

DEA INFORMATIQUE ET RECHERCHE OPÉRATIONNELLE (UPMC/CNAM)

ÉTUDE DES PROBLÈMES DU MULTIFLOT ENTIER MAXIMUM ET DE LA MULTICOUPE MINIMUM DANS DES GRILLES

Cédric BENTZ

Stage effectué au laboratoire CEDRIC du CNAM

Directeur de recherche : M.-C. COSTA (Professeur CNAM)

Co-encadrant : F. ROUPIN (Mdc IIE-CNAM)

24 septembre 2003

Résumé

Les problèmes du multiflot entier maximum et de la multicoupe minimum sont des problèmes souvent difficiles, et de plus en plus étudiés du fait de leur intérêt dans différents domaines (dans celui des télécoms, par exemple).

Dans un graphe $G = (V, E)$ dont les arêtes sont pondérées par des entiers positifs, ils s'énoncent de la façon suivante : étant donnée une liste de K paires {source, puits} de sommets, le problème du multiflot entier consiste à maximiser la somme des flots entiers routés entre chacune des K paires de sommets, tout en respectant les contraintes de capacité sur les arêtes. Le problème de la multicoupe consiste à sélectionner un sous-ensemble d'arêtes de poids total minimal de façon à séparer chacune des K paires de sommets.

L'objectif de ce travail consiste à s'intéresser à ces deux types de problèmes, et à certains problèmes connexes, dans des graphes en forme de grilles.

L'existence de chemins disjoints par les arêtes dans de tels graphes est un problème qui a été beaucoup étudié, du fait de son intérêt dans la conception des circuits VLSI. Nous montrons tout d'abord comment appliquer une partie des théorèmes existants sur ce sujet pour la résolution du problème de maximisation du nombre de chemins disjoints dans les grilles. Sous la condition suffisante que le nombre de lignes de la grille est impair et suffisamment petit, le problème est polynomial. Autrement, nous prouvons qu'une très bonne solution approchée peut être apportée en temps polynomial.

Nous étudions ensuite comment utiliser ces nouveaux résultats pour fournir une solution au problème de multicoupe dans les grilles ayant des capacités toutes unitaires. Nous prouvons que ce problème est polynomial.

Dans un troisième temps, nous essayons de généraliser au cas des capacités uniformes les résultats obtenus pour le cas des capacités unitaires.

Enfin, nous nous intéressons à la complexité du problème de maximisation du multiflot insécable entier. Ce problème est NP-difficile dans les graphes quelconques, et nous prouvons qu'il reste NP-difficile dans les grilles à capacités quelconques. Nous donnons deux réductions polynomiales différentes, à partir des problèmes respectifs de PARTITION et PARTITION+.

Mots-clés : Multicoupe, Multiflots entiers, Grilles.

Table des matières

1	Accueil et encadrement	4
1.1	Présentation du laboratoire CEDRIC	4
1.2	Remerciements	5
2	Présentation des problèmes étudiés	6
3	État de l'art	11
3.1	Deux problèmes duaux	11
3.2	Complexité	11
3.3	Résultats sur les grilles	13
3.3.1	Résultats généraux	13
3.3.2	Existence de chemins disjoints par les arêtes	13
4	Étude des problèmes dans les grilles à capacité uniforme	16
4.1	Étude du problème de maximisation du nombre de chemins disjoints par les arêtes	16
4.1.1	Cas où le nombre de lignes est supérieur ou égal à la densité de la grille	16
4.1.2	Cas où le nombre de lignes est strictement inférieur à la densité de la grille	18
4.2	Étude du problème de multicoupe minimum dans les grilles à capacité unitaire	32
4.2.1	Cas où le nombre de lignes est supérieur ou égal à la densité de la grille	32
4.2.2	Cas où le nombre de lignes est strictement inférieur à la densité de la grille	40
4.3	Étude des grilles à capacité uniforme	43
4.3.1	Problème de la multicoupe minimum	43
4.3.2	Problèmes du multiflot entier maximum et du multiflot entier insécable maximum	44
5	Complexité du problème FlotInsécable dans les grilles	47
5.1	Réduction à partir du problème PARTITION	47
5.2	Réduction à partir du problème PARTITION+	49
6	Conclusion	51
7	Bibliographie	53
8	Terminologie et notations	55
9	Tableau récapitulatif des résultats	57

1 Accueil et encadrement

1.1 Présentation du laboratoire CEDRIC

Le CEDRIC est reconnu comme équipe d'accueil (EA 1395) par le ministère de tutelle. Le laboratoire regroupe des enseignants-chercheurs en Informatique des Départements d'Informatique et de Mathématiques du CNAM à Paris, et de l'Institut d'Informatique d'Entreprise (IIE) à Évry.

Fondé en 1988 par C. Kaiser, G. Florin et S. Natkin, le CEDRIC regroupe l'essentiel de l'activité de recherche en informatique menée au CNAM. Les équipes sont réparties entre deux localités : le CNAM Paris et l'Institut d'Informatique d'Entreprise à Évry.

Le CEDRIC mène des travaux dans l'ensemble des domaines de l'informatique avec un axe principal orienté vers la conception, la modélisation et la validation de systèmes. Le CEDRIC, de par son appartenance au CNAM, joue un rôle privilégié en matière de transfert de technologie de la recherche vers l'industrie. Le CEDRIC entretient des rapports avec les principaux acteurs industriels et publics des Nouvelles Technologies de l'Information et de la Communication (NTIC). Il participe aux actions de recherche des réseaux français et européens.

En accord avec la politique scientifique de l'Établissement et des organismes de tutelle, et en liaison avec les autres laboratoires, publics et privés, de la spécialité, le CEDRIC a pour missions de :

- Définir les programmes de recherche et effectuer toute recherche dans la spécialité. En ce sens, il vise à être une des composantes essentielles de la recherche en informatique en France, tant sur le plan de la recherche académique que de la recherche technologique ;
- Contribuer à la valorisation et au transfert des résultats de ces recherches auprès des milieux scientifiques et professionnels. Le laboratoire vise à une reconnaissance nationale et internationale de la qualité de ses travaux et de sa capacité à jouer un rôle moteur dans le transfert de technologie entre les milieux académiques et industriels ;
- Être un des moyens de l'établissement pour améliorer le niveau et la qualité de ses enseignements. Dans ce domaine, le CEDRIC doit favoriser le recrutement d'enseignants chercheurs de haut niveau scientifique et être un lieu privilégié de la formation, à la recherche et par la recherche ;

- Favoriser la constitution et le fonctionnement d'équipes de recherche sur la base de plans pluriannuels de développement des activités de recherche ;
- Favoriser les projets d'opérations de caractère interdisciplinaire, pluri-institutionnel ou plurinational.

Ses cinq thèmes de recherche sont :

- Modélisation ;
- Optimisation combinatoire ;
- Réseaux, systèmes et multimédia ;
- Systèmes d'information, de décision et bases de données ;
- Systèmes sûrs.

Le stage s'est effectué au sein du thème *Optimisation Combinatoire*, sous la direction de Marie-Christine Costa, Professeur des Universités, et de Frédéric Roupin, Maître de Conférence.

1.2 Remerciements

Je remercie vivement Marie-Christine Costa pour m'avoir donné l'occasion d'effectuer ce stage au CEDRIC. Il m'a permis de me découvrir un goût prononcé pour la recherche et a conditionné ma décision à poursuivre en thèse. Je remercie également Frédéric Roupin, qui m'a fait part tout au long du stage de ses conseils et critiques avisés.

D'autre part, je remercie Christophe Picouleau et Agnès Plateau qui m'ont accueilli avec beaucoup de sympathie dans leur bureau. Je remercie également Lucas Létocart qui m'a apporté son aide et sa bonne humeur à différentes reprises. Je remercie tous ceux du CEDRIC et notamment Maria Zrikem, Viviane Gal, Stéphane Natkin et Éric Gressier. Je tiens aussi à remercier Féthi Jarray et tous les thésards et stagiaires du CEDRIC, qui m'ont fait un très bon accueil.

J'adresse également mes remerciements à Dominique De Werra et à Andrés Frank.

2 Présentation des problèmes étudiés

Le sujet de ce stage porte sur l'étude du multiflot maximum et de la multicoupe minimum dans des grilles. Nous allons tout d'abord définir rapidement ces deux problèmes dans un graphe quelconque, puis nous introduirons les notions et notations propres aux grilles.

Soit $G = (V, E)$ un graphe dont les arêtes sont pondérées par des entiers positifs et soit \mathcal{L} une liste de K paires {source s_k , puits t_k } de sommets. On note $T \subseteq V$ l'ensemble des *terminaux* : $T = \{s_k\}_{k \in \{1, \dots, K\}} \cup \{t_k\}_{k \in \{1, \dots, K\}}$.

Définition 1 *Le problème du multiflot entier maximum consiste à maximiser la somme des flots entiers routés entre chaque paire de sommets de \mathcal{L} tout en respectant les contraintes de capacité sur les arêtes.*

Définition 2 *Le problème de la multicoupe consiste à sélectionner un sous-ensemble d'arêtes de poids total minimal de façon à séparer chacune des paires de sommets de \mathcal{L} .*

Nous verrons dans la section 3 les résultats connus sur ces deux types de problèmes, et notamment la relation qui les lie. La définition 3 introduit le problème **FlotInsécable** (en anglais **UnSplitFlow**), que nous serons également amenés à étudier.

Définition 3 *Le problème de maximisation du multiflot insécable entier, noté **FlotInsécable**, est un problème de maximisation de multiflot entier dans lequel la propriété suivante est vérifiée :*

$\forall k \in \{1, \dots, K\}$, le flot de s_k à t_k est routé suivant un seul chemin.

Ainsi, toute solution admissible pour le problème **FlotInsécable** est admissible pour le problème du multiflot entier maximum. Définissons à présent ce que nous appellerons par la suite des *grilles*.

Définition 4 *On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On appelle grille $L \times C$ ou grille à L lignes et C colonnes un graphe G ayant les propriétés suivantes :*

- Les sommets de G sont les points où s'intersectent deux à deux les droites d'équations $\{x = i\}_{i=0, \dots, C-1}$ et $\{y = j\}_{j=0, \dots, L+1}$;
- L'ensemble des arêtes de G est obtenu en reliant, pour chaque paire de sommets où cela est possible, les deux sommets par une arête verticale ou horizontale, la seule exception étant que pour tout $i \in \{0, \dots, C-2\}$, les points de coordonnées $(i, L+1)$ et $(i+1, L+1)$ (respectivement $(i, 0)$ et $(i+1, 0)$) ne sont pas reliés entre eux ;
- Les sources sont deux à deux distinctes ;
- Les puits sont deux à deux distincts ;

- L'ensemble des sources $\{s_k\}_{k=1,\dots,K}$ (respectivement des puits $\{t_k\}_{k=1,\dots,K}$) est inclus dans l'ensemble des points à coordonnées entières de la droite d'équation $y = L + 1$ (respectivement $y = 0$);

Ce dernier point signifie que toutes les sources sont situées sur le *bord supérieur* de la grille et tous les puits sur son *bord inférieur*.

Définition 5 On note liaison chacun des K couples $\{s_k, t_k\}$. Une liaison k est dite vers la droite (respectivement vers la gauche) si $s_k < t_k$ (respectivement $s_k > t_k$) et verticale si $s_k = t_k$.

Définition 6 On appelle grille dense une grille telle que $C = K$, ie une grille ayant exactement autant de colonnes que de liaisons.

Définition 7 On note j^e ligne (respectivement i^e colonne) l'ensemble des sommets et arêtes contenus dans la droite d'équation $y = j$ (respectivement $x = i - 1$). On note j^e bande horizontale (respectivement i^e bande verticale) l'ensemble des arêtes contenues dans l'espace situé entre la j^e et la $j + 1^e$ ligne (respectivement la i^e et la $i + 1^e$ colonne).

La figure 1 donne un exemple de grille dense 7×14 et récapitule l'ensemble des notations.

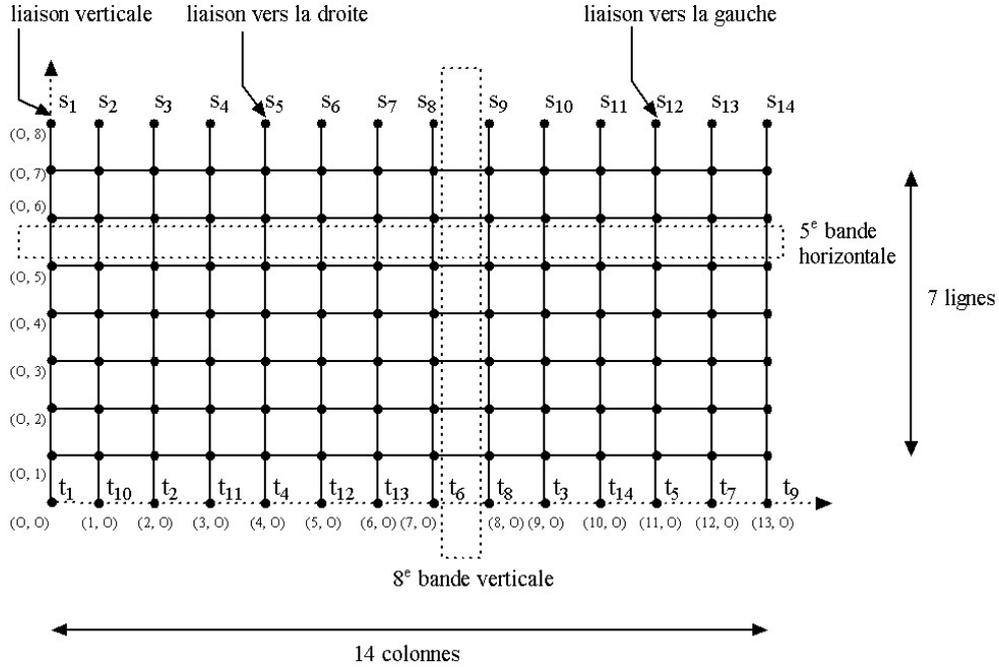


FIG. 1 – Une grille dense à 7 lignes et 14 colonnes.

Définition 8 On appelle densité d'une bande horizontale j et on note d_j le nombre de liaisons qui la traversent, ie

$$d_j = \text{card}(\{(s_l, t_l) \text{ tels que } s_l \leq j \text{ et } t_l > j \text{ ou } s_l > j \text{ et } t_l \leq j\})$$

On appelle densité d'une grille et on note d la plus grande des quantités d_j , ie

$$d = \max_j \{d_j\}$$

Nous verrons dans la section 3 certaines propriétés fondamentales concernant la densité d'une grille. La figure 2 illustre la notion de densité : les liaisons sont indiquées en pointillés et la densité de la grille est 4.

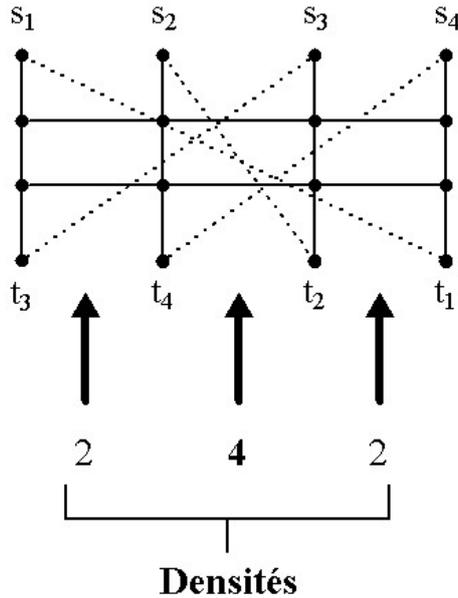


FIG. 2 – Une grille de densité 4.

Définition 9 Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$. On appelle graphe de demande et on note H_G (ou simplement H lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) le graphe défini par :

- Les sommets de H_G sont les terminaux de G ;
- H_G possède K arêtes : à chaque liaison (s_k, t_k) de G correspond une et une seule arête de s_k à t_k dans H_G .

La figure 3 donne le graphe de demande associé à la grille de la figure 2.

