M2 MPRO

Optimisation dans les Graphes

Quelques notions, idées de preuves et théorèmes de base en optimisation dans les graphes

Théorie des graphes, optimisation dans les graphes, et paramètres de graphes

- Graphes = objets discrets :
  - Utiles pour représenter des structures discrètes rencontrées en pratique (réseaux télécoms, réseaux sociaux, réseaux de transport).
  - Nombreuses notions pertinentes associées : chemins, couplages, stables, flots, colorations, etc.
  - Théorie des graphes = étude des propriétés des graphes et des notions associées.
  - A chaque notion, un problème d'optimisation associé : valeur min ou max = valeur d'un *paramètre* du graphe considéré.
  - Ainsi, résoudre de nombreux problèmes réels = calculer des paramètres de graphes : itinéraires ou ordonnancement de projet sans ressources (chemins), emplois du temps (colorations), résistance aux pannes (k-connexité), affectation de tâches (couplages), débit (flots), plans de transport (flots avec coûts), etc.

Programme abordé (2 prochaines séances)

- Notions et théorèmes emblématiques :
  - Couplages : lemme de Berge, théorème de König-Egerváry (preuve constructive ou par l'absurde), théorème de Hall et conséquences.
  - Flots : théorème de Ford-Fulkerson (flot max/coupe min), via un algorithme de marquage (2 versions), et avec König(-Egerváry) comme corollaire.
  - Chemins disjoints par les arêtes/sommets et k-connexité : théorème de Menger, par réduction à Ford-Fulkerson.

PARTIE I :

Couplages, lemme de Berge, et théorèmes de König(-Egerváry) et de Hall

Couplages dans les graphes

- Couplage = ensemble d'arêtes sans extrémités communes
  - Paramètre : taille d'un couplage maximum (au plus la moitié du nombre de sommets).
  - Si M couplage : arête uv dans M ==> arête vw pas dans M, pour tout w dans N(v)\{u} (N(v) = *voisinage* de v).
  - Couplage *parfait* : tout sommet est *saturé*, c'est-à-dire incident à une arête du couplage (taille = moitié du nombre de sommets).
- Notion essentielle : *chaîne alternée* par rapport à un couplage M
  - Chaîne qui débute par une arête hors de M, et dont toutes les arêtes sont alternativement dans et hors de M.
  - Si l'extrémité initiale n'est pas saturée par M, inverser les arêtes (hors de M ==> dans M, et dans M ==> hors de M) sur une telle chaîne produit un autre couplage.

Chaînes augmentantes et lemme de Berge

- Chaîne *augmentante* par rapport à un couplage M
  - Chaîne alternée dont aucune des 2 extrémités n'est saturée par M.
  - Observation : inverser les arêtes sur une telle chaîne produit un autre couplage, plus grand (de 1).
- *Lemme de Berge* : couplage M maximum <==> il n'existe pas de chaîne augmentante par rapport à M.
  - Sens ==> : cf observation ci-dessus.
  - Sens <== : supposons M non maximum, et soit M* un couplage maximum (on a |M*|>|M|). Dans la différence symétrique de M et M*, il y a une chaîne augmentante par rapport à M (*pourquoi ?*).

Transversaux et théorème de König(-Egerváry) dans les graphes bipartis

- Transversal (« vertex cover » en anglais)
  - Ensemble de sommets couvrant toutes les arêtes.
  - On a : taille couplage maximum ≤ taille transversal minimum.
  - Pas d'égalité en général (cycle de taille 3).
- *Théorème de König* : dans tout graphe biparti $G = ((L,R),E)$, taille couplage maximum = taille transversal minimum.
  - Soit M un couplage maximum, U l'ensemble des sommets de L non saturés par M, et V' l'ensemble des sommets contenus dans les chaînes alternées par rapport à M ayant leurs extrémités initiales dans U. On a : $N(L \cap V') = R \cap V'$ (*pourquoi ?*).
  - Alors $(R \cap V') \cup (L \setminus (L \cap V'))$ est un transversal pour G, de taille $|M|$.

