Conservatoire National des Arts et Métiers
École SITI - Département Informatique

Année 2014–2015

UE RCP 110 (PLA)
Lien vers les sujets de TD en ligne :
`http://cedric.cnam.fr/~bentzc/Ressources.php`

# TD 1

## Exercice 1 : modélisation par la programmation linéaire

La compagnie TRUSCO s'est vue attribuer la tâche de préparer un portefeuille d'investissements pour une société industrielle. Les fonds disponibles représentent un montant de 250000 euros. L'analyste financier de la compagnie a retenu 6 possibilités d'investissements réparties dans l'industrie du pétrole, de l'électronique et pharmaceutique. Les diverses sociétés dans lesquelles on désire investir et les rendements anticipés sont présentés dans le tableau ci-après :

| **Sociétés** | **Secteur d'activités** | **Rendement anticipé (%)** |
|---|---|---|
| Simco | Pétrole | 9.35 |
| Plurimax | Pétrole | 8.00 |
| Microtel | Electronique | 10.90 |
| CAX | Electronique | 7.80 |
| Biomed | Pharmaceutique | 9.60 |
| Coranex | Pharmaceutique | 8.50 |

Les directives suivantes ont été émises :

1. Les investissements dans le secteur pharmaceutique devraient représenter au moins 30% des investissements dans le secteur électronique.
2. Aucun secteur d'activité ne devrait se voir allouer plus de 55% des fonds disponibles.
3. Bien que la société Microtel présente un rendement anticipé élevé, on veut limiter le montant investi dans cette société, à cause de son risque élevé, à 60% des investissements dans le secteur électronique.
4. On a demandé aussi à TRUSCO d'investir au moins 15000 euros dans l'industrie pétrolière.

L'objectif de l'analyste financier est de maximiser le rendement anticipé.

Formuler le modèle de programmation linéaire qui permettrait à l'analyste financier de lui suggérer une stratégie de placement tout en respectant les directives mentionnées.

## Exercice 2 : mise sous forme linéaire

Écrire le problème d'optimisation suivant comme un programme linéaire.

$$\begin{aligned} \min \quad & 3\max(-2x_1+3x_2, x_1-2x_2+4x_3, x_1+x_2+x_3) \\ \text{s.c.} \quad & 2x_1+x_3=12 \\ & -x_1+2x_2 \leq 5 \\ & |x_3| \leq 2 \\ & |x_1|+x_2 \leq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## Exercice 3 : modélisation et résolution graphique d'un programme linéaire

L'entreprise GENCO fabrique divers modèles d'appareils électroménagers. Suite à une réunion départementale de divers chefs de services de l'entreprise, il a été convenu d'examiner la possibilité de modifier le programme actuel de fabrication de ces grilles-pains, soit 600 unités de son modèle électronique (QL-500) et 200 unités de son modèle grille-pain/four (QL-700X). L'étape d'assemblage se fait essentiellement en deux phases et par la suite une vérification (contrôle exhaustif) est effectuée sur toutes les unités. Le tableau ci-dessous donne l'information concernant le nombre d'heures exigé pour fabriquer chaque modèle ainsi que les disponibilités en heures de chaque département.

| | **Modèles** | | |
|---|---|---|---|
| | **QL-500** | **QL-700X** | |
| **Départements** | **Nombre d'heures requises** | | **Heures disponibles** |
| Assemblage (Phase 1) | 3 | 4 | 4200 |
| Assemblage (Phase 2) | 1 | 3 | 2250 |
| Vérification | 2 | 2 | 2600 |

Etant donnée la situation du marché, l'entreprise ne veut pas fabriquer plus de 1100 unités du modèle QL-500. La contribution au bénéfice du modèle QL-500 est de 66 euros l'unité, alors que celle du QL-700X est de 84 euros. On veut déterminer le programme optimal de fabrication à mettre en œuvre, c'est-à-dire celui qui maximiserait les bénéfices.

1. Formuler le modèle de programmation linéaire correspondant.
2. Tracer le domaine admissible du PL.
3. Déterminer la solution optimale du PL.
4. Déterminer la nouvelle solution optimale du PL si on suppose que la contribution au bénéfice du modèle QL-500 est de 63 euros l'unité.

### Exercice 4 : mise sous forme standard

On ajoute la contrainte suivante au programme linéaire obtenu après linéarisation du problème d'optimisation de l'exercice 2 :

$$x_2 + x_3 \geq \frac{1}{2}$$

Mettre le programme linéaire obtenu sous forme standard.