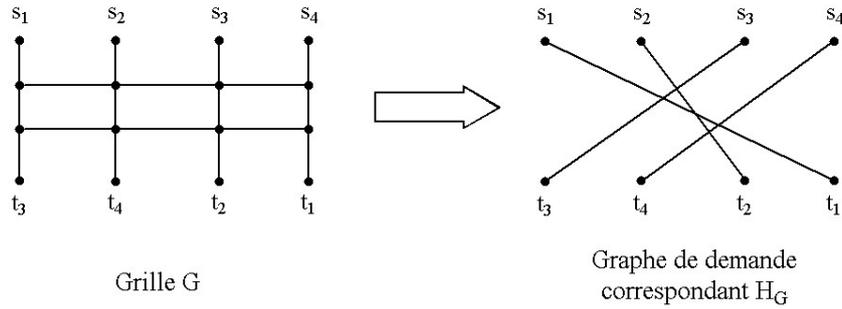


FIG. 3 – Une grille et son graphe de demande associé.

Définition 10 Soit $G = (V, E)$ un graphe quelconque et X un ensemble de sommets de G . On appelle degré de X dans G et on note $d_G(X)$ le nombre d'arêtes ayant exactement un sommet dans X et l'autre dans $V - X$.

La figure 4 montre un exemple de calcul du degré d'un ensemble X dans un graphe G .

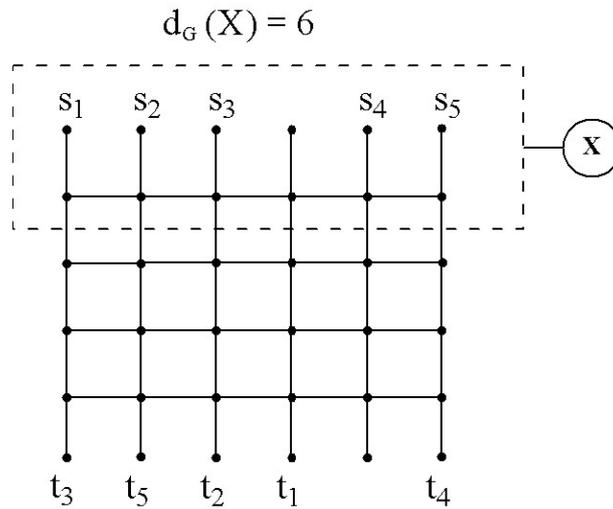


FIG. 4 – Degré d'un ensemble X dans un graphe G .

Définition 11 Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$ et X un ensemble de sommets de G . On appelle surplus de X et on note $s(X)$ la quantité

$$s(X) = d_G(X) - d_{H_G}(X)$$

Définition 12 Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$ et soit v (respectivement h) l'indice d'une bande verticale (respectivement une bande horizontale) de G . On note $X_g(v)$ (respectivement $X_b(h)$) l'ensemble des sommets de G situés à gauche de v (respectivement en-dessous de h), et $G_g(v)$ (respectivement $G_b(h)$) le sous-graphe de G constitué de tous les sommets et arêtes situés à gauche de v (respectivement en-dessous de h). La bande verticale v (respectivement la bande horizontale h) est dite saturée si et seulement si $s(X_g(v)) = 0$ (respectivement $s(X_b(h)) = 0$).

La figure 5 présente, sur une grille particulière, un exemple de calcul de surplus pour une bande horizontale, ainsi que pour une bande verticale saturée.

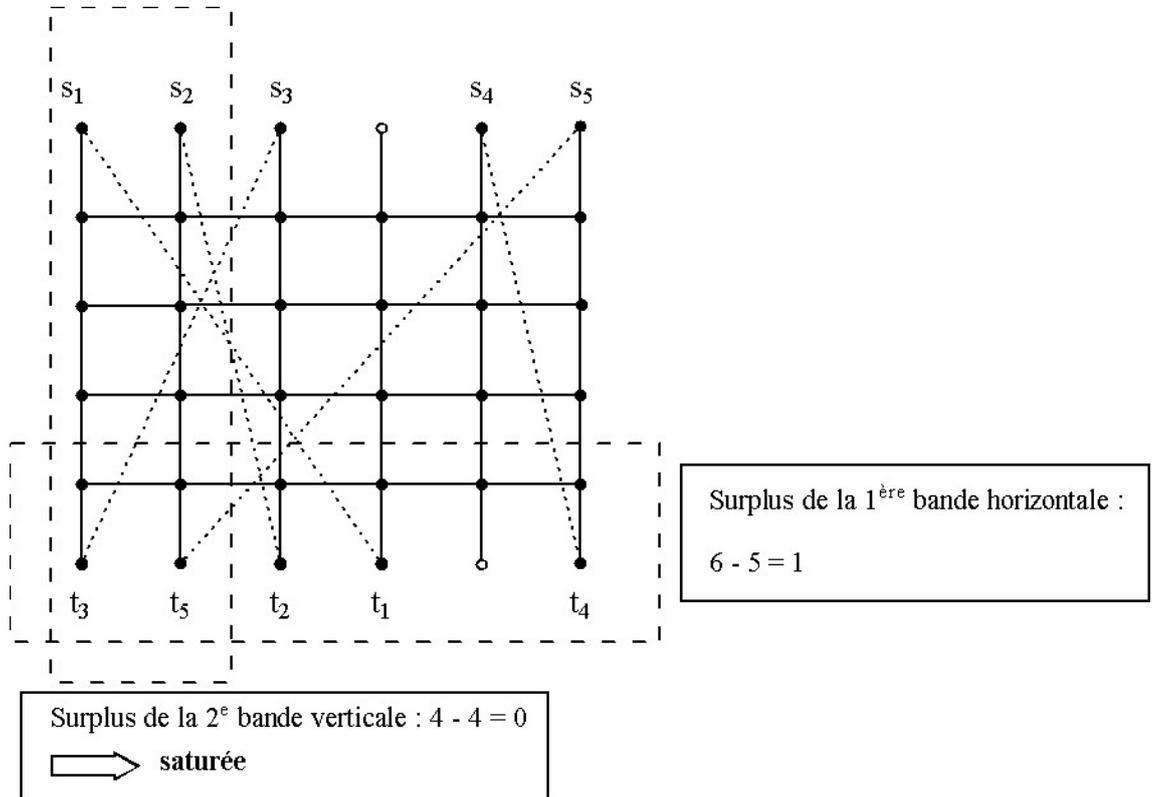


FIG. 5 – Surplus des bandes horizontales et verticales.

À présent que nous avons présenté le sujet de notre étude, nous allons passer en détails les précédents travaux et résultats sur lesquels nous nous appuyerons.

3 État de l'art

3.1 Deux problèmes duaux

Soit un graphe $G = (V, E)$ et K paires de sommets $\{s_k, t_k\}$. Chaque arête e de G est munie d'une capacité u_e , positive et entière. Soit P^k l'ensemble de tous les chemins élémentaires de s_k à t_k . On définit $\Pi = \cup_{k \in \{1, \dots, K\}} P^k$ et $M = \text{card}(\Pi)$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$, on note ϕ_i le flot sur le i^e chemin p_i . La recherche du multiflot entier maximum peut se formuler sous la forme du programme linéaire en nombres entiers ($PL1$).

$$(PL1) \begin{cases} \max & \sum_{i=1}^M \phi_i \\ \text{s. c.} & \sum_{\substack{i \text{ tels que } e \in p_i \\ \phi_i \in \mathbb{N}}} \phi_i \leq u_e \quad \forall e \in E \\ & \phi_i \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \end{cases}$$

De la même façon, la recherche de la multicoupe de valeur minimum peut également se formuler sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers, ($PL2$).

$$(PL2) \begin{cases} \min & \sum_{e \in E} u_e c_e \\ \text{s. c.} & \sum_{e \in p_i} c_e \geq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \\ & c_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E \end{cases}$$

Une propriété remarquable de ces deux PL est la suivante :

Propriété 1 *La relaxation continue de ($PL1$) est le dual de la relaxation continue de ($PL2$).*

Cette propriété a pour conséquence que l'absence de saut d'intégrité à la fois pour ($PL1$) et ($PL2$) équivaut à l'absence d'écart entre les optimums de ($PL1$) et ($PL2$).

3.2 Complexité

Si $K = 1$ on retrouve un problème de *max flot-min coupe* qui se résout simplement mais les deux problèmes sont connus pour être NP-difficiles pour $K > 1$ sauf dans des cas très particuliers.

La complexité du problème du multiflot entier maximum et celle du problème de la multicoupe minimum ont été étudiées dans différents types de graphes. Ces deux problèmes ont été démontrés NP-difficiles dans les graphes planaires et les arbres non orientés [8], et polynomiaux dans les arbres orientés ([4] et [12]). Ils ont également été étudiés dans les anneaux ([11] et [12]).

Le problème de l'existence de chemins disjoints par les arêtes a également été étudié dans certains graphes planaires : [14] dresse la liste de plusieurs cas particuliers où la condition de coupe, que nous détaillerons plus bas, est nécessaire et suffisante pour l'existence de chemins disjoints. Dans [7] et [10], les auteurs étudient ce problème dans des graphes où G est planaire et $G + H_G$ eulérien : la figure 6 montre un exemple de graphe satisfaisant ces deux conditions.

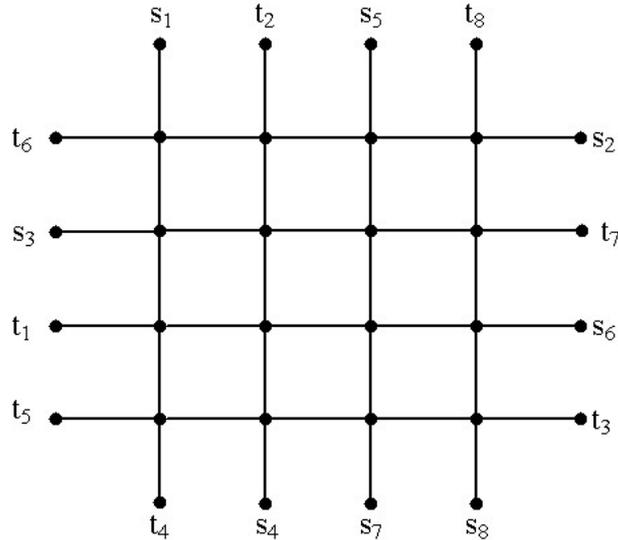


FIG. 6 – Graphe où G est planaire et $G + H_G$ eulérien.

Remarquons tout de même dès à présent que le problème de maximisation du nombre de chemins disjoints par les arêtes, qui est un cas particulier de multiflot entier, est NP-difficile dans les graphes planaires [13] mais polynomial dans les arbres non orientés [8].

Nous ne détaillerons pas dans ce document tous les résultats concernant la complexité de ces problèmes dans les différents types de graphes, mais le lecteur intéressé par une synthèse très complète sur ce sujet pourra se référer à [3].

3.3 Résultats sur les grilles

3.3.1 Résultats généraux

Tout d'abord, Chan et Chin détaillent dans [1] et [2] des algorithmes efficaces pour calculer des chemins disjoints par les arêtes dans des grilles. Cependant, dans les problèmes qu'ils étudient, les terminaux sont situés en n'importe quels sommets de la grille, et chaque flot peut s'écouler de n'importe quelle source vers n'importe quel puits.

D'autre part, les auteurs de [8] montrent par l'intermédiaire d'un exemple que, dans une grille orientée où les terminaux se situent sur des sommets du bord de la grille, le saut d'intégrité pour le multiflot maximum, et par conséquent également l'écart entre les optimums de $(PL1)$ et $(PL2)$, peut être aussi grand que $\frac{K}{2}$.

Par ailleurs, Formann, Wagner et Wagner fournissent dans [5] quelques résultats et idées sur la forme qu'ont, dans les grilles, les chemins disjoints par les arêtes, lorsqu'ils existent. Dans la section 4.2, nous serons amenés à étudier de près les pistes lancées par les auteurs.

Enfin, un résultat intéressant concernant la densité d'une *grille dense* et que nous serons amenés à utiliser est démontré dans [15].

Propriété 2 (Zrikem) *La densité d'une grille dense est toujours paire.*

3.3.2 Existence de chemins disjoints par les arêtes

Le théorème fondamental de cette partie est dû à A. Frank, et nous nous intéresserons dans la section 4 à ses nombreuses implications. Dans cette partie, nous allons simplement le présenter en détails, ainsi qu'un autre théorème de Frank que nous serons également amenés à réutiliser.

Cependant, avant d'énoncer le premier théorème de Frank, nous allons donner quelques définitions introduites par l'auteur et dont nous nous servirons abondamment dans la suite de ce document.

Définition 13 *Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$ et soit v (respectivement h) l'indice d'une bande verticale (respectivement une bande horizontale) de G . On note $\overline{G}_g(v)$ (respectivement $\overline{G}_b(h)$) le graphe obtenu à partir de $G_g(v)$ (respectivement de $G_b(h)$) en supprimant toutes les arêtes de E contenues dans les bandes horizontales (respectivement bandes verticales) saturées.*

Introduisons à présent la notion de *congestion de parité*, qui est essentielle à la compréhension du théorème de Frank.

Définition 14 Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$ et soit v (respectivement h) l'indice d'une bande verticale (respectivement une bande horizontale) de G . On appelle congestion de parité de v (respectivement de h) et on note $CP_V(v)$ (respectivement $CP_H(h)$) le nombre de composantes connexes, que l'on désignera par $V_{i,i \in \{1, \dots, n_1\}}^v$ (respectivement $H_{i,i \in \{1, \dots, n_2\}}^h$), de $\bar{G}_g(v)$ (respectivement de $\bar{G}_b(h)$) dont le degré dans $G + H_G$ est impair, ie le nombre de composantes connexes, de degré impair dans $G + H_G$, du graphe obtenu à partir de G en ne considérant que les sommets et arêtes situés à gauche de v (respectivement en-dessous de h) et en supprimant toutes les arêtes des bandes horizontales (respectivement verticales) saturées.

Remarquons à ce propos que, comme l'ensemble des arêtes d'un graphe G est disjoint de l'ensemble des arêtes du graphe de demande H_G associé, le degré dans $G + H_G$ d'un ensemble quelconque de sommets X est égal à $d_G(X) + d_{H_G}(X)$. La figure 7 donne un exemple de calcul de congestion de parité.

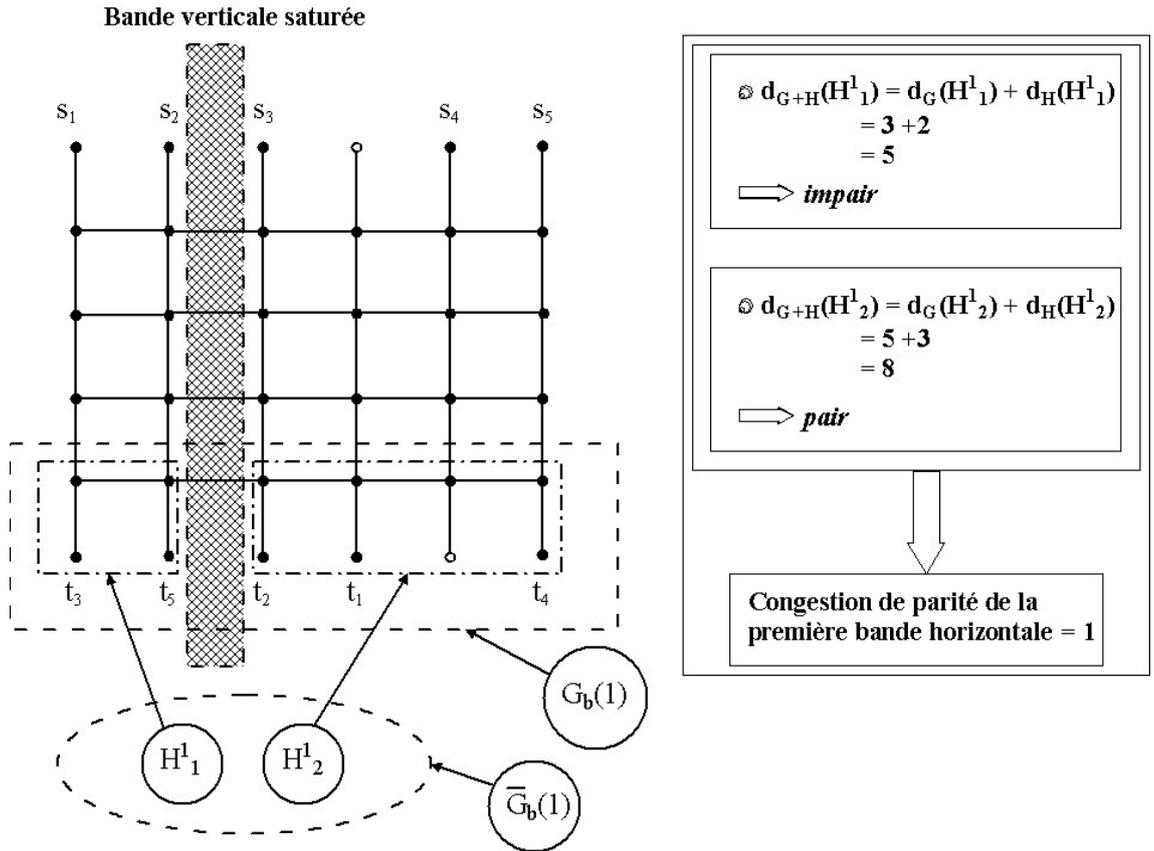


FIG. 7 – Calcul de la congestion de parité d'une bande horizontale.

