multiplication par un scalaire :
  $\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}),\ a \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$, avec $c_{ij} = a \bullet b_{ij}$ ($\bullet$ étant l'opération de $(\mathcal{K}, +, \bullet)$), $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$.

On peut montrer que $\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$, avec l'addition entre matrices et la multiplication d'une matrice par un scalaire de $\mathcal{K}$, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{K}$.

Transposée d'une matrice : soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$, on appelle *transposée* de $\mathbf{A}$ la matrice notée $\mathbf{A}^t$, $\mathbf{A}^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathcal{K})$, donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathcal{K})$ est *symétrique* si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$.

Multiplication entre matrices : considérons $\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$, $\mathcal{M}_{n,l}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{M}_{m,l}(\mathcal{K})$, on peut définir l'opération externe

$$\cdot : \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}) \times \mathcal{M}_{n,l}(\mathcal{K}) \to \mathcal{M}_{m,l}(\mathcal{K}),\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

avec

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

(ce $\cdot$ étant l'opération de $(\mathcal{K}, +, \bullet)$), $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}), \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathcal{K}), \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathcal{K})$.

Pour des matrices carrées, $m = n = l$, la multiplication est une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_{n,n}(\mathcal{K})$ qui admet comme élément neutre

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

où 0 est l'élément neutre de l'opération $+$ et 1 est l'élément neutre de l'opération $\bullet$ de $(\mathcal{K}, +, \bullet)$; $\mathbf{I}_n$ est une matrice *diagonale*, avec 1 sur la diagonale principale et 0 en dehors. On peut montrer que $(\mathcal{M}_{n,n}(\mathcal{K}), \cdot)$ est un groupe.

Déterminant d'une matrice carrée à coefficients réels : $\det : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \operatorname{Cof}_{ij}$$

où Cof_{ij} est le co-facteur d'indice i, j obtenu comme

$$\operatorname{Cof}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{-ij}$$

$\mathbf{A}_{-ij}$ étant la matrice obtenue en éliminant la ligne i et la colonne j de $\mathbf{A}$.

Le rang d'une matrice $\mathbf{A}$ (carrée ou non) est la dimension de la plus grande matrice (carrée) de déterminant non nul extraite de $\mathbf{A}$.

Inverse d'une matrice : soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, s'il existe une matrice $\mathbf{A}^{-1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, alors $\mathbf{A}$ est *inversible* et $\mathbf{A}^{-1}$ est son inverse. $\mathbf{A}$ est inversible si et seulement si $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est *diagonalisable* si $\exists\, \mathbf{D}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{D}$ diagonale et $\mathbf{B}$ inversible, telles que $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{B}$.

Une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si et seulement si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t = \mathbf{I}_n$. Toute matrice orthogonale est donc inversible et $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$.

Les matrices symétriques de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ sont diagonalisables à l'aide de matrices orthogonales : $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \exists\, \mathbf{D}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{D}$ diagonale et $\mathbf{B}$ orthogonale, telles que $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{B}$.

10 Matrices et applications linéaires

Considérons les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sur le corps $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_n = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_m = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$. Une application linéaire $f_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est définie de façon unique par l'ensemble des vecteurs $\{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_1), \ldots, f_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_n)\}$. Chacun des vecteurs de $\{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_1), \ldots, f_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_n)\} \subset \mathbb{R}^m$ peut être écrit en utilisant la base $\mathcal{B}_m$ de $\mathbb{R}^m$:

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{v}_i$$

Soit la matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. On peut alors facilement montrer que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \tag{1}$$

Nous avons représenté un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les coordonnées du vecteur dans la base $\mathcal{B}_n$ et un vecteur de $\mathbb{R}^m$ par une matrice colonne de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les coordonnées du vecteur dans la base $\mathcal{B}_m$.

Nous avons donc une bijection $\phi : \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m\} \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\phi(f_{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}$ qui associe à chaque application linéaire une matrice telle que la relation (1) soit valable.

Soit la matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, alors l'application $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}$ est une forme bilinéaire.

11 Valeurs et vecteurs propres

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Si la relation suivante est satisfaite pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n - \theta$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$$

alors λ est appelée *valeur propre* de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{v}$ *vecteur propre* de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ. Noter que si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$, alors $\forall k \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \cdot (k \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot (k \cdot \mathbf{v})$. Les valeurs propres sont déterminées grâce aux équivalences suivantes :

$$\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n - \theta, \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) \text{ n'est pas inversible } \;\Leftrightarrow\; \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0$$

L'ensemble de toutes les valeurs propres d'une matrice (application linéaire) est appelé *spectre* de la matrice. L'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre λ forment, avec le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ appelé *espace propre* associé à la valeur propre λ.

