# Programmation dynamique

**RCP 104 - OPTIMISATION EN INFORMATIQUE**

Cédric BENTZ (CNAM)

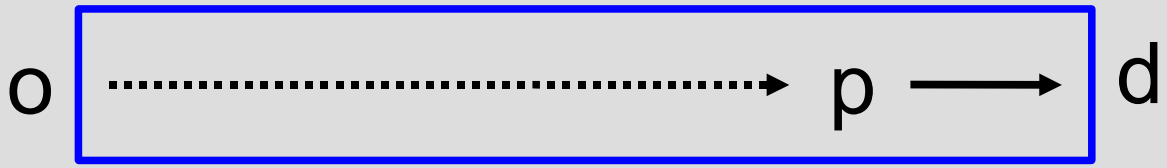
# Principe d'optimalité de Bellman

- Vérifié par de nombreux problèmes de RO
- *Enoncé* : si l'on parvient à identifier une partie d'une solution optimale pour une instance donnée d'un tel problème, alors le reste de cette solution doit être optimale sur le reste de l'instance.

R. Bellman (1920-1984)

# Principe d'optimalité de Bellman : l'exemple du plus court chemin

- Un exemple simple : plus court chemin élémentaire entre deux sommets o (origine) et d (destination)




$\mathbf{pcc_{o-->d}}$

- Si on sait identifier le prédécesseur p de d dans un tel chemin (noté $pcc_{o-->d}$), alors la partie de $pcc_{o-->d}$ reliant o à p est un plus court chemin de o à p !

# Principe d'optimalité de Bellman : mise en garde et vertus

- Tout problème de RO ne respecte pas ce principe !
- Respecter ce principe ne garantit pas nécessairement l'existence d'un algorithme efficace pour tous les cas...
- Montrer qu'un problème donné respecte ce principe est parfois complexe, et peut nécessiter une analyse très poussée de la structure de ses solutions optimales.
- Le respect de ce principe par un problème donné permet néanmoins, en général, de concevoir un algorithme pour ce problème basé sur la **programmation dynamique**.

# Qu'est-ce que la programmation dynamique ?

- L'idée générale d'un algorithme de programmation dynamique est de déterminer la valeur optimale d'une instance d'un problème à partir des valeurs optimales d'instances plus petites du même problème.

- Ces valeurs optimales sont liées entre elles par des **équations de récurrence**, permettant de les calculer en suivant un certain ordre.

- En général, un tel algorithme se compose donc :
  - D'une fonction récursive,
  - De cas terminaux pour la récursion (dont on sait facilement déterminer la valeur),
  - D'un cas permettant d'initialiser la récursion.

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (1/6)

- Rappel du problème du sac à dos :
  - Données : n objets, chacun muni d'un poids $p_i$ et d'une valeur $v_i$, et un poids maximum Pmax.
  - Problème : sélectionner un ensemble d'objets de valeur totale maximum et de poids total au plus Pmax.

- Quelques applications parmi d'autres :
  - Sélection de fichiers, chacun ayant un poids en Mo (par exemple, des MP3), sur un support limité en espace de stockage (par exemple, un lecteur MP3), de façon à maximiser un certain « bénéfice ».
  - Transport de marchandises (frêt), chacune munie d'un encombrement, dans un espace de stockage limité, en les choisissant de façon à maximiser le profit financier associé.

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (2/6)

- Rappel du PLNE modélisant le sac à dos :

  $\max \Sigma_i v_i x_i$

  $\Sigma_i p_i x_i \leq Pmax$

  $x_i \in \{0,1\}$ pour tout i

- Analyse du problème :
  - On considère les $i \leq n$ premiers objets,
  - On suppose que le poids maximum autorisé est $P \leq Pmax$,
  - Comment calculer la valeur optimale pour cette instance ?
    - Cas 1 : le ième objet est sélectionné dans une solution optimale (impossible si $p_i > P$), auquel cas le poids restant est $P-p_i$.
    - Cas 2 : le ième objet n'est pas sélectionné dans une sol. optim.

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (3/6)

- Fonction récursive :
  f(i,P) = valeur totale maximum d'un ensemble d'objets choisis parmi les i premiers, et de poids maximum P.