Définition 15 Soit un graphe $G = (V, E)$. On appelle condition de coupe sur l'ensemble $X \subseteq V$ la condition suivante :

$$s(X) \geq 0$$

Cette condition doit nécessairement être vérifiée par tout ensemble $X \subseteq V$ pour qu'il existe $K = \text{card}(\mathcal{L})$ chemins disjoints dans une grille G . Frank utilise pour son théorème une version plus forte de cette condition, qu'il appelle *condition de coupe révisée*.

Définition 16 Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$. On appelle condition de coupe révisée sur une bande verticale v (respectivement une bande horizontale h) la condition suivante :

$$s(X_g(v)) \geq CP_V(v) \text{ (respectivement } s(X_b(h)) \geq CP_H(h))$$

Nous verrons plus tard que cette condition appliquée aux bandes verticales permet de retrouver la condition nécessaire $L \geq d$.

Étant donnée une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$, notons G' la grille obtenue en échangeant tous les terminaux du *bord supérieur* de G avec tous ceux du *bord inférieur*. Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le théorème de Frank qui caractérise l'existence de $K = \text{card}(\mathcal{L})$ chemins disjoints par les arêtes dans une grille.

Théorème 1 (Frank) Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$. La condition de coupe révisée appliquée à chaque bande verticale et à chaque bande horizontale de G ou G' est nécessaire et suffisante à l'existence de $K = \text{card}(\mathcal{L})$ chemins disjoints par les arêtes dans G .

Frank a également énoncé un autre théorème concernant l'existence de chemins disjoints par les arêtes.

Théorème 2 (Frank) Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$. Si l'un des coins de G n'est pas occupé par un terminal (ie l'un parmi les points de coordonnées $(0, 0)$, $(0, L + 1)$, $(C - 1, 0)$ et $(C - 1, L + 1)$ n'est pas un terminal), alors la condition $L \geq d$, où L est le nombre de lignes de G et d sa densité, est nécessaire et suffisante à l'existence de $K = \text{card}(\mathcal{L})$ chemins disjoints par les arêtes dans G .

Ce deuxième théorème fournit un cas dans lequel la condition de coupe est suffisante à l'existence de K chemins disjoints dans une grille, et ses hypothèses sont beaucoup plus simples que celles du précédent théorème. Frank a démontré le théorème 2 à l'aide d'un algorithme constructif polynomial dans [6], mais nous verrons dans la section 4 qu'il peut aussi se comprendre, et donc se démontrer, comme un simple corrolaire du théorème 1.

4 Étude des problèmes dans les grilles à capacité uniforme

4.1 Étude du problème de maximisation du nombre de chemins disjoints par les arêtes

Nous allons voir, dans cette partie, comment utiliser les résultats obtenus par Frank sur l'existence de $K = \text{card}(\mathcal{L})$ chemins disjoints par les arêtes dans une grille pour trouver le nombre maximum de chemins disjoints que l'on peut router dans une grille quelconque. Nous distinguerons pour l'étude deux cas différents : pour le premier, nous utiliserons simplement le théorème 2 ; pour le deuxième, nous appliquerons les résultats du théorème 1 en détaillant ses nombreuses implications et ferons le lien avec le théorème 2. Sauf précision contraire, nous travaillerons dans toute la suite sur des grilles denses.

4.1.1 Cas où le nombre de lignes est supérieur ou égal à la densité de la grille

D'après les hypothèses du théorème 2, si l'un des coins de la grille n'est pas un terminal, alors on peut router $K = \text{card}(\mathcal{L})$ chemins disjoints. Cependant, dans une grille dense, les quatre coins de la grille sont des terminaux. L'idée est donc de "sacrifier" certaines liaisons pour pouvoir se ramener à l'hypothèse du théorème 2 et router ainsi les liaisons restantes suivant des chemins disjoints.

Supposons que l'on se donne une grille dense $G = (V, E, \mathcal{L})$, et que l'on enlève la liaison (s_K, t_K) : on obtient alors une grille non dense, dans laquelle un des coins (celui précédemment occupé par le terminal s_K) n'est pas un terminal, comme le montre la figure 8.

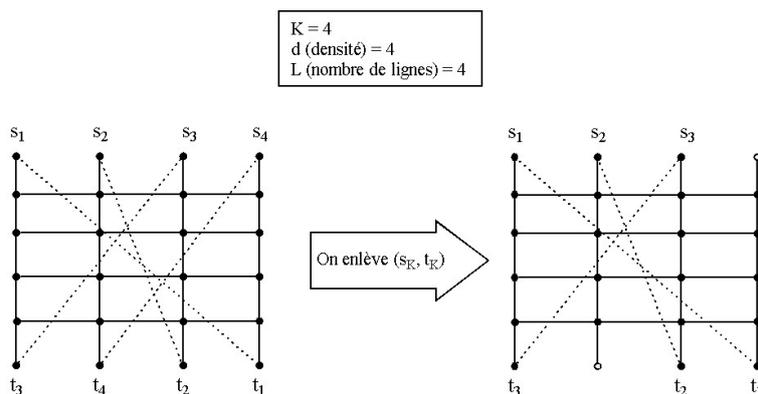


FIG. 8 – Une grille dense dont on a enlevé la liaison (s_K, t_K) .

Dans ce cas, les hypothèses du théorème 2 s'appliquent, et on peut router les $K - 1$ liaisons restantes suivant des chemins disjoints. Autrement dit, lorsque $L \geq d$, on est sûr de pouvoir router au moins $K - 1$ chemins disjoints par les arêtes. Or, par un raisonnement assez simple, on peut montrer que, *à moins que toutes les liaisons soient verticales*, on ne peut jamais router K chemins disjoints.

En effet, si toutes les liaisons sont verticales, on peut trivialement router toutes les liaisons suivant K chemins verticaux, et donc disjoints. Par contre, si l'une d'entre elles n'est pas verticale, au moins un des chemins disjoints utilisés pour router les liaisons n'est pas vertical. Or, pour router K chemins disjoints, il faudrait que les K arêtes de chaque bande horizontale soient utilisées par les chemins, et qu'aucune ne reste libre. Supposons, sans perte de généralité, qu'à la ligne l , l'un des chemins i fasse un coude vers la droite et se décale ainsi de Δ colonnes. Mais à son tour, le chemin passant par la $\Delta + i^e$ colonne est obligé d'obliquer vers la droite, puisqu'il n'a pas le droit d'emprunter une arête où passe un autre chemin. En répétant ce raisonnement suffisamment de fois, on s'aperçoit qu'il faudrait une colonne de plus pour faire passer tous les chemins, comme le montre la figure 9, où ne sont représentés que les chemins.

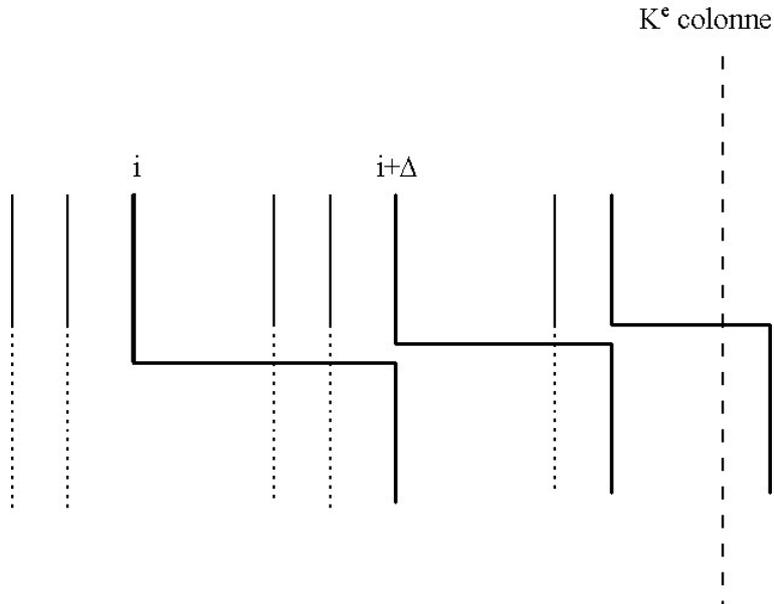


FIG. 9 – On ne peut pas router K chemins disjoints si l'une des liaisons n'est pas verticale.

En conclusion, on peut énoncer la proposition 1.

Proposition 1 *Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$ avec $C = K = \text{card}(\mathcal{L})$.*

Si toutes les liaisons sont verticales, on peut toutes les router suivant des chemins disjoints.

S'il existe au moins une liaison non verticale, le nombre maximum de chemins disjoints que l'on peut router est $K - 1$.

Preuve

Comme nous l'avons évoqué, si toutes les liaisons sont verticales, on peut toutes les router suivant des chemins disjoints verticaux.

S'il existe au moins une liaison non verticale, on sait router $K - 1$ chemins disjoints, et on ne peut pas en router K : le nombre maximum de chemins disjoints par les arêtes routés est donc $K - 1$.

Notons également qu'on est en mesure de construire ces $K - 1$ chemins disjoints à l'aide de l'algorithme présenté par Frank dans [6]. Voyons à présent ce qu'il se passe lorsque l'on a $L \leq d - 1$.

4.1.2 Cas où le nombre de lignes est strictement inférieur à la densité de la grille

D'après les remarques faites au début de la section 4.1.1, le cas des grilles ayant K liaisons verticales est trivial. Dans toute cette section, nous supposons donc qu'au moins une des liaisons n'est pas verticale. De façon évidente, on ne peut pas appliquer le théorème 2 dans ce cas. Nous allons donc être obligés d'utiliser le théorème 1, mais pour ce faire nous allons présenter un certain nombre de résultats préliminaires.

Pour commencer, nous allons préciser la signification de la *condition de coupe révisée*, d'abord sur les bandes verticales, puis sur les bandes horizontales.

Condition de coupe révisée sur une bande verticale v .

On rappelle que la *condition de coupe révisée* s'énonce, sur une bande verticale v :

$$s(X_g(v)) \geq CP_V(v)$$

Pour calculer la quantité $CP_V(v)$, qui est le nombre de composantes connexes de degré impair dans $G + H_G$ du graphe $\overline{G}_g(v)$, il faut tout d'abord chercher quelles bandes horizontales sont susceptibles d'être saturées, ie les bandes horizontales h telles que $s(X_b(h)) = 0$.

Soit donc une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$ et une bande horizontale d'indice h dans G :

- G possède C colonnes, donc $d_G(X_b(h)) = C$;
- G compte $K = \text{card}(\mathcal{L})$ liaisons, chacune reliant un terminal situé sur le bord supérieur de la grille à un terminal situé sur son bord inférieur, donc $d_{H_G}(X_b(h)) = K$.

Au final, on a donc : $s(X_b(h)) = d_G(X_b(h)) - d_{H_G}(X_b(h)) = C - K$. Lorsque G est une grille non dense, $K < C$, et donc $\forall h$ bande horizontale de G , $s(X_b(h)) > 0$: aucune bande horizontale n'est alors saturée. Lorsque G est une grille dense, $C = K$, et donc au contraire toutes les bandes horizontales sont saturées.

Néanmoins, même lorsque l'on part d'une grille dense, on a vu dans la section 4.1.1 que l'on était obligé de "sacrifier" au moins une liaison (à moins que toutes les liaisons soient verticales). Le graphe "résiduel" qui devra vérifier les conditions du théorème de Frank ne sera donc jamais une grille dense.

Par la suite, on supposera donc de façon systématique que $K < C$, c'est-à-dire :

$$\forall h \text{ bande horizontale de } G, s(X_b(h)) > 0$$

Pour toute bande verticale v , $\overline{G}_g(v)$ ne possède donc qu'une seule composante connexe, V_1^v .

Calculons à présent le degré dans $G + H_G$ de V_1^v :

- Sur chacune des L lignes de G , la v^e arête horizontale a un sommet dans V_1^v et un sommet dans $V - V_1^v$, donc $d_G(V_1^v) = L$;
- Les seules liaisons ayant un sommet dans V_1^v et l'autre dans $V - V_1^v$ sont les liaisons traversant v , donc $d_{H_G}(V_1^v) = d_v$.

La figure 10 illustre ce calcul.

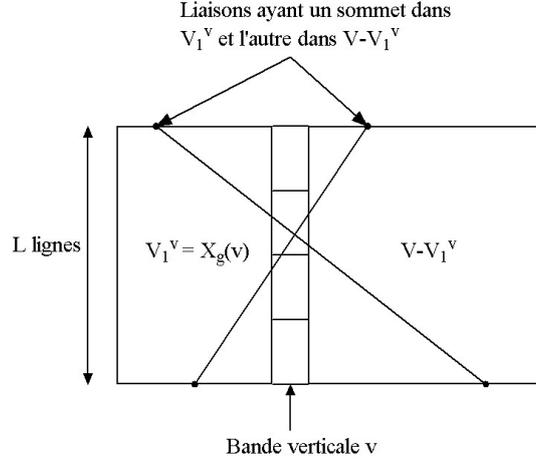


FIG. 10 – Calcul du degré de V_1^v dans $G + H_G$.

Ainsi, on a : $d_{G+H_G}(V_1^v) = L + d_v$. D'autre part, comme $V_1^v = X_g(v)$,
 $s(X_g(v)) = d_G(X_g(v)) - d_{H_G}(X_g(v)) = d_G(V_1^v) - d_{H_G}(V_1^v) = L - d_v$

On distingue alors trois cas :

- Si $L = d_v$, alors $s(X_g(v)) = 0$ et $d_{G+H_G}(V_1^v) = L + d_v = 2L$. La seule composante connexe de $\overline{G}_g(v)$ est de degré pair dans $G + H_G$, ce qui implique $CP_V(v) = 0$; la *condition de coupe révisée* est donc vérifiée sur v ;
- Si $L < d_v$, alors $s(X_g(v)) < 0$ et $CP_V(v)$ est une quantité qui dépend de v mais reste toujours *positive*. La *condition de coupe révisée* n'est donc pas vérifiée sur v ;
- Si $L > d_v$, alors $s(X_g(v)) \geq 1$ et $CP_V(v)$ est une quantité qui dépend de v mais reste toujours inférieure ou égale à 1, puisque $\overline{G}_g(v)$ ne possède qu'une composante connexe. La *condition de coupe révisée* est donc vérifiée sur v .

Finalement, pour une bande verticale v , la *condition de coupe révisée* est vérifiée si et seulement si $L \geq d_v$. Elle est vérifiée sur toutes les bandes verticales si et seulement si

$$L \geq \max_v d_v \iff L \geq d$$

On retrouve ici l'une des conditions du théorème 2. On peut également remarquer que, pour les bandes verticales, la *condition de coupe révisée*

équivalent à la condition de coupe simple (car elle équivaut en fait à $s(X_g(v)) \geq 0$). Étudions à présent l'application de la *condition de coupe révisée* à une bande horizontale.

Condition de coupe révisée sur une bande horizontale h .

Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$. On suppose que G possède $n_2 - 1$ bandes verticales saturées, et qu'ainsi le graphe $\overline{G}_b(h)$ possède n_2 composantes connexes. La figure 11 montre à quoi ressemble un tel graphe $\overline{G}_b(h)$.

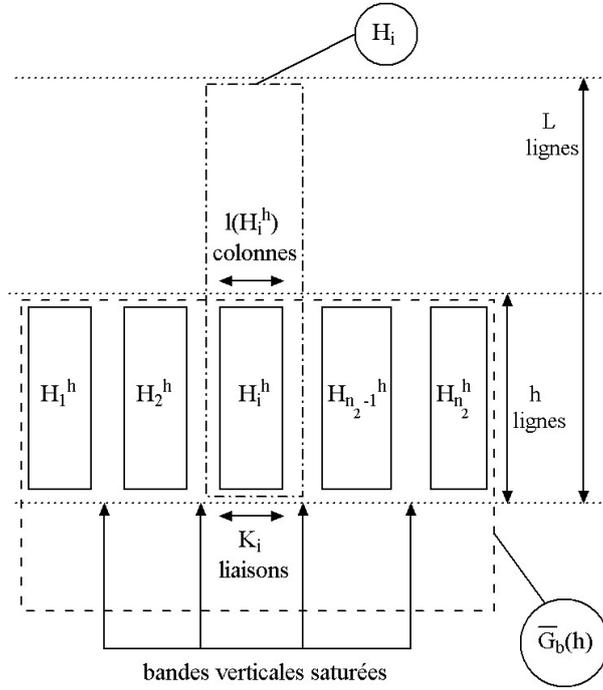


FIG. 11 – Exemple de graphe $\overline{G}_b(h)$.

De façon évidente, $\forall h$ bande horizontale, $s(X_b(h)) = C - K$. Notons $l(H_i^h)$ la *largeur*, en nombre de colonnes, d'une composante connexe H_i^h , et K_i le nombre de liaisons ayant leur puits dans H_i^h . Calculons à présent la *congestion de parité* d'une bande horizontale h . Pour cela, calculons le degré dans $G + H_G$ de chaque composante H_i^h . On distingue deux types de composantes :

- Pour $i = 1$ ou $i = n_2$, il y a $l(H_i^h)$ arêtes verticales et h arêtes horizontales ayant un sommet dans H_i^h et l'autre dans $V - H_i^h$, et K_i liaisons ayant leur puits dans H_i^h , donc $d_G(H_i^h) = l(H_i^h) + h$ et $d_{H_G}(H_i^h) = K_i$,

donc $d_{G+H_G}(H_i^h) = K_i + l(H_i^h) + h$;

- $\forall i \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$, il y a $l(H_i^h)$ arêtes verticales et $2h$ arêtes horizontales (h à gauche de H_i^h et h à sa droite) ayant un sommet dans H_i^h et l'autre dans $V - H_i^h$, et K_i liaisons ayant leur puits dans H_i^h , donc $d_G(H_i^h) = l(H_i^h) + 2h$ et $d_{H_G}(H_i^h) = K_i$, donc $d_{G+H_G}(H_i^h) = K_i + l(H_i^h) + 2h$.

Pour simplifier les explications qui vont suivre, introduisons à présent la notion de *contribution d'une composante connexe*.

Définition 17 On appelle contribution d'une composante connexe H_i^h et on note $\text{contr}(H_i^h)$ la quantité valant $l(H_i^h) - K_i - 1$ si le degré dans $G + H_G$ de H_i^h est impair, $l(H_i^h) - K_i$ sinon.

On peut remarquer que, pour toute bande horizontale h , on peut redéfinir le surplus de $X_b(h)$ de la façon suivante :

$$s(X_b(h)) = C - K = \sum_{i=1}^{n_2} l(H_i^h) - \sum_{i=1}^{n_2} K_i = \sum_{i=1}^{n_2} (l(H_i^h) - K_i)$$

Ainsi, la *condition de coupe révisée* peut elle aussi se réécrire pour une bande horizontale h :

$$s(X_b(h)) \geq PC_H(h) \iff \sum_{i=1}^{n_2} \text{contr}(H_i^h) \geq 0$$

À présent, étudions les contributions des différents types de composantes :

- Pour $i = 1$ ou $i = n_2$, $d_{G+H_G}(H_i^h) = K_i + l(H_i^h) + h$. Donc, lorsque $K_i = l(H_i^h)$ (ie tous les sommets du bord inférieur sont des terminaux), la parité du degré dans $G + H_G$ de H_i^h dépend de h : elle est impaire lorsque h est impair, paire sinon. Ainsi, pour $K_i = l(H_i^h)$, $\text{contr}(H_i^h) = -1$ si h est impair, 0 sinon. D'autre part, lorsque $K_i < l(H_i^h)$, $\text{contr}(H_i^h) \geq 0$ pour tout h ;
- $\forall i \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$, $d_{G+H_G}(H_i^h) = K_i + l(H_i^h) + 2h$. Donc, lorsque $K_i = l(H_i^h)$, $d_{G+H_G}(H_i^h) = 2(l(H_i^h) + h)$: cette quantité est toujours paire et $\text{contr}(H_i^h) = 0$. Lorsque $K_i = l(H_i^h) - 1$, $d_{G+H_G}(H_i^h) = 2l(H_i^h) + 2h - 1$, donc $\text{contr}(H_i^h) = 1 - 1 = 0$. Enfin, lorsque $K_i \leq l(H_i^h) - 2$, $\text{contr}(H_i^h) \geq 2$.

Comme on le voit, les seules composantes susceptibles d'avoir une contribution négative sont donc H_1^h et $H_{n_2}^h$, dont la contribution peut atteindre

–1. Rappelons également que, si h_1 et h_2 sont deux bandes horizontales, les terminaux contenus dans $H_i^{h_1}$ sont les mêmes que ceux contenus dans $H_i^{h_2}$, puisque la saturation d’une bande verticale ne dépend pas de la bande horizontale considérée. Ainsi, on définit H_i comme étant le sous-graphe de G composé de tous les sommets et arêtes situés entre la $i - 1^e$ et la i^e bande verticale saturée (voir figure 11).

Montrons à présent la proposition 2 :

Proposition 2 *La condition de coupe révisée est vérifiée sur tout h si et seulement si au moins un des sommets du bord (inférieur ou supérieur) de H_1 n’est pas un terminal ou au moins un des sommets du bord (inférieur ou supérieur) de H_{n_2} n’est pas un terminal ou il existe $i \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$ tel que au moins deux des sommets du bord (inférieur ou supérieur) de H_i ne sont pas des terminaux.*

Preuve

Remarquons d’abord que la symétrie entre le bord inférieur et le bord supérieur provient de la symétrie entre G et G' . Par la suite, on parlera donc simplement des *bords horizontaux*. Supposons que la *condition de coupe révisée* soit vérifiée sur tout h et qu’aucune des trois hypothèses décrites dans la proposition 2 ne soit vraie. Ainsi, tous les sommets des bords horizontaux de H_1 et de H_{n_2} sont des terminaux, et $\forall i \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$ au plus un des sommets de chaque bord horizontal de H_i n’est pas un terminal. Alors, pour tout h impair, $\text{contr}(H_i^h) = 0$ pour $i \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$ et $\text{contr}(H_i^h) = -1$ pour $i = 1$ et $i = n_2$. Donc $\sum_{i=1}^{n_2} \text{contr}(H_i^h) = -2$, ce qui contredit l’hypothèse.

Supposons maintenant qu’une des trois hypothèses soit vérifiée. S’il existe $\hat{i} \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$ tel qu’au moins deux des sommets d’un des bords horizontaux de $H_{\hat{i}}$ ne sont pas des terminaux, alors $\forall h \text{ contr}(H_{\hat{i}}^h) \geq 2$. Mais comme $\forall h \text{ contr}(H_1^h) \geq -1$, $\text{contr}(H_{n_2}^h) \geq -1$ et $\forall j \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$ avec $j \neq \hat{i}$, $\text{contr}(H_j^h) \geq 0$, alors on a $\forall h \sum_{j=1}^{n_2} \text{contr}(H_j^h) \geq 2 - 1 - 1 \geq 0$. La *condition de coupe révisée* est donc vérifiée sur tout h .

Supposons ensuite qu’au moins un des sommets d’un des bords horizontaux de H_1 (respectivement de H_{n_2}) n’est pas un terminal. Si $K_1 \leq l(H_1) - 1$ et $K_{n_2} \leq l(H_{n_2}) - 1$, alors $\forall h \text{ contr}(H_1^h) \geq 0$ et $\text{contr}(H_{n_2}^h) \geq 0$, donc $\sum_{i=1}^{n_2} \text{contr}(H_i^h) \geq 0$. Si $K_1 \leq l(H_1) - 2$ et $K_{n_2} = l(H_{n_2})$ (respectivement $K_{n_2} \leq l(H_{n_2}) - 2$ et $K_1 = l(H_1)$), alors $\forall h \text{ contr}(H_1^h) \geq 1$ et $\text{contr}(H_{n_2}^h) \geq -1$ (respectivement $\text{contr}(H_1^h) \geq -1$ et $\text{contr}(H_{n_2}^h) \geq 1$),

donc $\forall h \sum_{j=1}^{n_2} \text{contr}(H_j^h) \geq 1 - 1 \geq 0$. Si $K_1 = l(H_1) - 1$ et $K_{n_2} = l(H_{n_2})$ (respectivement $K_{n_2} = l(H_{n_2}) - 1$ et $K_1 = l(H_1)$), alors $\forall h d_{G+H_G}(H_1^h) = 2K_1 + 1 + h$ et $d_{G+H_G}(H_{n_2}^h) = 2K_{n_2} + h$ (respectivement $d_{G+H_G}(H_1^h) = 2K_1 + h$ et $d_{G+H_G}(H_{n_2}^h) = 2K_{n_2} + 1 + h$) sont de parité différente, donc $\forall h \text{contr}(H_1^h) + \text{contr}(H_{n_2}^h) = 0$ (car l'une des deux a une contribution égale à 1, et l'autre a une contribution qui vaut -1), ce qui implique $\forall h \sum_{j=1}^{n_2} \text{contr}(H_j^h) \geq 0$. Dans tous les cas, la *condition de coupe révisée* est donc vérifiée sur toute bande horizontale h .

On peut à présent reformuler le théorème 1 sous la forme de la proposition suivante :

Proposition 3 *Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$. G admet $K = \text{card}(\mathcal{L})$ chemins disjoints par les arêtes si et seulement si $L \geq d$ et au moins un des sommets d'un des bords horizontaux de H_1 n'est pas un terminal ou au moins un des sommets d'un des bords horizontaux de H_{n_2} n'est pas un terminal ou il existe $i \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$ tel que au moins deux des sommets d'un des deux bords horizontaux de H_i ne sont pas des terminaux.*

On a ainsi deux types de conditions : l'une des conditions est donnée par l'application de la *condition de coupe révisée* aux bandes verticales, l'autre par son application aux bandes horizontales, et chacune de ces deux conditions est nécessaire. L'idée principale de ce qui va être développée par la suite est de toujours essayer de s'y ramener, et notamment à la première des deux, $L \geq d$.

À ce propos, on peut désormais faire le lien entre les deux théorèmes de Frank. En effet, le théorème 2 utilise l'hypothèse qu'un des quatre coins de la grille n'est pas un terminal. Or, en supposant ceci, on est sûr qu'un des sommets d'un des bords horizontaux de H_1 ou H_{n_2} n'est pas un terminal. Ainsi, la condition $L \geq d$ devient nécessaire et suffisante pour l'existence de K chemins disjoints par les arêtes. Le théorème 2 est donc bien une application directe du théorème 1.

À présent, nous allons simplement nous efforcer d'appliquer les résultats obtenus jusqu'ici concernant les conditions nécessaires et/ou suffisantes pour l'existence de K chemins disjoints. Comme on l'a vu :

- La condition $L \geq d$ est nécessaire ;
- La *condition de coupe révisée* appliquée aux bandes horizontales est elle aussi nécessaire, mais est vérifiée par toute grille à laquelle on a

enlevé un terminal situé dans un des quatre coins de la grille. À partir d'une grille quelconque, enlever un seul terminal est donc suffisant pour vérifier cette condition.

L'objectif va donc être, à présent, de trouver comment se ramener, à partir d'une grille quelconque, à une grille vérifiant la condition $L \geq d$. Nous verrons alors si la grille obtenue vérifie aussi l'autre condition, moins exigeante.

Intuitivement, lorsque la condition $L \geq d$ n'est pas vérifiée, on va chercher à retirer ou à "sacrifier" des liaisons pour obtenir une grille ayant moins de liaisons et de densité $d' < d$. Il faut alors se poser la question du choix des liaisons à enlever. Encore une fois, de manière intuitive, les liaisons les plus susceptibles d'être enlevées sont celles qui traversent beaucoup de bandes verticales très denses. Malheureusement, cela ne constitue pas un critère absolu.

On peut alors, par exemple, modéliser ce problème sous la forme d'un programme linéaire. L'objectif est de "sacrifier" le moins de liaisons possible (puisque l'on cherche à router le plus de chemins disjoints possible), et la contrainte est que sur chaque bande verticale ne peuvent passer que L chemins disjoints. Pour une bande verticale b_j , d'indice j et de densité $d_j > L$, il faut donc retirer au moins $d_j - L$ liaisons parmi celles qui sont obligées de la traverser. On note l_k la liaison (s_k, t_k) et \bar{x}_k la variable qui vaut 1 si l'on retire la liaison l_k et 0 sinon. Ce PL s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{l_k \in \mathcal{L}} \bar{x}_k \\ \text{s. c.} \quad \sum_{l_k \text{ traversant } b_j} \bar{x}_k \geq d_j - L \quad \forall j \in \{1, \dots, C-1\} \\ \bar{x}_k \in \{0, 1\} \quad \forall l_k \in \mathcal{L} \end{array} \right.$$

On peut remarquer qu'une façon équivalente de l'écrire, en partant d'une grille vierge de toute liaison et en posant cette fois $x_k = 1$ si on ajoute la liaison (s_k, t_k) et 0 sinon, est le programme linéaire en nombre entiers suivant, noté $(PL3)$:

$$(PL3) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{l_k \in \mathcal{L}} x_k \\ \text{s. c.} \quad \sum_{l_k \text{ traversant } b_j} x_k \leq L \quad \forall j \in \{1, \dots, C-1\} \\ x_k \in \{0, 1\} \quad \forall l_k \in \mathcal{L} \end{array} \right.$$

Considérons alors la relaxation continue de $(PL3)$, notée (PLC) , qui s'écrit :

$$(PLC) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{l_k \in \mathcal{L}} x_k \\ \text{s. c.} \quad \sum_{l_k \text{ traversant } b_j} x_k \leq L \quad \forall j \in \{1, \dots, C-1\} \quad (1) \\ x_k \leq 1 \quad \forall l_k \in \mathcal{L} \quad (2) \\ x_k \geq 0 \quad \forall l_k \in \mathcal{L} \end{array} \right.$$

Si l'on associe aux contraintes de type (1) les variables duales y_j et aux contraintes de type (2) les variables duales w_k , le programme dual de (PLC) s'écrit :

$$(DC) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{l_k \in \mathcal{L}} w_k + L \times \left(\sum_{j \in \{1, \dots, C-1\}} y_j \right) \\ \text{s. c.} \quad w_k + \sum_{j \text{ t. q. } l_k \text{ traverse } b_j} y_j \geq 1 \quad \forall l_k \in \mathcal{L} \quad (3) \\ y_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, C-1\} \\ w_k \geq 0 \quad \forall l_k \in \mathcal{L} \end{array} \right.$$

On remarque que, comme on minimise une fonction dont tous les coefficients sont positifs :

- Si, pour un k , $\exists \hat{j}$ t. q. l_k traverse $b_{\hat{j}}$ vérifiant $y_{\hat{j}} = 1$, alors on a intérêt à prendre $w_k = 0$;
- Si, pour un k , $\forall j$ t. q. l_k traverse b_j on a $y_j = 0$, alors on est obligé d'avoir $w_k = 1$.