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$), alors toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$. Si $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ alors $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{A} = \mathbf{X}^t \cdot \mathbf{X}$ est symétrique.

$\mathbf{A}$ est *définie positive* si la forme bilinéaire associée $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ est définie positive, c'est à dire $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \theta \Rightarrow \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$. Une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont > 0. Si $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, alors $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{A} = \mathbf{X}^t \cdot \mathbf{X}$ est définie positive.

$\mathbf{A}$ est *semi-définie positive* si la forme bilinéaire associée $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ est semi-définie positive, c'est à dire $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \theta \Rightarrow \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$. Une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique est semi-définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont ≥ 0. Les sous-espaces propres $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathbb{R}^n$ associés à deux valeurs propres différentes λ_1, λ_2 de la matrice $\mathbf{A}$ sont orthogonaux ($\forall \mathbf{x}_1 \in \mathcal{S}_1, \forall \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}_1, \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$). La dimension du sous-espace propre $\mathcal{S}_\lambda$ associé à la valeur propre λ est égale à la multiplicité de la valeur propre λ.

12 Optimisation sous contrainte d'égalité

Objectif : trouver les extremums (maxima ou minima) $\mathbf{x}^*$ de $f(\mathbf{x})$ sous la contrainte $g(\mathbf{x}) = 0$. Les fonctions f, g sont différentiables sur le domaine d'intérêt et le gradient de g ne s'annule pas.

Solution (voir Fig. 1) : $\nabla_\mathbf{x} f(\mathbf{x}^*) = \lambda^* \nabla_\mathbf{x} g(\mathbf{x}^*)$ avec $g(\mathbf{x}^*) = 0$. On définit donc la fonction de Lagrange $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda\, g(\mathbf{x})$ et on impose la condition (nécessaire mais non suffisante, voir la figure) $\nabla_{\mathbf{x},\lambda} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = 0$.

13 Exemple

Considérons deux individus (observations) $A, B \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On cherche à calculer la matrice des covariances empiriques $\mathbf{S}$, ses valeurs et vecteurs propres, ainsi qu'à déterminer l'effet de la transformation linéaire de matrice $\mathbf{S}$ sur des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

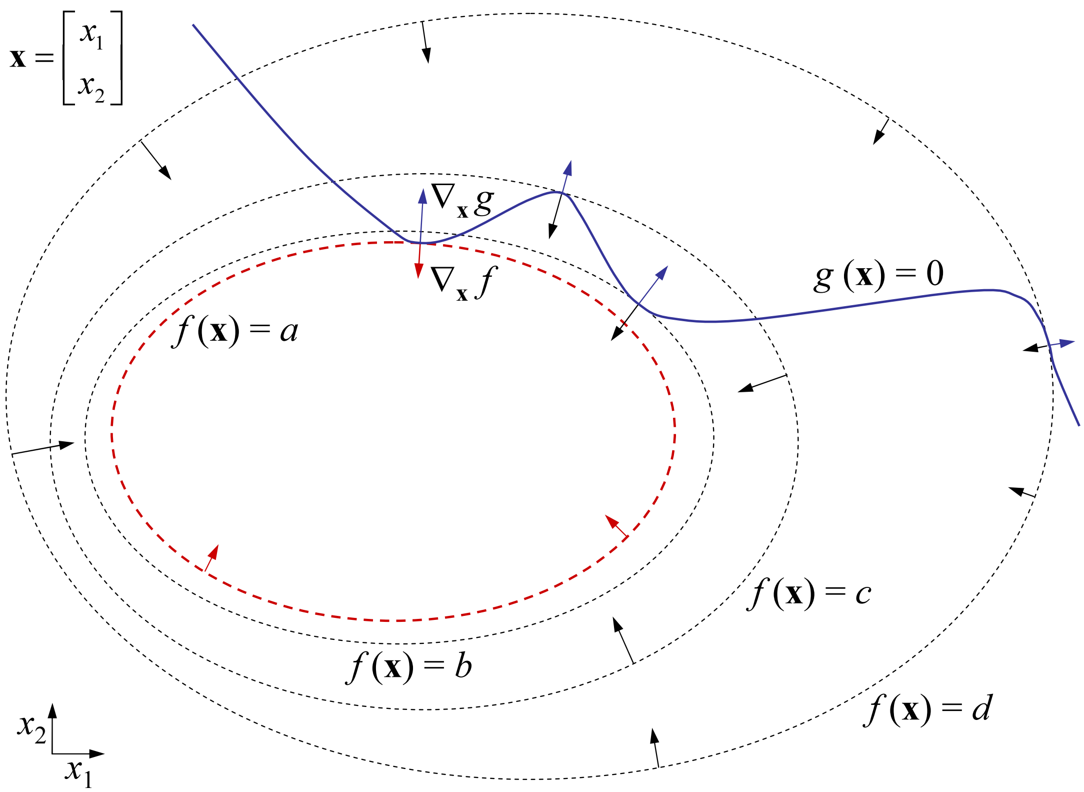
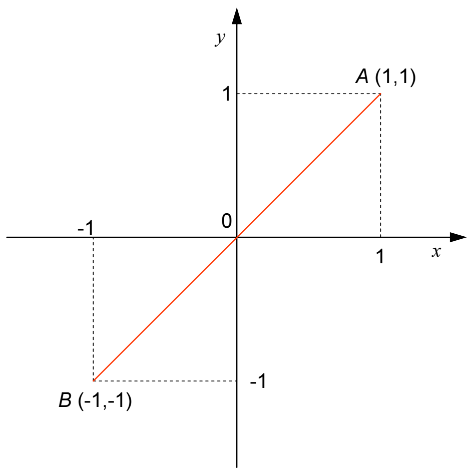


