Master Parisien de Recherche Opérationnelle

Examen de l'UE *Bases de l'Optimisation dans les Graphes (BOG)*

Cédric Bentz

25 octobre 2023

Les trois parties peuvent être traitées dans l'ordre que vous souhaitez, dans le sens où les preuves des différents résultats concernés sont indépendantes les unes des autres. Ainsi, même si vous ne savez pas démontrer un résultat associé à une question, vous pouvez néanmoins réutiliser ce résultat dans les preuves des questions suivantes. Enfin, toutes les réponses doivent être justifiées.

Dans toute la suite, étant donné un graphe $G = (V, E)$, on notera :

- $\alpha(G)$: taille maximum d'un stable (ensemble de sommets deux à deux non adjacents) dans G.
- $\nu(G)$: taille maximum d'un couplage dans G.
- $\tau(G)$: taille minimum d'un transversal (couverture des arêtes par les sommets) dans G.
- $\rho(G)$: taille minimum d'une couverture par les cliques des sommets de G.
- $\rho'(G)$: taille minimum d'une couverture par les arêtes des sommets de G.

En particulier, calculer $\rho(G)$ revient à déterminer la taille minimum d'un ensemble de cliques de G tel que tout sommet de V appartient à au moins une de ces cliques. De même, calculer $\rho'(G)$ revient à déterminer la taille minimum d'un sous-ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$ tel que tout sommet de V est une extrémité d'au moins une arête de E'. Si G est sans sommets isolés, alors on a $\rho'(G) \leq |E|$.

Partie I : quelques propriétés générales

Question I.1

a. Montrer que, si G est sans sommets isolés, on a : $\alpha(G) \leq \rho(G) \leq \rho'(G)$.

b. Montrer, à l'aide d'un exemple simple (5 sommets suffisent) sans sommets isolés, qu'il est possible d'avoir $\alpha(G) < \rho(G) = \rho'(G)$.

c. Montrer, à l'aide d'un exemple simple (3 sommets suffisent) sans sommets isolés, qu'il est possible d'avoir $\alpha(G) = \rho(G) < \rho'(G)$.

d. Peut-on avoir $\alpha(G) < \rho(G) < \rho'(G)$ sans sommets isolés ? Justifier.

Question I.2

Montrer que, si M et M' sont deux couplages **maximums** dans un graphe G, alors chaque composante connexe dans la différence symétrique de M et M' contient un nombre pair d'arêtes.

Partie II : stables maximums et couvertures minimums des sommets par les arêtes dans les graphes bipartis sans sommets isolés

Question II.1

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, on associe à chaque sommet i de V une variable 0–1 x_i (qui vaut 1 si et seulement si le sommet i appartient à un stable de taille maximum), et on considère le programme linéaire en variables 0–1 suivant (que l'on notera $PLNE_{stable}$) :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{sous les contraintes que} \quad & \\ & \sum_{i \in \mathcal{C}} x_i \leq 1 \text{ pour toute clique } \mathcal{C} \text{ de } G \\ & x_i \in \{0, 1\} \text{ pour tout sommet } i \text{ de } V \end{aligned}$$

a. Justifier le fait que la valeur optimale de $PLNE_{stable}$ est $\alpha(G)$, quel que soit le graphe G.

b. Montrer que les contraintes $x_i \in \{0, 1\}$ peuvent être remplacées par $x_i \in \mathbb{N}$ dans $PLNE_{stable}$.

c. Après avoir appliqué cette modification, écrire ensuite le programme linéaire dual de la relaxation continue de $PLNE_{stable}$.

d. Montrer alors que, si les variables duales sont supposées être entières, la valeur optimale de ce programme dual est $\rho(G)$.

Question II.2

a. Montrer que $\rho(G) = \rho'(G)$ dans tout graphe biparti G sans sommets isolés, en utilisant le fait qu'un graphe biparti ne contient aucun cycle impair.

b. En utilisant la caractérisation de Ghouila-Houri, montrer que la matrice des contraintes de la relaxation continue de $PLNE_{stable}$ est totalement unimodulaire si le graphe G est biparti.

c. Déduire des questions II.1.a, II.1.d, II.2.a et II.2.b que $\alpha(G) = \rho'(G)$ dans tout graphe biparti G sans sommets isolés.

Question II.3

Montrer à l'aide d'un exemple simple que, dans un graphe biparti $G = (V, E)$ avec $V = L \cup R$ et $|L| \geq |R|$, on peut avoir $\alpha(G) > |L|$ même si G est connexe.

Question II.4

On suppose à présent que chaque sommet i du graphe G est muni d'un poids rationnel positif, noté p_i : le **poids** d'un stable est alors la somme des poids de ses sommets. Montrer, en détaillant bien vos arguments, que calculer un stable de poids maximum dans G est un problème polynomial si G est biparti.

Partie III : une preuve alternative du théorème de König-Egerváry dans les graphes bipartis

Question III.1

Montrer, à l'aide des définitions du cours, que, dans tout graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un stable si et seulement si $V \setminus S$ est un transversal, et en déduire que $\alpha(G) + \tau(G) = |V|$.

Question III.2

Montrer que, dans tout graphe $G = (V, E)$ sans sommets isolés, on a $\rho'(G) = |V| - \nu(G)$. (*Indication* : montrer que toute couverture minimum des sommets par les arêtes contient un couplage maximum.)

Question III.3

Déduire des questions II.2.c, III.1 et III.2 une preuve alternative du théorème de König-Egerváry dans les graphes bipartis (avec ou sans sommets isolés).

Question III.4

Montrer, à l'aide de la question III.1, et des théorèmes de König-Egerváry et Hall, que, dans tout graphe biparti k-régulier G avec $k \geq 1$, on a $\alpha(G) = \nu(G)$.