D'autre part, si x^* et (w^*, y^*) désignent les solutions optimales respectives des programmes linéaires continus (PLC) et (DC) , la condition des écarts complémentaires s'écrit comme suit :

- $x_k^* < 1 \implies w_k^* = 0$;
- $w_k^* + \sum_{j \text{ t. q. } l_k \text{ traverse } b_j} y_j^* > 1 \implies x_k^* = 0$.

Analysons à présent la signification des variables y_j et w_k , ainsi que celle des contraintes de type (3). On s'aperçoit en fait que toute solution optimale entière du programme linéaire en nombres entiers associé à (DC) correspond

à une coupe d'une forme très particulière dans une grille :

- $w_k = 1$ si et seulement si la liaison (s_k, t_k) est coupée "à la base", c'est-à-dire si et seulement si l'arête reliant s_k au reste de la grille est coupée ;
- $y_j = 1$ si et seulement si la j^e bande verticale est coupée dans son intégralité, ie si et seulement si chacune de ses L arêtes est coupée.

En effet, la fonction objectif de (DC) est le nombre d'arêtes d'une telle coupe : chaque variable w_k valant 1 représente une arête coupée et chaque variable y_j valant 1 représente L arêtes coupées. D'autre part, les contraintes de type (3) assurent que, pour chaque liaison (s_k, t_k) :

- soit (s_k, t_k) est coupée "à la base" ;
- soit l'une des bandes verticales par lesquelles passe (s_k, t_k) est coupée sur toute sa hauteur.

Dans tous les cas, l'on est sûr que chacune des sources s_k est déconnectée du puits t_k qui lui correspond. D'autre part, on est sûr que, dans toute solution optimale du programme linéaire en nombres entiers associé à (DC) , $w_k \in \{0, 1\}$ pour tout k et $y_j \in \{0, 1\}$ pour tout j . En effet, si on a une solution où il existe k avec $w_k > 1$ (respectivement j avec $y_j > 1$), on peut diminuer w_k (respectivement y_j) à 1 sans violer aucune contrainte, et on diminue ainsi le coût de la solution.

La figure 12 montre un exemple d'une coupe correspondant à une solution optimale du programme linéaire en nombres entiers associé au programme dual (DC) .

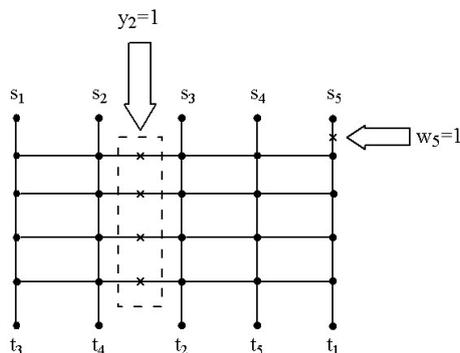


FIG. 12 – Un exemple de coupe.

La proposition 4 rend l'expression du problème par (PL3) et le résultat de dualité entre (PLC) et (DC) particulièrement intéressants.

Proposition 4 *La matrice des contraintes du programme linéaire (PLC), A , est totalement unimodulaire.*

Preuve

Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons le théorème 3, dû à Ghouila-Houri, démontré en 1962 et cité dans [9], et qui caractérise les matrices totalement unimodulaires.

Théorème 3 (Ghouila-Houri) *Une matrice $A = (a_{jk})$ $j \in J, k \in \{1, \dots, K\}$, dont les coefficients sont égaux à 0, +1 ou -1 est totalement unimodulaire si et seulement si tout ensemble non vide d'indices $S \subset J$ peut être partitionné en deux sous-ensembles S_1 et S_2 de manière que :*

$$\forall k \in \{1, \dots, K\}, \left| \sum_{j \in S_1} a_{jk} - \sum_{j \in S_2} a_{jk} \right| \leq 1$$

La matrice des contraintes est la juxtaposition de deux matrices à coefficients égaux à 0 ou 1 : d'une part M , la "matrice d'incidence" bandes verticales – liaisons (ie $m_{jk} = 1$ si la liaison l_k traverse b_j , 0 sinon), et d'autre part I , la matrice identité. On démontrera d'abord que la première des deux est totalement unimodulaire.

Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$ et soit S un sous-ensemble d'indices croissants de bandes horizontales de G . On pose $S_1 = \{j \in S \text{ tels que } j \equiv 0[2]\}$ et $S_2 = \{j \in S \text{ tels que } j \equiv 1[2]\}$. Les colonnes traversées par toute liaison (s_k, t_k) étant contiguës, on peut facilement calculer la différence entre le nombre de 1 contenus dans S_1 et le nombre de 1 contenus dans S_2 . Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, on a :

- Si l'indice du premier 1 de la k^e liaison est dans S_1 (respectivement dans S_2), alors soit l'indice du dernier 1 de la k^e liaison est aussi dans S_1 (respectivement dans S_2) et on a $\sum_{j \in S_1} a_{jk} = \sum_{j \in S_2} a_{jk} + 1$ (respectivement $\sum_{j \in S_2} a_{jk} = \sum_{j \in S_1} a_{jk} + 1$), soit on a $\sum_{j \in S_1} a_{jk} = \sum_{j \in S_2} a_{jk}$;
- Sinon $\sum_{j \in S_1} a_{jk} = \sum_{j \in S_2} a_{jk} = 0$.

Les sous-ensembles S_1 et S_2 ainsi définis vérifient donc bien les conditions du théorème 3. Considérons à présent le déterminant d'une matrice carrée extraite de $A = [\frac{M}{I}]$. Pour le calculer, on le développe d'abord suivant les

lignes extraites de I , chacune d'elles comptant au plus un seul 1. Ainsi, une fois cette opération effectuée sur chacune des lignes extraites de I , on obtient $0 \times D_M$ ou $1 \times D_M$ ou $-1 \times D_M$, où D_M est le déterminant d'une matrice carrée issue de M . Comme la matrice M est totalement unimodulaire, le déterminant initial, issu de $[\frac{M}{I}]$, vaut donc 0, 1 ou -1 . $[\frac{M}{I}]$ est donc bien une matrice totalement unimodulaire.

On peut alors réécrire la condition des écarts complémentaires. Si x^* et (w^*, y^*) sont solutions optimales respectives de (PLC) et (DC) , on a :

- $x_k^* = 0 \implies w_k^* = 0$, donc si la liaison (s_k, t_k) est une des liaisons retirées de G , elle n'est jamais coupée "à la base" ;
- $w_k^* + \sum_{j \text{ t.q. } l_k \text{ traverse } b_j} y_j^* \geq 2 \implies x_k^* = 0$, donc si la liaison l_k est coupée plus d'une fois, elle est nécessairement l'une des liaisons retirées de G .

D'autre part, ce résultat nous permet de conclure que le problème d'obtention des "liaisons à retirer de G ", qui est modélisé par $(PL3)$, est polynomial puisqu'il est résolu par (PLC) . Néanmoins, rien ne nous assure que, au terme de l'opération qui a consisté à enlever les plus "mauvaises liaisons", le graphe résiduel obtenu, noté G^- , vérifie la *condition de coupe révisée* sur chaque bande horizontale. Essayons néanmoins de trouver un cas suffisant. En fait, il suffirait qu'une des liaisons ayant un terminal dans H_1 ou dans H_{n_2} soit enlevée. Or, si L est impair, la 1^{ère} bande verticale saturée dans G^- était forcément, dans G , de densité strictement supérieure à L . En effet :

- Si elle était de densité strictement inférieure à L , elle ne serait pas saturée dans G^- ;
- Si elle était de densité égale à L , elle serait de densité impaire, ce qui d'après la propriété 2 est impossible.

Ceci implique que, nécessairement, on a été obligé de supprimer au moins une liaison traversant cette 1^{ère} bande verticale saturée de G^- , et donc au moins un terminal dans H_1 . **Dans le cas où L est impair, toute solution optimale donnée par (PLC) satisfait donc les conditions nécessaires et suffisantes du théorème 1.** Ainsi, dans une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$, si on note K' la valeur de la solution optimale donnée par (PLC) et $NbMaxCDA$ le nombre maximum de chemins disjoints que l'on peut router dans G , on a :

$$\text{Si } L \text{ est impair, } NbMaxCDA = K'$$

On pourrait alors se demander si ce résultat n'est pas vrai dans tous

les cas. Malheureusement, l'exemple de la figure 13 montre un graphe dans lequel $NbMaxCDA < K'$ (et la multicoûpe minimum vaut K' , comme nous le verrons dans la section 4.2). Les sept chemins disjoints par les arêtes que l'on peut router sont dessinés en couleur.

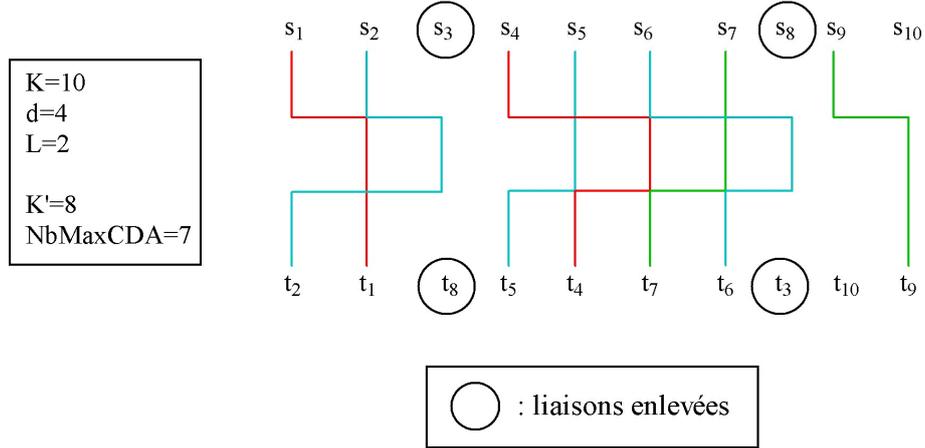


FIG. 13 – Un exemple de grille où $NbMaxCDA < K'$.

Néanmoins, même lorsque $NbMaxCDA \neq K'$, on sait qu'il suffit de retirer un des quatre terminaux situés dans un coin, par exemple en retirant la liaison (s_K, t_K) , pour satisfaire la *condition de coupe révisée* sur chaque bande horizontale. Autrement dit, on a toujours :

$$NbMaxCDA \geq K' - 1$$

La proposition 5 résume l'ensemble des résultats importants de la section 4.1.2.

Proposition 5 *Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$ à L lignes, de densité d et vérifiant $L \leq d-1$. Si on note $NbMaxCDA$ le nombre maximum de chemins disjoints par les arêtes que l'on peut router dans G et K' la valeur de la solution optimale du programme (PLC), on a :*

$$K' - 1 \leq NbMaxCDA \leq K'$$

Lorsque L est impair, on a même :

$$NbMaxCDA = K'$$

On est donc toujours en mesure de donner au moins la valeur d'une solution approchée, avec une erreur absolue de 1. Enfin, pour clore cette section,

précisons que la méthode utilisée pour calculer la valeur d'une solution admissible, optimale ou non, pour le problème de maximisation du nombre de chemins disjoints par les arêtes dans une grille, donne uniquement la valeur de la solution. Pour construire une solution ayant cette valeur, on peut par exemple utiliser l'algorithme donné par Frank dans [6], mais uniquement lorsque l'un des quatre terminaux situés dans un coin a été enlevé.

La figure 14 montre un exemple de routage de chemins disjoints dans une grille (seuls les chemins sont représentés). Cette grille comporte 14 liaisons et 7 lignes. Sa densité étant de 8, on est obligé de sacrifier au moins une liaison. En ne routant pas la liaison (s_{11}, t_{11}) , on obtient une densité résiduelle de 7, et on peut alors, L étant impair, router toutes les autres liaisons suivant des chemins disjoints.

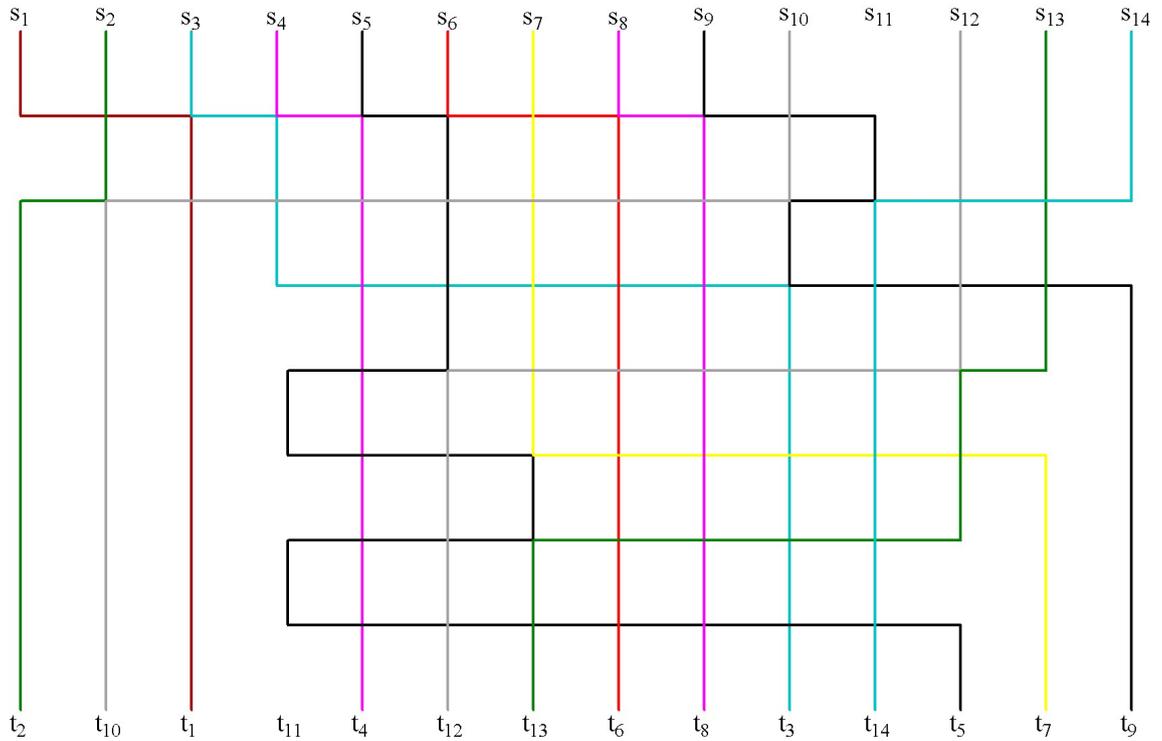


FIG. 14 – Un exemple de routage dans une grille.

4.2 Étude du problème de multicoupe minimum dans les grilles à capacité unitaire

L'objectif de cette partie peut être résumé en quelques mots : nous allons démontrer, dans une grille dense, la proposition 6.

Proposition 6 *Soit une grille dense $G = (V, E, \mathcal{L})$. Si on note K' la valeur de la solution optimale du programme (PLC) et $NbArêtesCoupe$ le nombre nécessaire et suffisant d'arêtes pour une coupe, on a :*

$$NbArêtesCoupe = K'$$

Nous allons être obligés de démontrer ce résultat, en apparence pourtant assez simple, en distinguant trois cas différents. Nous supposons tout d'abord que $L \geq d$, puis que $L \leq d - 1$ et $NbMaxCDA = K'$, et enfin que $L \leq d - 1$ et $NbMaxCDA = K' - 1$.

Nous pouvons dès à présent nous affranchir du cas où les $K = C$ liaisons sont verticales. En effet, dans ce cas, nous savons que l'on peut router K chemins disjoints, et K arêtes sont donc nécessaires pour obtenir une multicoupe. La figure 15 montre que c'est également suffisant.

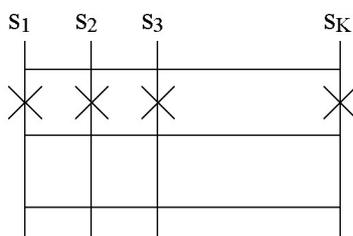


FIG. 15 – K arêtes sont suffisantes pour une multicoupe.