FIGURE 1 – Illustration de l'optimisation sous contrainte d'égalité, pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

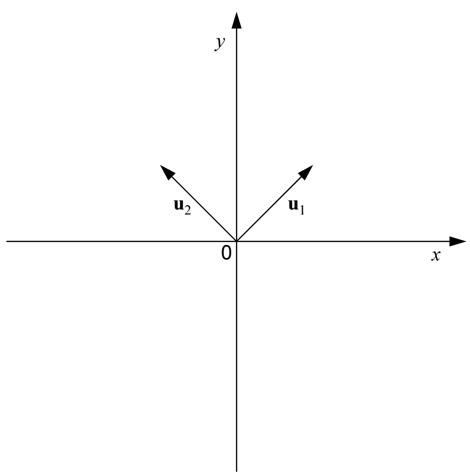


Le centre de gravité du nuage des deux points est

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice des covariances empiriques

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



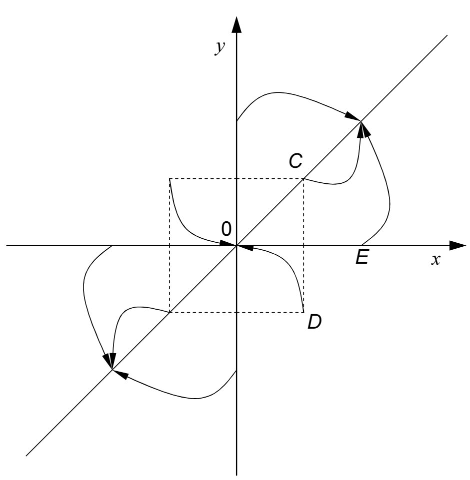
Les valeurs propres de $\mathbf{S}$ sont obtenues comme solutions de

$$\det(\mathbf{S} - \lambda I) = 0$$

Les vecteurs propres sont des solutions de $\mathbf{S}\,\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ et sont choisis de norme unitaire. On obtient

$$\lambda_1 = 2 \qquad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0 \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



Les vecteurs propres $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ forment une base, donc $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2$. En conséquence, $\mathbf{S}\,\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{S}\,\mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{S}\,\mathbf{u}_2$, ou

$$\mathbf{S}\,\mathbf{x} = \lambda_1(\alpha_1 \mathbf{u}_1) + \lambda_2(\alpha_2 \mathbf{u}_2)$$

A chaque multiplication par $\mathbf{S}$ (application de la transformation linéaire correspondante), la projection sur $\mathbf{u}_1$ est multipliée par $\lambda_1 = 2$ et la projection sur $\mathbf{u}_2$ par $\lambda_2 = 0$ (voir la figure à gauche pour l'effet sur quelques vecteurs).