- Equations de récurrence (pour tout $i \geq 2$ et $P \geq 0$) :
  Si $p_i \leq P$ : $f(i,P) = \max(\underbrace{v_i+f(i-1,P-p_i)}_{\text{i choisi}}, \underbrace{f(i-1,P)}_{\text{i non choisi}})$

Preuve ?

1) Il existe deux solutions admissibles de valeur $v_i+f(i-1,P-p_i)$ et $f(i-1,P)$, donc $f(i,P) \geq \max(v_i+f(i-1,P-p_i), f(i-1,P))$

2) L'objet i est choisi ou non, donc $f(i,P) \leq f(i-1,P)$ OU $f(i,P) \leq v_i+f(i-1,P-p_i)$

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (4/6)

- Autres cas ?
  - Si $p_i > P$ (pour tout $i \geq 2$ et $P \geq 0$) : $f(i,P) = f(i-1,P)$
  - Pour tout $P \geq 0$ : $f(1,P) = 0$ si $p_1 > P$, et $f(1,P) = v_1$ sinon

  (cas terminal pour la récursion)

- Initialisation de la récurrence ?
  - Calcul de f(n,Pmax)

- Temps d'exécution ?
  - Problème : ne pas calculer plusieurs fois une même valeur !
  - Solution : stocker les valeurs déjà calculées dans un tableau, et transformer le calcul des valeurs d'une fonction récursive en calcul des valeurs d'un tableau.

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (5/6)

- Implémentation à l'aide d'un tableau t :
  - Pour tout i ≥ 1 et P ≥ 0, on note t[i][P] la case du tableau t où est stockée la valeur f(i,P).
  - Calcul de t[1][P] pour P ≥ 0 : O(1) étapes de calcul ==> O(Pmax) étapes en tout
  - Calcul de t[i][P] pour tous i>1 et P≥0 (en supposant t[i-1][P'] connu, pour chaque P' ≥ 0) : O(1) étapes de calcul ==> O(n*Pmax) étapes en tout
  - Donc temps d'exécution global = O(n*Pmax) étapes de calcul ==> algorithme efficace si Pmax pas trop grand

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | | | | | | | | |
| i=2 | | | | | | | | |
| i=1 | | | | | | | | |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | | | | | | | | |
| i=2 | | | | | | | | |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | | | | | | | | |
| i=2 | | | | | | | | |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | | | | | | | | |
| i=2 | 0 | | | | | | | |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | | | | | | | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | | | | | | | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | | | | |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | | | | | | | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | | | |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | | | | | | | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | | |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | | | | | | | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | | | | | | | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | 0 | | | | | | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | 0 | 18 | | | | | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | | | | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | | | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | | | | | | | | |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | 118 |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | 0 | | | | | | | |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | 118 |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | 0 | 18 | 18 | 55 | | | | |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | 118 |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | | | |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | 118 |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | | |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | 118 |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | 118 |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | 125 |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | 118 |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

# Illustration de la programmation dynamique : le sac à dos (6/6)

- Un exemple à quatre objets (n = 4 et Pmax = 7) :

| Objet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Poids | 5 | 3 | 1 | 4 |
| Valeur | 100 | 55 | 18 | 70 |

| | P=0 | P=1 | P=2 | P=3 | P=4 | P=5 | P=6 | P=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i=4 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | 125 |
| i=3 | 0 | 18 | 18 | 55 | 73 | 100 | 118 | 118 |
| i=2 | 0 | 0 | 0 | 55 | 55 | 100 | 100 | 100 |
| i=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 100 | 100 |

**==> VALEUR OPTIMALE = 125**

# Un 2ème algo. de programmation dynamique pour le sac à dos

- On peut aussi définir une autre fonction récursive :
  - g(i,V) = poids total min. d'un ensemble d'objets choisis parmi les i premiers, et de valeur ≥ V.
  - On a alors : $g(i,V) = \min(p_i + g(i-1,V-v_i), g(i-1,V))$ (pour tout i>1 et V tel que $v_i \leq V$)
  - Puis on calcule $\max\{V/g(n,V) \leq Pmax\}$ (où $V \leq \Sigma_i v_i$)
  - L'algorithme de programmation dynamique obtenu a un temps d'exécution en $O(n*\Sigma_i v_i)=O(n^2 \max_i v_i)$ ==> efficace si $v_i$ pas trop grand pour tout i