4.2.1 Cas où le nombre de lignes est supérieur ou égal à la densité de la grille

Dans la section 4.1.1, nous avons montré que, dans le cas où $L \geq d$, le nombre maximum de chemins disjoints que l'on est capable de router est $K - 1$. D'autre part, on a alors $K = K'$. Donc $NbArêtesCoupe \geq K' - 1$. Il nous suffit donc de montrer qu'on ne peut pas obtenir une multicoupe avec $K - 1$ arêtes pour montrer que $NbArêtesCoupe = K = K'$.

Supposons maintenant qu'on ait obtenu une multicoupe avec $K - 1$ arêtes. Alors, comme on peut router $K - 1$ chemins disjoints par les arêtes, on a nécessairement une bijection entre les chemins disjoints et les arêtes

coupées. En effet, chaque arête ne coupe qu'un seul chemin, puisque si elle pouvait en couper deux ou plus, cela signifierait que ces chemins partagent une arête et ne sont donc pas disjoints. D'autre part, chaque chemin est évidemment coupé au moins une fois, sinon on n'aurait pas une coupe. En fait, chaque chemin n'est coupé qu'une seule fois. Si un des chemins était coupé deux fois ou plus, alors il resterait moins de $(K - 1) - 2 = K - 3$ arêtes pour couper les $K - 2$ chemins disjoints restants. Ceci est, de toute évidence, impossible. L'une des conséquences de cette propriété est que toute arête n'appartenant à aucun des $K - 1$ chemins disjoints est nécessairement une arête non coupée. D'autre part, cette propriété est vraie quelle que soit la forme de ces chemins disjoints : à chaque chemin correspond une et une seule arête coupée, *quelle que soit la façon dont sont routés ces chemins disjoints*.

Mais alors, on peut montrer que, si une des arêtes de la 1^{ère} ou de la $K^{\text{ème}}$ colonne est coupée, alors les K arêtes situées sur la même bande horizontale que cette arête sont coupées, ce qui contredit le fait qu'on utilise seulement $K - 1$ arêtes.

Pour montrer ce résultat, supposons qu'une des arêtes de la 1^{ère} colonne est coupée (le raisonnement est symétrique pour la $K^{\text{ème}}$ colonne). Quatre cas de figure se présentent alors. Dans la suite, l'abréviation CDA_i désignera le i^{e} des $K - 1$ chemins disjoints, reliant s_{k_i} à t_{k_i} . Une arête marquée $-CDA$ est une arête n'appartenant pas à l'un des $K - 1$ chemins disjoints. Les quatre configurations qui peuvent exister sont représentées dans la figure 16.

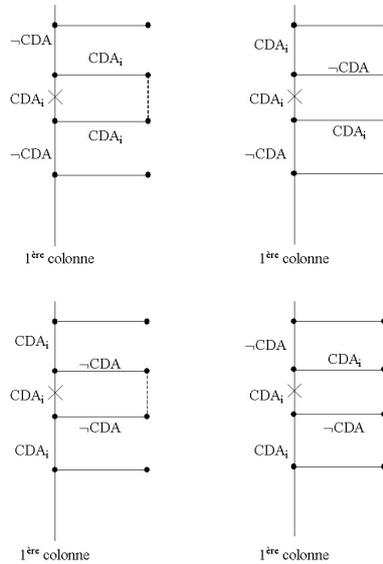


FIG. 16 – Les quatre configurations possibles pour CDA_i .

Si l'arête en pointillés n'est pas coupée, alors en reroutant le chemin CDA_i par cette arête pour contourner celle qui est coupée, on obtient un chemin de s_{k_i} à t_{k_i} non coupé. En effet, comme le i^e chemin possède déjà une arête coupée, aucune des deux autres arêtes marquées CDA_i ne peut être coupée, et on sait d'autre part que les arêtes marquées $\neg CDA$ ne sont jamais coupées.

Or, avoir un chemin de s_{k_i} à t_{k_i} contredit l'hypothèse selon laquelle on a obtenu une coupe avec $K - 1$ arêtes. Dans les quatre configurations, l'arête en pointillés est donc nécessairement coupée, et appartient donc à un des K chemins disjoints, CDA_j . Par ailleurs, ce chemin a nécessairement l'une des quatre formes données dans la figure 17.

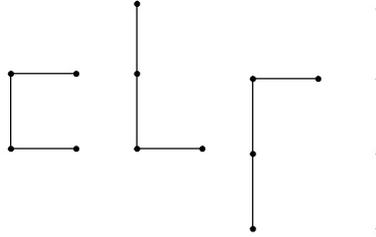


FIG. 17 – Les quatre formes possibles pour CDA_j .

En effet, les cinq formes données dans la figure 18 sont interdites, puisque les arêtes obliquant vers la gauche correspondent à des arêtes marquées $\neg CDA$ ou CDA_i dans la figure 16.

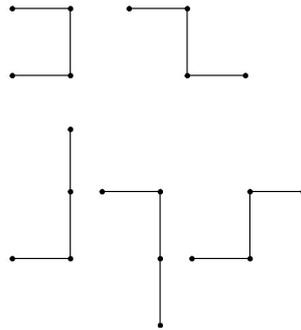


FIG. 18 – Les cinq formes interdites pour CDA_j .

De façon plus précise, les quatre configurations possibles pour CDA_j sont données dans la figure 19. Une arête marquée $\neg coupée$ est soit une arête n'appartenant à aucun des $K - 1$ chemins disjoints, soit une arête appartenant à un chemin différent de CDA_j et dont on a déjà coupé une autre arête.

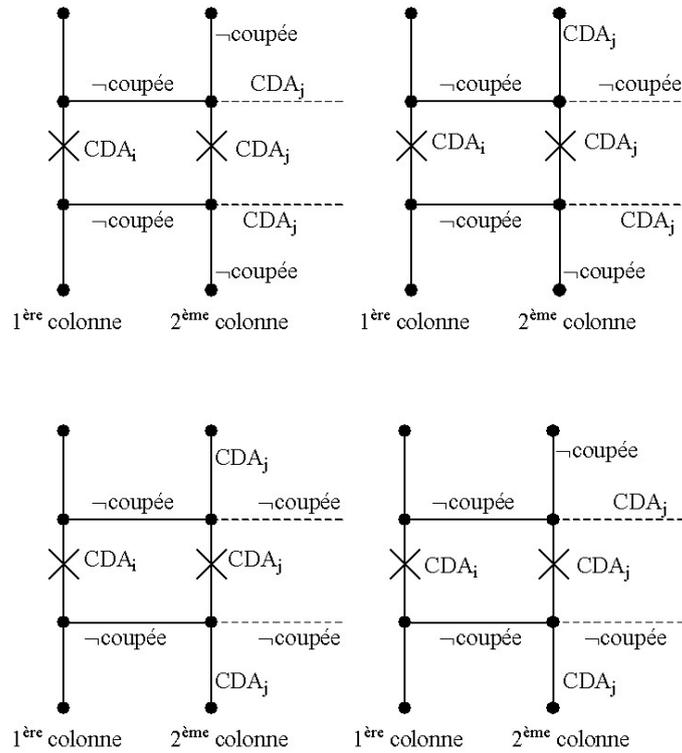


FIG. 19 – Les quatre configurations possibles pour CDA_j .

On se retrouve donc dans une situation comparable à celle de CDA_i : l'arête verticale où passe CDA_j est coupée et aucune des deux arêtes en pointillés n'est coupée. On peut donc utiliser pour le chemin CDA_j le même raisonnement que pour CDA_i . On continue d'itérer ce raisonnement sur toute la bande horizontale. Deux cas peuvent se produire :

- Soit il existe sur cette bande horizontale une arête verticale non coupée. On peut alors rerouter CDA_i en contournant les arêtes coupées, et on obtient un chemin de s_{k_i} à t_{k_i} non coupé, ce qui contredit l'hypothèse ;
- Soit toutes les arêtes verticales de la bande horizontale sont coupées. La coupe compte alors K arêtes, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi, nous avons démontré que, si une arête de la 1^{ère} ou de la $K^{\text{ème}}$ colonne est coupée au niveau de la bande horizontale h , alors toutes les arêtes verticales contenues dans h , soit K arêtes, sont coupées. Donc, s'il existe une coupe avec $K - 1$ arêtes, on est sûr qu'aucune arête de la 1^{ère} et de la $K^{\text{ème}}$ colonne n'est coupée.

Il nous suffit à présent de raisonner sur la forme des chemins disjoints, à l'aide des pistes lancées dans [5]. Tout d'abord, rappelons que le fait que l'on route $K - 1$ chemins disjoints implique qu'à chaque bande horizontale, $K - 1$ arêtes sont utilisées par le routage des chemins disjoints, et donc une seule est libre. On peut donc en déduire que les $K - 1$ chemins disjoints sont tous orientés dans le même sens (ie vers la droite ou vers la gauche) sur une ligne donnée. En effet, la figure 20 montre que, si une partie des chemins était orientée vers la gauche et l'autre partie vers la droite, alors il y aurait dans la bande horizontale suivante deux arêtes (dessinées en pointillés dans la figure 20) non utilisées par un des chemins.

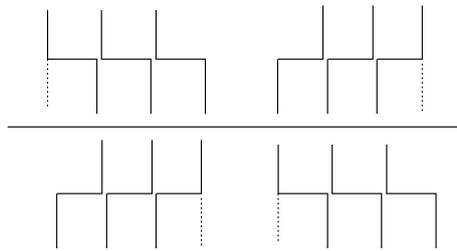


FIG. 20 – Les chemins disjoints ne peuvent être orientés dans des sens différents sur une même ligne.

Par ailleurs, les chemins alternent d'une ligne sur l'autre. En effet, sinon on aurait besoin de $K + 1$ colonnes pour router tous les chemins disjoints, comme l'illustre la figure 21.

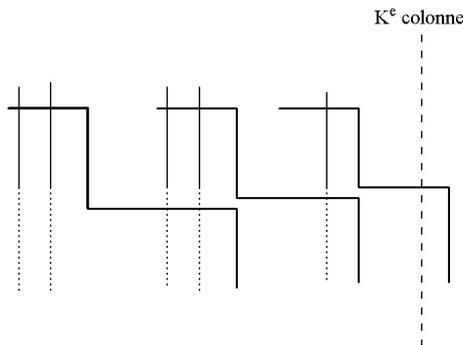


FIG. 21 – Les chemins disjoints ne peuvent être orientés dans le même sens sur deux lignes successives.

On peut donc en conclure que la forme globale des chemins disjoints est fonction de la parité de L . La figure 22 illustre ce phénomène.

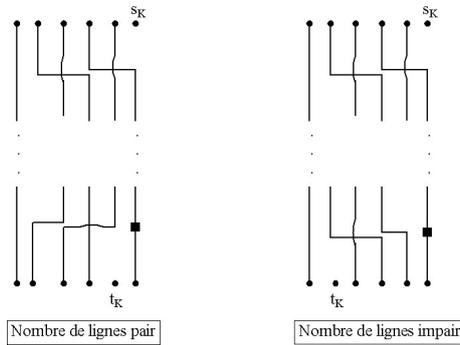


FIG. 22 – Forme globale des chemins disjoints en fonction de la parité de L .

Avant d’aller plus loin, remarquons dès à présent une propriété qui va nous être utile. D’après l’énoncé du théorème 2, si l’on considère une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$ dans laquelle un des quatre coins n’est pas un terminal, alors il existe $K = \text{card}(\mathcal{L})$ chemins disjoints si et seulement si $L \geq d$. Autrement dit, pour une liste \mathcal{L} fixée, il existe un routage des liaisons sur d lignes, mais pas sur $d - 1$. De la même façon, si l’on dispose de $d + 1$ lignes et que l’on supprime toute une ligne horizontale, ie que l’on retire tous ses sommets et arêtes, on a toujours à notre disposition d lignes, et donc on peut router les K liaisons suivant des chemins disjoints. La ligne que l’on a supprimée n’était donc pas absolument nécessaire au routage des liaisons : seules d lignes sont réellement “utiles”. Pour router sur $d + 1$ lignes, on peut par exemple construire un routage sur d lignes, puis prolonger chacun des chemins par une arête verticale. La $d + 1^{\text{e}}$ ligne est alors une ligne “libre”, en ce sens qu’aucune arête horizontale de cette ligne n’est occupée par un chemin, comme le montre la figure 23.

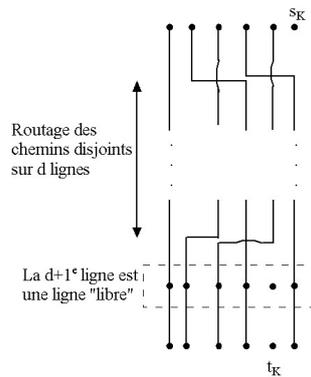


FIG. 23 – Routage des chemins disjoints sur $d+1$ lignes.

À présent que ces précisions ont été données, utilisons-les pour démontrer que $NbArêtesCoupe = K$. Nous allons d’abord travailler sur une grille vérifiant $L = d$. Nous verrons ensuite comment traiter le cas $L > d$.

Cas $L = d$

Soit $G - l_K$ la grille obtenue à partir de G en supprimant dans \mathcal{L} la liaison l_K : autrement dit, $G - l_K = (V, E, \mathcal{L} - \{(s_K, t_K)\})$.

Supposons que $G - l_K$ ait la même densité que G , soit d . Alors le nombre de lignes réellement “utiles” pour router les $K - 1$ liaisons de $G - l_K$ suivant des chemins disjoints est d : d’après la propriété 2, il est donc pair. D’après les remarques précédentes, on connaît donc la forme globale des chemins disjoints. D’autre part, comme le montrent les figures 22 et 23, le terminal t_K se trouve forcément au seul endroit où aucun des $K - 1$ chemins disjoints n’aboutit.

En partant de s_K et en descendant le long de la K^e colonne, qui, comme nous l’avons montré, n’est pas coupée, on peut arriver au sommet marqué d’un gros carré noir dans la figure 22, sans avoir rencontré d’arête coupée. À partir de ce sommet, on peut se rendre à t_K en utilisant uniquement des arêtes horizontales n’appartenant à aucun des $K - 1$ chemins disjoints (en effet, toutes les arêtes horizontales de la d^e ligne situées à droite de t_K n’appartiennent à aucun chemin) : d’après ce que nous avons montré plus haut, aucune de ces arêtes n’est coupée. Ce qui implique que l’on vient de tracer un chemin allant de s_K à t_K sans rencontrer aucune arête coupée. La figure 24 montre un tel chemin (en gras).

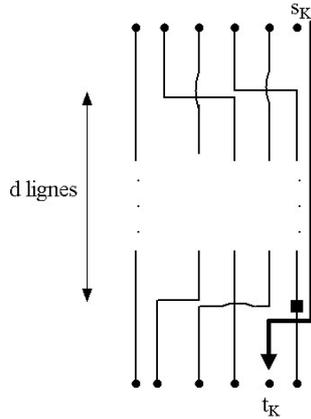


FIG. 24 – Chemin de s_K à t_K non coupé lorsque la densité de $G - l_K$ vaut d .

On obtient ici une contradiction avec l’hypothèse selon laquelle on avait construit une coupe avec $K - 1$ arêtes.

4.2.2 Cas où le nombre de lignes est strictement inférieur à la densité de la grille

Tout d'abord, remarquons que, lorsque $NbMaxCDA = K'$, on a un flot de valeur K' , donc $NbArêtesCoupe = K = K'$. Intéressons-nous alors au cas où $NbMaxCDA = K' - 1$.

En fait, pour étudier ce cas, nous allons nous ramener, en partant d'une grille vérifiant $L \leq d - 1$ et $NbMaxCDA = K' - 1$, à l'étude d'une grille vérifiant $L \geq d$, pour pouvoir utiliser les résultats démontrés dans ce cas. Pour cela, nous allons mettre en évidence un certain nombre de propriétés vérifiées par les graphes tels que $NbMaxCDA = K' - 1$.

Soit donc une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$ vérifiant $NbMaxCDA = K' - 1$ et $L \leq d - 1$. On applique le programme (*PLC*) à G pour obtenir un graphe ayant moins de liaisons et dont la densité est inférieure ou égale au nombre de lignes de G . On note G^- un tel graphe. Autrement dit, si on note d' la densité de G^- , G^- est obtenu à partir de G en supprimant un nombre minimum de liaisons de telle façon que $d' \leq L$. Alors, d'après la proposition 3, comme le graphe G (et donc le graphe G^-) vérifie $NbMaxCDA = K' - 1 < K$, G^- est tel que (H_i étant défini dans la section 4.1.2) :

- Tous les sommets des deux bords horizontaux de H_1 sont des terminaux ;
- Tous les sommets des deux bords horizontaux de H_{n_2} sont des terminaux ;
- Pour tout $i \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$ au plus un des sommets de chaque bord horizontal de H_i n'est pas un terminal.