Théorème de König(-Egerváry) dans les graphes bipartis : preuve alternative (et non constructive)

- Observation : théorème de König « facile » si degré maximum 2.
- Preuve alternative du théorème de König (par l'absurde) :
  - Soit un contre-exemple *minimal* G, et soit u un sommet de degré > 2.
  - Soit v un voisin de u, et soit M un couplage maximum tel que v n'est pas saturé par M. (*Pourquoi M existe-t-il ?*)
  - Soit f une arête incidente à u mais pas à v, et qui n'est pas dans M. (*Pourquoi f existe-t-elle ?*)
  - Alors, tout transversal minimum pour G\{f} est un transversal pour G (*pourquoi ?*), de taille |M| (*pourquoi ?*) ==> contradiction.

Théorème de Hall et conséquences

- *Théorème de Hall* : dans un graphe biparti G=((L,R),E), il existe un couplage saturant tous les sommets de L <==> pour tout sous-ensemble L' de L, $|L'| \leq |N(L')|$.
  - Sens ==> : facile (*pourquoi ?*).
  - Sens <== : pas de couplage saturant L ==> il existe un transversal T de taille $|T \cap L| + |T \cap R| < |L|$ (*pourquoi ?*). On peut alors en déduire que $|L \setminus (T \cap L)| > |N(L \setminus (T \cap L))|$ (*pourquoi ?*).
- Conséquences :
  - CNS pour l'existence d'un couplage parfait quand $|L| = |R|$.
  - *Tout graphe biparti k-régulier admet k couplages parfaits disjoints*.
    - Car $k|L|=|E|=k|R|$, et $k|L'| \leq k|N(L')|$ pour tout sous-ensemble L' de L.

PARTIE II :

Flots, coupes, théorème de Ford-Fulkerson et algorithme associé (2 versions)

Flots dans les réseaux de transport

- *Réseau de transport :* graphe (orienté) $G=(V,A)$ avec une source s, un puits p, et une capacité (entière) capa(a) sur chaque arc a de A.
- *Flot :* fonction $f : A \rightarrow IR^+$, qui vérifie :
  - $f(a) \leq capa(a)$ pour chaque arc a (*contraintes de capacité*),
  - Conservation des valeurs de f en chaque nœud, sauf s et p (*contrainte de conservation du flot*).
- Intuitivement : f(a) = nombre unités de flot circulant sur l'arc a, toute unité de flot étant émise par la source et reçue par le puits.
- Valeur d'un flot f = nombre d'unités de flot émises par la source.

Coupes et flots

- *Coupe dans un réseau de transport :*
  - Coupe associée à un sous-ensemble V' de V (contenant s mais pas p) = ensemble des arcs de V' vers V\V'.
  - Capacité d'une telle coupe = somme des capacités des arcs concernés.
- Toute unité de flot doit traverser les arcs d'une coupe arbitraire :

  ==> Valeur de tout flot f ≤ capacité de toute coupe
- Vrai en particulier pour un flot maximum et une coupe minimum.
- Comment calculer (efficacement) un flot max. ? Une coupe min. ?
- Peut-il y avoir un écart (important) entre ces deux quantités ?

Algorithme de Ford-Fulkerson (marquage)

- Calcul d'un flot maximum et d'une coupe minimum
- Basé sur des règles de marquage des sommets
  - Choisir un flot initial f (nul ou non), puis répéter jusqu'à STOP : marquer la source s, et ensuite
  - Tant que c'est possible, marquer un sommet via une de ces 2 règles
    - (i) Arc (u,v) avec u marqué et f(u,v) < capa(u,v) ==> marquer v avec « + »
    - (ii) Arc (u,v) avec v marqué et f(u,v) > 0 ==> marquer u avec « - »
  - Si puits p non marqué, STOP ; sinon, on a une *chaîne améliorante*
- Chaîne améliorante = suite de sommets adjacents marqués de s à p
  - Quantité minimum qmin sur la chaîne = min sur arcs (u,v) de la chaîne (capa(u,v)-f(u,v) si (i), f(u,v) si (ii))
  - Mise à jour du flot f(u,v) := ? : f(u,v)+qmin si (i) ; f(u,v)-qmin si (ii)