### Exercice 5 : modélisation par la programmation linéaire

L'entreprise AGROMAX possède trois fermes de rendement comparable. On planifie actuellement la production agricole de la saison prochaine. La productivité de chaque ferme est limitée par le nombre de mètres carrés cultivables et par la quantité d'eau disponible pour l'irrigation. Ces restrictions sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

| **Ferme** | **Nb. de m$^2$ cultivables** ($\times 100$) | **Quantité d'eau disponible (en litres)** |
|---|---|---|
| 1 | 16000 | 6800 |
| 2 | 24000 | 9000 |
| 3 | 12000 | 4000 |

L'entreprise désire cultiver trois types de légumes. Le profit par $m^2$ et la consommation d'eau par m$^2$ sont différents pour chaque légume. De plus, on ne peut cultiver qu'un certain nombre de $m^2$ de chaque légume à cause d'un manque d'équipement agricole ou de main d'œuvre. Ces restrictions et l'information économique sont résumées dans le tableau ci-dessous :

| **Légume** | **Nb. de m$^2$ max.** ($\times 100$) | **Eau (en litres/$m^2$)** | **Profit par $m^2$ cultivé** |
|---|---|---|---|
| a | 28000 | 0.0056 | 0.10 euros |
| b | 32000 | 0.0045 | 0.075 euros |
| c | 12000 | 0.0034 | 0.025 euros |

L'entreprise AGROMAX désire toutefois conserver une charge de travail uniforme sur les trois fermes de sorte que la proportion de mètres carrés cultivés soit la même pour chaque ferme.

L'entreprise aimerait connaître le nombre de $m^2$ de chaque ferme qu'elle doit consacrer à chaque légume de façon à maximiser son profit. Formuler le modèle de programmation linéaire correspondant.

## Exercice 6 : modélisation par la programmation linéaire en variables entières

On doit établir l'emploi du temps du personnel d'une gare, de façon à satisfaire les besoins quotidiens minimaux donnés sur chaque intervalle de 4h par le tableau ci-dessous. La période de travail quotidienne de chaque agent dure huit heures consécutives, et peut commencer au début de chacun des intervalles de 4h indiqués dans le tableau. On cherche à déterminer le nombre minimum d'agents à affecter au total pour qu'il y en ait suffisamment pendant chaque intervalle de 4h.

Formuler d'abord ce problème sous la forme d'un PLNE. Puis, construire une solution “à la main”, par une méthode très simple, et en affectant d'abord le nombre minimum d'agents commençant à travailler à 6h, de façon à satisfaire intégralement les besoins du premier intervalle de 4h. Montrer ensuite que la solution obtenue est en réalité optimale.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intervalle de temps | 6 à 10 | 10 à 14 | 14 à 18 | 18 à 22 | 22 à 2 | 2 à 6 |
| Nombre minimum d'agents | 70 | 80 | 50 | 60 | 40 | 30 |

## Exercice 7 : modélisation et résolution graphique d'un programme linéaire

On désire déterminer la composition, à coût minimum, d'un aliment pour le bétail composé de maïs, de soja et d'herbe. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au plus 0.5% de calcium, au maximum 5% de fibres et au moins 30 % de protéines, pour se conformer au désir de la clientèle. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de calcium, de fibres et de protéines contenus, respectivement, dans le maïs et le soja, ainsi que le coût par tonne de chacun de ces ingrédients (on suppose que le prix de l'herbe est nul et que sa teneur en calcium, fibres et protéines est négligeable).

| **Ingr.** | **Calcium (en %)** | **Fibres (en %)** | **Protéines (en %)** | **Prix (par tonne)** |
|---|---|---|---|---|
| Maïs | 0.1% | 2% | 9% | 200 euros |
| Soja | 0.2% | 6% | 60% | 600 euros |
| % requis | $\leq$ 0.5% | $\leq$ 5% | $\geq$ 30% | |

Formuler le problème sous la forme d'un programme linéaire, le résoudre graphiquement et donner la composition optimale du mélange et son coût (simplifier le problème au maximum avant de le résoudre).

**Exercice 8 : résolution graphique de programmes linéaires**

1. Résoudre le PL suivant graphiquement :

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & \frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 10 \\ & -x_1 + 6x_2 \leq 100 \\ & x_2 \geq 5 \\ & x_2 \leq 25 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

2. Résoudre le PL suivant graphiquement :

$$\begin{array}{rl} \min & x_1 - x_2 \\ \text{s.c.} & \frac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 8 \\ & -x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ & x_1 \geq 8 \\ & x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

3. Résoudre le PL suivant graphiquement :

$$\begin{array}{rl} \min & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

   Et si on veut maximiser la fonction objectif ?

4. Résoudre le PL suivant graphiquement :

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

5. Résoudre le PL suivant graphiquement :

$$\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.c.} \quad & \frac{5}{4}x_1 + x_2 \leq 5 \\
& 7x_1 + 10x_2 \geq 70 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

6. Résoudre le PL suivant graphiquement :

$$\begin{aligned}
\min \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.c.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 1
\end{aligned}$$

   Et si on veut maximiser la fonction objectif ?

7. Résoudre le PL suivant graphiquement :

$$\begin{aligned}
\max \quad & -10x_1 + x_2 \\
\text{s.c.} \quad & 2x_1 - 3x_2 \leq 4 \\
& -x_1 + x_2 \leq -6 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\
& -5x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

   Modifier ensuite le coefficient de la variable $x_1$ dans la fonction de coût pour changer la solution optimale.