Donc, dans G^- , pour tout $i \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$, soit tous les sommets de chaque bord horizontal de H_i sont des terminaux, soit exactement un sommet de chaque bord horizontal de H_i n'est pas un terminal, soit exactement un sommet d'un des deux bords horizontaux de H_i n'est pas un terminal.

Cependant, par un raisonnement assez simple sur la densité des bandes verticales saturées, on peut montrer que le dernier cas de figure est impossible.

En effet, supposons qu'il existe $i \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$ tel qu'un seul des sommets du bord supérieur (respectivement du bord inférieur) de H_i ne soit pas un terminal, et que tous les sommets du bord inférieur (respectivement du bord supérieur) de H_i soient des terminaux. Notons BVS_i^g et BVS_i^d les deux bandes verticales saturées (ie dont la densité vaut L) contiguës à H_i et situées respectivement à sa gauche et à sa droite. Supposons, sans perte de généralité, que le sommet non terminal situé sur le bord supérieur (respectivement inférieur) de H_i soit, dans G , la source s_d d'une liaison vers la droite.

Alors, dans G , cette liaison, (s_d, t_d) , traversait BVS_i^d , mais pas BVS_i^g . Remarquons d'ailleurs que cette liaison est la seule liaison enlevée qui traversait BVS_i^d et pas BVS_i^g , puisque seul un sommet du bord supérieur (respectivement inférieur) de H_i n'est pas un terminal et que tous les sommets de l'autre bord horizontal de H_i sont des terminaux. La figure 26 récapitule l'ensembles des hypothèses et notations.

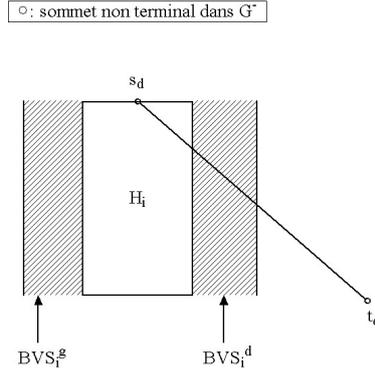


FIG. 26 – Une configuration impossible pour H_i .

Notons $\mathcal{L}(BVS_i^d)$ (respectivement $\mathcal{L}(BVS_i^g)$) l'ensemble des liaisons qui ont été enlevées dans G^- et qui traversaient BVS_i^d (respectivement BVS_i^g). D'après la configuration de G^- , on a $\mathcal{L}(BVS_i^g) = \mathcal{L}(BVS_i^d) - \{(s_d, t_d)\}$. Pour une bande verticale saturée dans G^- , on appelle densité initiale sa densité dans la grille G . On a alors :

- densité initiale de $BVS_i^d = \text{card}(\mathcal{L}(BVS_i^d)) + L$;
- densité initiale de $BVS_i^g = \text{card}(\mathcal{L}(BVS_i^g)) + L$.

D'où : densité initiale de $BVS_i^d = \text{densité initiale de } BVS_i^g + 1$.

Cette relation a pour conséquence principale que la densité initiale de BVS_i^d est de parité différente de celle de BVS_i^g . Or, ceci contredit la propriété 2 qui nous assure que ces deux quantités sont paires.

Finalement, G^- vérifie, pour tout $i \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$:

- Soit tous les sommets de chaque bord horizontal de H_i sont des terminaux ;
- Soit exactement un sommet de chaque bord horizontal de H_i n'est pas un terminal.

Pour tout $i \in \{2, \dots, n_2 - 1\}$ tel que exactement un sommet de chaque bord horizontal de H_i n'est pas un terminal, on note sup_i (respectivement inf_i) le sommet du bord supérieur (respectivement inférieur) de H_i qui n'est pas un terminal. On construit alors le graphe \hat{G}^- : il est obtenu en ajoutant à G^- les $K - K'$ liaisons "virtuelles" $\{(sup_i, inf_i)\}$. On obtient ainsi une grille dense de densité égale à L , puisqu'aucune des liaisons $\{(sup_i, inf_i)\}$ ajoutées ne traverse de bande verticale de densité L dans G^- . La figure 27 montre un exemple de graphe \hat{G}^- .

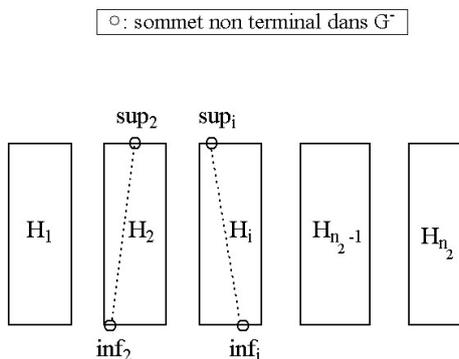


FIG. 27 – Un exemple de graphe \hat{G}^- .

Supposons que l'on puisse construire pour G une multicoûpe avec $K' - 1$ arêtes. On a alors également une multicoûpe pour G^- avec $K' - 1$ arêtes. On considère ensuite l'ensemble d'arêtes constitué de l'union de cette multicoûpe et de l'ensemble des $K - K'$ arêtes reliant les sommets respectifs $sup_1, sup_2, \dots, sup_{K-K'}$ au reste de la grille : cet ensemble de $(K - K') + (K' - 1) = K - 1$ arêtes constitue bien une multicoûpe pour \hat{G}^- . Or, comme \hat{G}^- vérifie $L \geq d$, la section 4.2.1 nous assure que c'est impossible : K arêtes sont en effet nécessaires pour obtenir une coupe dans \hat{G}^- . Donc, l'hypothèse selon laquelle on peut construire pour G une coupe avec $K' - 1$ arêtes est absurde.

En conclusion, lorsque $L \leq d - 1$, K' arêtes sont toujours nécessaires pour obtenir une coupe. Comme nous avons vu que cela est également vrai pour $L \geq d$, et que K' arêtes sont toujours suffisantes pour obtenir une coupe dans une grille, on a bien :

$$\text{Pour toute grille } G = (V, E, \mathcal{L}), \quad NbArêtesCoupe = K'$$

4.3 Étude des grilles à capacité uniforme

Les deux sections 4.1 et 4.2 nous ont permis de conclure que :

- Lorsque L , le nombre de lignes de la grille, est impair et strictement inférieur à la densité de la grille d , alors le problème de maximisation du nombre de chemins disjoints par les arêtes est polynomial, et la valeur de la solution est donnée par le programme linéaire en variables continues (*PLC*) ;
- Lorsque L est pair ou supérieur à d , alors le programme linéaire (*PLC*) peut donner une valeur supérieure de 1 unité à l'optimum. On a alors, dans le pire des cas, une solution approchée avec une erreur absolue de 1 ;
- La solution optimale du problème de multicoupe minimum est toujours donnée par (*DC*).

L'objectif de cette partie est de s'intéresser à ce qu'il se passe lorsque l'on passe d'une capacité partout unitaire à une capacité uniforme, mais pas nécessairement unitaire.

4.3.1 Problème de la multicoupe minimum

En fait, le problème de la multicoupe minimum varie très peu lorsque l'on passe d'une capacité partout unitaire à une capacité uniforme c . En effet, puisque toutes les arêtes ont le même poids, le problème revient toujours à obtenir une multicoupe avec le moins d'arêtes possible.

La solution optimale est donc exactement la même que dans le cas de capacités unitaires, et sa valeur est simplement multipliée par c (puisque le poids de chaque arête passe de 1 à c).

Il convient ici de faire une autre remarque : comme nous l'avons déjà vu, la démonstration de l'optimalité pour le problème de la multicoupe minimum de la solution donnée par (*PLC*) est une démonstration par l'absurde basée sur de longs raisonnements sur la forme des chemins disjoints par les arêtes dans les grilles. Nous avons, au terme de cette étude, l'intuition que ce résultat est en fait la conséquence directe du résultat suivant, que nous n'avons malheureusement pas encore réussi à démontrer.

Conjecture 1 *Dans une grille G à capacité uniforme c , la valeur optimale du problème de maximisation du multiflot continu est $K' \times c$.*

Si cette conjecture se révèle exacte, la multicoupe admissible de valeur $K' \times c$ fournie par le programme linéaire continu (*DC*) sera alors de toute

évidence optimale, puisque par application de la propriété 1 sur la dualité entre les relaxations linéaires de $(PL1)$ et $(PL2)$, aucune multicoupe de valeur strictement inférieure à $K' \times c$ ne pourrait exister.

4.3.2 Problèmes du multiflot entier maximum et du multiflot entier insécable maximum

Il convient d'abord de remarquer que, dans le cas où L , le nombre de lignes, est impair et strictement inférieur à d , une des remarques de la section 4.3.1 s'applique également au problème du multiflot entier maximum, insécable ou non : il existe alors une multicoupe dont la valeur est $c \times NbMaxCDA$. En routant c unités de flots sur chacun des chemins disjoints, on obtient donc un multiflot entier de même valeur qu'une multicoupe, et dans lequel le flot issu de chaque liaison n'est routé au plus que par un seul chemin. En procédant ainsi, on obtient donc une solution optimale à la fois pour le problème du multiflot entier maximum et pour le problème **FlotInsécable**.

Par contre, dans tous les autres cas (ie $L \geq d$ ou $L \leq d - 1$ et L pair), on n'est pas sûr que ce résultat reste vrai. La figure 13 montre d'ailleurs un exemple simple où il existe un saut de dualité entre $(PL1)$ et $(PL2)$, ie dans lequel la valeur du multiflot entier maximum, $K' - 1$, est strictement inférieure à celle de la multicoupe minimum, K' .

Néanmoins, on sait que la valeur du multiflot est toujours inférieure à $K' \times c$, et toujours supérieure à $(K' - 1) \times c$. En effet, $(K' - 1) \times c$ est la valeur *dans le pire des cas* du multiflot admissible obtenu en routant c unités de flots sur chacun des chemins disjoints, puisque leur nombre est au moins $K' - 1$.

On peut donc évaluer, pour le problème du multiflot maximum entier, la solution approchée construite de cette façon en calculant l'erreur relative maximum commise :

$$\rho = \frac{ValSolOpt - ValSolApp}{ValSolOpt} \leq \frac{K' \times c - (K' - 1) \times c}{K' \times c} \leq \frac{1}{K'}$$

Le raisonnement est le même pour le problème **FlotInsécable**, puisque la solution approchée que l'on a construite est aussi admissible pour ce problème.

Cependant, pour le problème **FlotInsécable**, il est possible que la solution exacte soit moins difficile à obtenir que dans le cas du multiflot entier maximum. La proposition 7 fournit un cas dans lequel le problème est polynomial.

Proposition 7 *Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$ à capacité uniforme c et telle que $L \geq d$. La valeur optimale du problème **FlotInsécable** est $(K - 1) \times c = NbMaxCDA \times c$.*

Preuve

On note f_k le flot issu de s_k , pour tout k . On distingue deux cas :

- Soit il existe une solution optimale dans laquelle $\forall k \in \{1, \dots, K\}$, $f_k > 0$, auquel cas il existe deux liaisons k_1 et k_2 qui partagent au moins une arête (car il n'existe que $K - 1$ chemins disjoints), et qui doivent alors vérifier $f_{k_1} + f_{k_2} \leq c$, ce qui implique

$$\sum_{j=1}^K f_j = \sum_{j \notin \{k_1, k_2\}} f_j + (f_{k_1} + f_{k_2}) \leq ((K - 2) \times c) + c \leq (K - 1) \times c$$

La solution de valeur $(K - 1) \times c$, obtenue en routant c unités de flot sur chacun des $K - 1$ chemins disjoints, est donc une des solutions optimales ;

- Soit pour toute solution optimale il existe une liaison l_k telle que f_k est nul, auquel cas

$$\sum_{j=1}^K f_j = \sum_{j \neq k} f_j \leq (K - 1) \times c$$

Toute solution optimale est alors de valeur inférieure ou égale à $(K - 1) \times c$, et la solution de valeur $(K - 1) \times c$ est donc encore une fois optimale.

Suite à ce résultat, notre étude nous a amenés à faire la conjecture suivante.

Conjecture 2 *Dans une grille G à capacité uniforme c , la valeur optimale du problème **FlotInsécable** est $NbMaxCDA \times c$, où $NbMaxCDA$ est le nombre maximum de chemins disjoints par les arêtes que l'on peut router dans G .*

Par contre, l'exemple de la figure 28 prouve que la conjecture 2 n'est pas vraie dans un graphe quelconque.

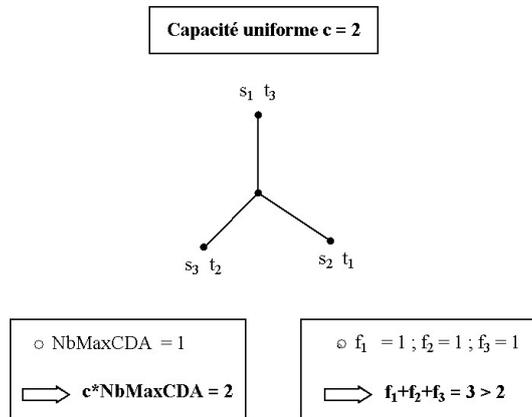


FIG. 28 – Exemple de graphe où $c \times NbMaxCDA$ n'est pas optimal pour le problème **FlotInsécable**.

Enfin, on pourrait alors se demander si la conjecture 2 ne serait pas également susceptible de s'appliquer au problème du multiflot entier maximum. Malheureusement, la figure 29 montre que ce résultat ne tient pas pour ce problème.

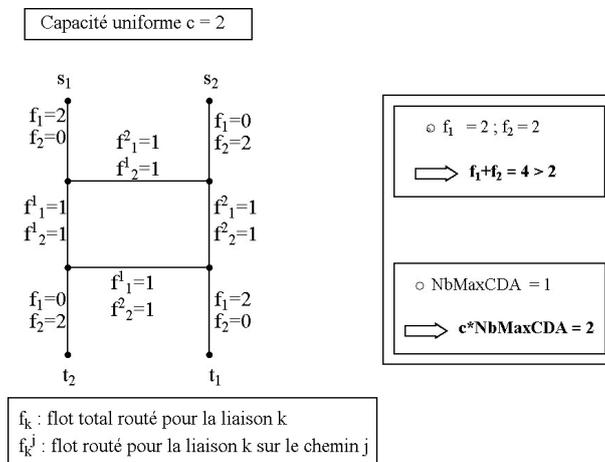


FIG. 29 – Exemple de grille où $c \times NbMaxCDA$ n'est pas optimal pour le problème du multiflot entier maximum.

5 Complexité du problème FlotInsécable dans les grilles

Nous nous intéressons, dans cette partie, à la complexité du problème **FlotInsécable** dans les grilles à capacités quelconques. Nous montrons, à l'aide de deux réductions polynomiales différentes, la proposition 8.

Proposition 8 *Le problème **FlotInsécable** est NP-difficile dans les grilles à capacités quelconques.*

5.1 Réduction à partir du problème PARTITION

Le problème NP-Complet **PARTITION** est défini comme suit :

Données : $n + 1$ entiers $(a_1, a_2, \dots, a_n, B)$ strictement positifs tels que

$$\sum_{i=1}^n a_i = 2B;$$

Question : Existe-t-il une partition en deux ensembles disjoints I_1 et I_2 tels que $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, n\}$ et $\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i = B$?

Soit \mathcal{P} une instance du problème **PARTITION**. Nous allons voir comment construire, à partir de \mathcal{P} , une instance \mathcal{F} du problème **FlotInsécable**.

Cas où n est pair : \mathcal{F} est la grille dense donnée dans la figure 30.