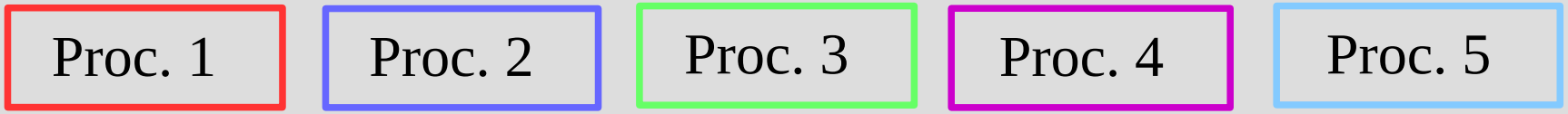
# Un problème d'affectation

- Soit à présent un problème d'affectation de tâches (plages horaires) à 1 agent (ou à 1 processeur)
- Pour chaque tâche, on connaît ses dates de début et de fin d'exécution
- Evidemment, deux tâches qui se « chevauchent » ne peuvent être exécutées par l'agent : elles sont **incompatibles** (elles sont compatibles sinon)
- A chaque tâche est associée un profit (financier ou non), et on souhaite donc choisir un ensemble de tâches compatibles de profit total maximum

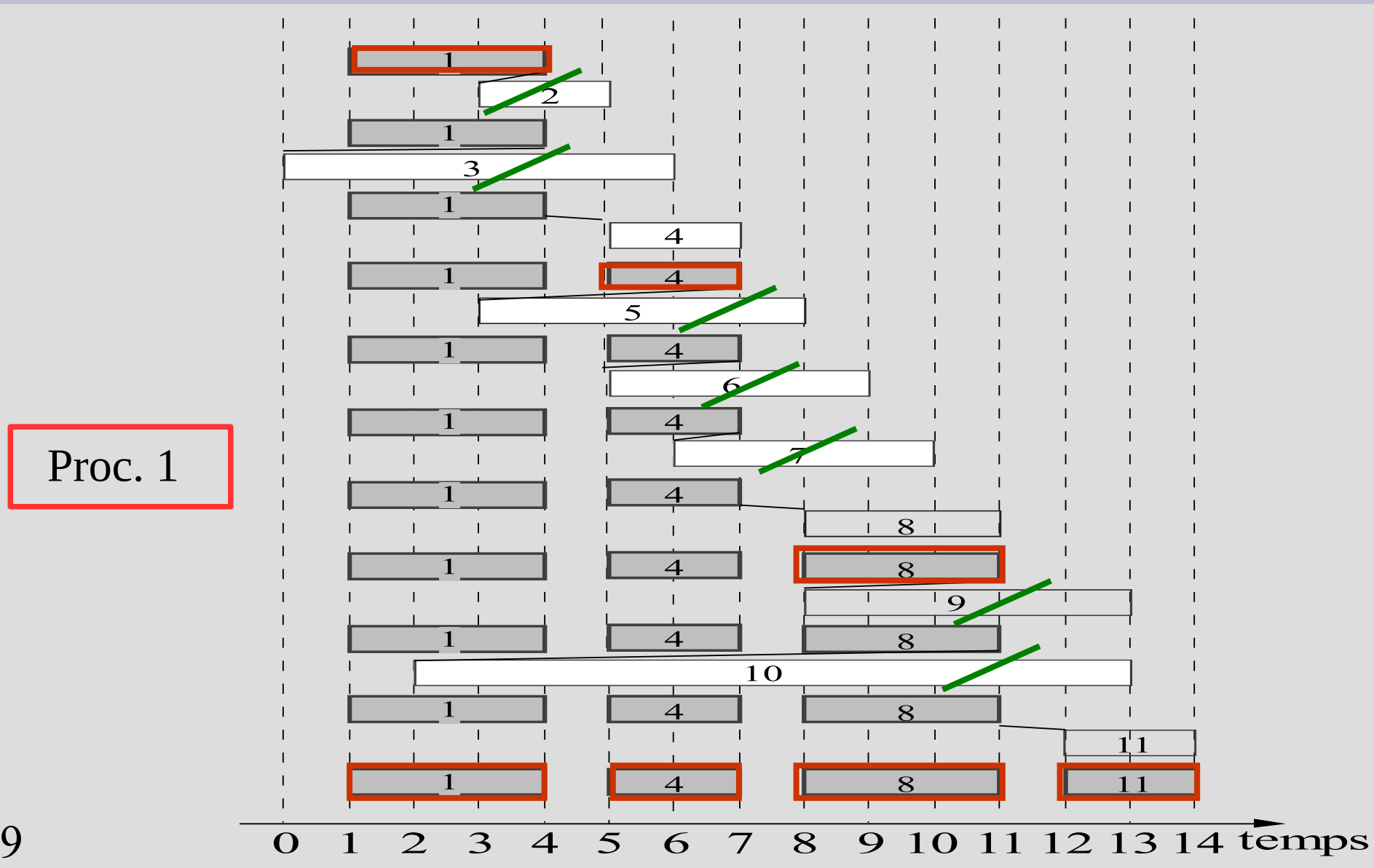
# Un exemple d'affectation de tâches à des processeurs

- Exemple avec 11 tâches ($d_i$ = début, $f_i$ = fin) :

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| di | 1 | 3 | 0 | 5 | 3 | 5 | 6 | 8 | 8 | 2 | 12 |
| fi | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |



# Un exemple d'affectation de tâches à UN processeur



# Comment résoudre ce problème d'affectation ?

- Dans le cas où toutes les tâches ont le même profit, il existe un algorithme glouton simple
- Dans le cas général, une stratégie de résolution consiste à utiliser la programmation dynamique
- On note n le nombre total de tâches, $p_i$ le profit de la ième tâche, pour i=1,...,n, et on numérote les tâches de 1 à n par ordre croissant des $f_i$
- Contrairement au sac à dos, on utilise un tableau à 1 seule dimension (fonction récursive à 1 variable)

# Programmation dynamique pour l'affectation de tâches à 1 proc.

- On définit h(i) = profit total maximum que peut générer un ensemble de tâches compatibles, si la dernière choisie dans cet ensemble est la ième

- On exprime la valeur de h(i) en fonction des valeurs des h(j) pour j<i, à l'aide de l'équation de récurrence suivante (qui est valide) :

$$h(i) = p_i + \max_{j<i \text{ tels que fin de } j \leq \text{début de } i} h(j)$$

(S'il n'y a aucun j tel que $f_j \leq d_i$, alors par convention on aura : $\max_{j<i \text{ tels que fin de } j \leq \text{début de } i} h(j) = 0$.)

# Temps d'exécution de l'algorithme

- La valeur optimale (initialisation) est alors obtenue en prenant le maximum sur tous les $i \leq n$ des $h(i)$

- Si le calcul des valeurs de h est implémenté à l'aide d'un tableau à 1 dimension (lors du calcul de h(i), les valeurs h(j) pour j<i sont déjà connues), on obtient les temps suivants :
  - Il y a O(n) valeurs h(i) à calculer,
  - Le calcul de chaque h(i) se fait en temps O(n),
  - Le temps d'exécution est donc $O(n^2)$, et ne dépend donc que du nombre de tâches (quadratiquement).

# Un exemple d'affectation de tâches à un processeur (rappel)

- Exemple avec 11 tâches ($d_i$ = début, $f_i$ = fin) :

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| di | 1 | 3 | 0 | 5 | 3 | 5 | 6 | 8 | 8 | 2 | 12 |
| fi | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |

# Exemple d'exécution avec ces 11 tâches si $p_i$=1 pour tout i

- Rappel : $h(i) = p_i + \max_{j<i \text{ tels que fin de } j \leq \text{début de } i} h(j)$
- h(1) = h(2) = h(3) = 1
- h(4) = 2 (avec h(1) ou h(2))
- h(5) = 1
- h(6) = 2 (avec h(1) ou h(2))
- h(7) = 2 (avec h(1), h(2) ou h(3))
- h(8) = h(9) = 3 (avec h(4))
- h(10) = 1
- **h(11) = 4** (avec h(8) ou h(9))

# Bilan sur la programmation dynamique

- Méthode précieuse de conception d'algorithmes
- Implémentation : récursivité vs tableaux
- De nombreux algorithmes, pour des problèmes très variés, peuvent être conçus ainsi :
  - Un algorithme en temps $O(n*2^n)$ pour le TSP,
  - Un algorithme efficace pour le problème de base en dimensionnement de lots,
  - Etc.