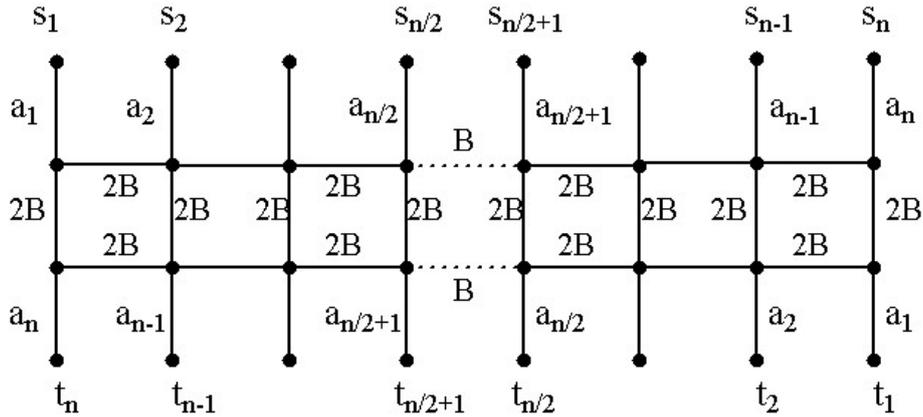


FIG. 30 – Instance \mathcal{F} pour n pair.

On peut remarquer que l'idée principale de cette réduction est que chacun des flots doit passer sur l'une des deux arêtes en pointillés. Ainsi, un flot sera routé soit "par le haut", soit "par le bas", selon qu'il passe par l'arête

5.2 Réduction à partir du problème PARTITION+

Le problème NP-Complet **PARTITION+** est défini comme suit :

Données : $n+2$ entiers $(a_1, a_2, \dots, a_n, B, l)$ tels que $B \geq l, \forall i \in \{1, \dots, n\}$
 $a_i \geq l$ et $\sum_{i=1}^n a_i = 2B$;

Question : Existe-t-il une partition en deux ensembles disjoints I_1 et I_2 tels que $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, n\}$ et $\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i = B$?

En fait, ce problème est NP-Complet car il se réduit trivialement du problème **PARTITION**. En partant d'une instance \mathcal{P} de **PARTITION** et en multipliant par l toutes les données, on obtient une instance \mathcal{P}^+ de **PARTITION+** qui est équivalente à \mathcal{P} .

Dans la suite, on prendra $l = 2$. Soit \mathcal{P}^+ une instance de **PARTITION+**. On construit alors l'instance \mathcal{F}^+ de **FlotInsécable** représentée dans la figure 32.

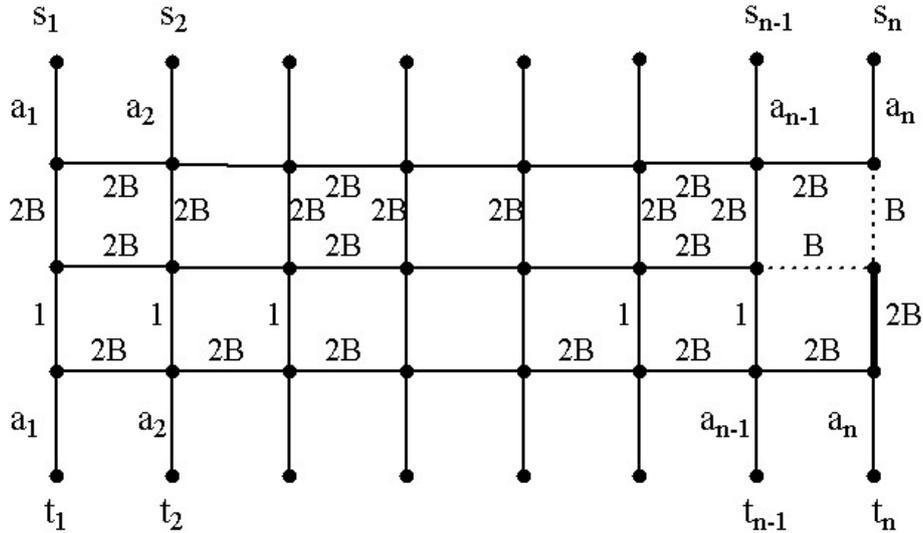


FIG. 32 – Instance \mathcal{F}^+ .

Encore une fois, l'idée de base de la réduction polynomiale est que, *dans une solution optimale*, chacun des flots doit passer sur l'une des deux arêtes en pointillés.

Montrons que :

Valeur Optimale(\mathcal{F}^+) = $2B \iff$ Il existe une partition en (I_1, I_2) .

Supposons qu'il existe une partition en deux ensembles (I_1, I_2) . Alors on fait passer tous les flots dont les indices sont dans I_1 par l'arête horizontale en pointillés, et le reste par l'arête verticale en pointillés. Chacune de ces deux arêtes est saturée, et le flot total routé a donc bien comme valeur $B + B = 2B$.

Réciproquement, si le flot total routé vaut $2B$, alors le flot routé pour chaque liaison k vaut a_k , et donc aucun des flots n'est routé par l'une des arêtes de capacité 1. En effet, chaque flot n'est routé que suivant un seul chemin et $\forall k \in \{1, \dots, K\} a_k > 1$. Ainsi, tous les flots passent par l'arête indiquée en gras et de capacité $2B$, qui est donc saturée. Par conséquent, chacune des deux arêtes en pointillés est également saturée, et en posant I_1 comme étant l'ensemble des indices des flots routés par l'arête horizontale en pointillés et I_2 comme étant l'ensemble des indices restant, on obtient une partition en (I_1, I_2) .

En conclusion, une solution pour \mathcal{F}^+ nous fournirait une solution pour \mathcal{P}^+ , et inversement. Ceci démontre donc également que, dans les grilles, le problème **FlotInsécable** est NP-difficile.

6 Conclusion

Au terme de cette étude, quelques résultats intéressants ont été mis en évidence. Concernant d'abord le problème consistant à calculer le nombre maximum de chemins disjoints par les arêtes que l'on peut router dans une grille, il a été démontré qu'il était polynomial dans le cas où le nombre de lignes est supérieur à la densité de la grille ou bien impair et strictement inférieur à la densité de la grille. Mais nous avons également vu que, dans ce dernier cas, la connaissance de la valeur d'une solution optimale n'est pas toujours suffisante pour nous permettre de construire une solution ayant cette valeur.

D'autre part, nous avons également vu que, lorsque le nombre de lignes est pair et strictement inférieur à la densité de la grille, on ne sait pas, pour l'instant, résoudre ce problème de façon polynomiale, et ce cas reste donc à éclaircir. Néanmoins, on sait déjà calculer une solution approchée pour ce cas, avec une erreur absolue de 1.

Cela nous a permis de garantir, dans le pire des cas, une solution approchée au problème de maximisation du multiflot entier dans les grilles à capacité uniforme.

Concernant ensuite le problème de la multicoupe minimum, les résultats obtenus sur les grilles à capacité unitaire et même uniforme sont encore plus intéressants : il a été démontré que le problème de la multicoupe dans les grilles à capacité uniforme est polynomial, puisqu'une solution optimale pour ce problème est obtenue en résolvant un programme linéaire en variables continues.

D'autre part, les résultats obtenus pour le problème du multiflot insécable entier maximum dans les grilles ont permis d'approcher les cas limites pour ce problème : il est en effet NP-difficile dans les grilles à capacités quelconques, et polynomial dans les grilles à capacité uniforme dont le nombre de lignes est impair ou supérieur à la densité de la grille, sous réserve que l'on soit capable de construire les chemins disjoints par les arêtes utilisés pour router le flot.

Néanmoins, les suites de cette étude peuvent être nombreuses et diverses. On aura bien évidemment remarqué que les problèmes de multicoupe minimum et de multiflots entiers maximum n'ont pas du tout été étudiés dans les grilles ayant des capacités *quelconques*. Il reste donc certainement, dans ce domaine, de nombreuses choses à faire.

Par ailleurs, si l'on continue de restreindre l'étude à des problèmes moins généraux, de nombreuses pistes lancées dans ce document restent à explorer. Tout d'abord, il serait très intéressant de parvenir à prouver, ou éventuellement à réfuter, les deux conjectures qui y sont développées. La première, qui fixerait la valeur du multiflot continu dans une grille uniforme, est intéressante car elle fournit un indice sur la limite entre les valeurs des

multicoups et celles des multiflots. La seconde, qui donnerait la valeur du multiflot insécable entier maximum dans une grille à capacité uniforme en fonction du nombre maximum de chemins disjoints que l'on peut y router, pourrait permettre d'affiner encore un peu plus l'étude des cas limites pour le problème du multiflot insécable entier maximum.

Il serait également utile de s'intéresser à la recherche d'une solution optimale pour le programme linéaire (*PLC*) : ce problème est polynomial, mais il serait sans doute résolu de façon bien plus efficace à l'aide d'un algorithme combinatoire polynomial. De même, il faudrait parvenir à adapter au cas général l'algorithme décrit par Frank dans [6] pour construire des chemins disjoints par les arêtes dans les grilles.

7 Bibliographie

Références

- [1] W.-T. Chan, F.Y.L. Chin et H.F. Ting. A faster algorithm for finding disjoint paths in grids. Proceedings of the 10th International Symposium on Algorithms and Computation *ISAAC'99* (1999). India. Springer-Verlag. 1741 : 393-402.
- [2] W.-T. Chan et F.Y.L. Chin. Efficient algorithms for finding the maximum number of disjoint paths in grids. *Journal of Algorithms* 34 (2000). Academic Press. 337-369.
- [3] M.-C. Costa, L. Létocart et F. Roupin. Minimal multicut and maximal integer multiflow : A survey. *À paraître dans EJOR*.
- [4] M.-C. Costa, L. Létocart et F. Roupin. A greedy algorithm for multicut and integral multiflow in rooted trees. *Operation Research Letters* vol. 31(1), (2003).
- [5] M. Formann, D. Wagner et F. Wagner. Routing through a dense channel with minimum total wire length. *Journal of Algorithms* 15 (1993). 267-283.
- [6] A. Frank. Disjoint paths in a rectilinear grid. *Combinatorica* 2 (1982). 361-371.
- [7] A. Frank. Packing Paths, Circuits and Cuts - A Survey. In B. Korte, L. Lovasz, H. J. Prömel et A. Schrijver. *Paths, Flows and VLSI-Layout*. Algorithms and combinatorics 9 (1990). Springer-Verlag. Berlin. 47-100.
- [8] N. Garg, V. V. Vazirani et M. Yannakakis. Primal-dual approximation algorithms for integral flow and multicut in trees. *Algorithmica* 18 (1997). 3-20.
- [9] M. Gondran et M. Minoux. *Graphes et algorithmes* (1995). Eyrolles. Paris.
- [10] M. Kaufmann et K. Mehlhorn. Routing Problems in Grid Graphs. In B. Korte, L. Lovasz, H. J. Prömel et A. Schrijver. *Paths, Flows and VLSI-Layout*. Algorithms and combinatorics 9 (1990). Springer-Verlag. Berlin. 165-184.
- [11] P. Kubat, A. Shulman, R. Vachani et J. Ward. Multicommodity flows in ring networks. *INFORMS Journal on Computing* Vol. 8, No. 3 (1996). 235-242.
- [12] L. Létocart. Problèmes de multicoûpe et multiflot en nombres entiers. Thèse de doctorat en informatique (2002). CEDRIC-CNAM.
- [13] M. Middendorf et F. Pfeiffer. On the complexity of the disjoint path problem. *Combinatorica* 13 (1993). 97-107.

- [14] A. Schrijver. Homotopic routing methods. In B. Korte, L. Lovasz, H. J. Prömel et A. Schrijver. *Paths, Flows and VLSI-Layout*. Algorithms and combinatorics 9 (1990). Springer-Verlag. Berlin. 329-371.
- [15] M. Zrikem. Optimisation du routage de câbles dans les installations de production d'électricité. Thèse de doctorat en informatique (2001). CEDRIC-CNAM.

8 Terminologie et notations

Cette section regroupe l'ensemble des plus importantes notations utilisées dans ce document. Soit une grille $G = (V, E, \mathcal{L})$, on note :

- T l'ensemble des terminaux de G ;
- $K = \text{card}(\mathcal{L})$ le nombre de liaisons de G ;
- L le nombre de lignes de G et C son nombre de colonnes ;
- d la densité de G ;
- l_k la liaison (s_k, t_k) ;
- b_j la j^{e} bande verticale ;
- H_G le graphe de demande associé à G (l'ensemble de ses sommets est T et l'ensemble de ses arêtes, E_{H_G} , est l'ensemble des liaisons de G) ;
- Pour un ensemble $X \subset V$ (respectivement $X \subset T$), $d_G(X)$ (respectivement $d_{H_G}(X)$) ou degré de X dans G (respectivement dans H_G), le nombre d'arêtes de E (respectivement de E_{H_G}) ayant exactement un sommet dans X et l'autre dans $V - X$ (respectivement un sommet dans X et l'autre dans $T - X$) ;
- Pour un ensemble $X \subset V$, $s(X)$ ou surplus de X la quantité $d_G(X) - d_{H_G}(X)$;
- Pour une bande verticale d'indice v (respectivement une bande horizontale d'indice h), $X_g(v)$ (respectivement $X_b(h)$) le sous-graphe de G situé à gauche de v (respectivement en-dessous de h) ;
- Pour une bande verticale d'indice v (respectivement une bande horizontale d'indice h), $\overline{G}_g(v)$ (respectivement $\overline{G}_b(h)$) le graphe obtenu à partir de $G_g(v)$ (respectivement de $G_b(h)$) en supprimant toutes les arêtes de E contenues dans les bandes horizontales (respectivement bandes verticales) saturées ;
- Pour une bande verticale d'indice v (respectivement une bande horizontale d'indice h), V_i^v (respectivement H_i^h) la i^{e} des n_1 (respectivement n_2) composantes connexes de $\overline{G}_g(v)$ (respectivement $\overline{G}_b(h)$) ;
- Pour une bande verticale d'indice v (respectivement une bande horizontale d'indice h), $CP_V(v)$ (respectivement $CP_H(h)$) ou congestion de parité de v (respectivement de h) le nombre de composantes connexes de $\overline{G}_g(v)$ (respectivement $\overline{G}_b(h)$) dont le degré dans $G + H_G$ est impair ;
- Pour une composante connexe H_i^h de $\overline{G}_b(h)$, $l(H_i^h)$ sa largeur (en nombre de colonnes) et K_i le nombre de liaisons ayant leurs puits dans H_i^h ;
- H_i le sous-graphe de G situé entre la $(i - 1)^{\text{e}}$ et la i^{e} bande verticale saturée ;

- G^- le graphe de densité d' obtenu à partir de G en supprimant un nombre minimum de liaisons de telle façon que $d' \leq L$;
- K' la valeur de la solution optimale du programme (PLC) (K' est le nombre de liaisons de G^-);
- $NbMaxCDA$ le nombre maximum de chemins disjoints par les arêtes que l'on peut router dans G ;
- $NbArêtesCoupe$ le nombre d'arêtes nécessaire et suffisant pour obtenir une coupe dans G .

9 Tableau récapitulatif des résultats

	Grilles à capacité unitaire			Grilles à capacité uniforme $c \geq 2$			Grilles à capacités quelconques
	$L \geq d$	$L \leq d-1$ et L impair	$L \leq d-1$ et L pair	$L \geq d$	$L \leq d-1$ et L impair	$L \leq d-1$ et L pair	
Multiflot entier maximum	Polynomial (Valeur optimale = $K-1$)	Polynomial (Valeur optimale = K) [*]	Approximation avec erreur absolue de 1	Approximation avec erreur relative de $1/K$	Polynomial (Valeur optimale = K^*c) [*]	Approximation avec erreur relative de $1/K'$?
Multicoupe minimum	Polynomial (Valeur optimale = K)	Polynomial (Valeur optimale = K')		Polynomial (Valeur optimale = K^*c)	Polynomial (Valeur optimale = K'^*c)		?
FlotInsecable	idem Multiflot entier maximum	idem Multiflot entier maximum	idem Multiflot entier maximum	Polynomial (Valeur optimale = $(K-1)^*c$)	Polynomial (Valeur optimale = K^*c) [*]	Approximation avec erreur relative de $1/K'$	NP-difficile

* sous réserve que l'on soit capable de construire les chemins disjoints par les arêtes utilisés pour router le flot.