Algorithme de Ford-Fulkerson (graphes d'écart)

- Chaque itération améliore le flot de qmin > 0 unités
- Coupe obtenue à la fin : entre V' = {sommets marqués} et V\V'
- Description alternative de cet algorithme, via les *graphes d'écart*
  - Graphe d'écart G(f) associé à un réseau de transport G et un flot f :
    - Mêmes sommets que G,
    - Arc (u,v) dans G ==> arc (u,v) étiqueté *capa(u,v)-f(u,v)* dans G(f) si f(u,v) < capa(u,v) ET/OU arc (v,u) étiqueté *f(u,v)* dans G(f) si f(u,v) > 0.
  - Marquages remplacés par la recherche d'un chemin de s à p dans G(f)
  - Mise à jour identique des flots, et coupe obtenue à la fin = celle entre les sommets accessibles à partir de s et les autres

Preuve d'optimalité de l'algorithme, et théorème de Ford-Fulkerson

En fait, flot et coupe calculés optimaux *car de même valeur*

==> *Théorème de Ford-Fulkerson* : valeur flot maximum (à valeurs entières) = capacité coupe minimum

- Preuve ?
  - Valeur de tout flot f = somme f(u,v) pour les arcs (u,v) avec u dans V' et v dans V\V' – somme f(u,v) pour les arcs (u,v) avec u dans V\V' et v dans V', pour tout V' avec une coupe associée (*pourquoi ?*)
  - Appliquer cette égalité au flot f obtenu à la fin de l'algorithme et à la coupe associée aux sommets marqués ==> CQFD (*pourquoi ?*)

Le théorème de König comme corollaire de celui de Ford-Fulkerson

- En fait, on peut prouver König à partir de Ford-Fulkerson :
  - Transformer le graphe biparti G = ((L,R),E) :
    - En ajoutant une source s reliée par un arc à tout sommet de L,
    - En ajoutant un puits p auquel tout sommet de R est relié par un arc,
    - En orientant les arêtes de E de L vers R,
    - En fixant la capacité des tous les arcs à 1.
  - Calculer un flot maximum et une coupe minimum dans ce graphe orienté, et utiliser Ford-Fulkerson ==> König (*pourquoi ?*).
- On peut même réinterpréter les chaînes augmentantes dans la preuve comme des chaînes améliorantes (*pourquoi ?*) !

PARTIE III :

Chemins disjoints par les arêtes/sommets, k-connexité, et théorème de Menger

Chemins disjoints et ensembles déconnectant

- *Chemins disjoints* entre 2 sommets x et y d'un graphe non orienté :
  - Disjoints par les sommets ==> seuls sommets communs = x et y,
  - Disjoints par les arêtes ==> aucune arête en commun.
- *Ensemble déconnectant* entre x et y :
  - Ensemble de sommets (différents de x et y) ou d'arêtes dont la suppression ne laisse aucun chemin entre x et y.
- Clairement, s'il existe k chemins disjoints entre 2 sommets, alors la taille d'un ensemble déconnectant entre x et y est au moins k.

k-connexité et théorème de Menger

- *k-connexité* (résistance aux pannes) :
  - Graphe k-arête-connexe ==> le rendre non connexe nécessite de supprimer au moins k arêtes,
  - Graphe k-sommet-connexe ==> le rendre non connexe nécessite de supprimer au moins k sommets,
  - Graphe 1-connexe mais pas 2-connexe ==> présence d'un *isthme* (version arêtes) ou d'un *sommet d'articulation* (version sommets).
- *Théorème de Menger* (forme générale) : un graphe est k-connexe <==> il existe k chemins disjoints entre toute paire de sommets.
  - Sens <== : facile (*pourquoi ?*).
  - Sens ==> : ? (s'il n'existe pas k chemins disjoints entre x et y, alors supprimer moins de k arêtes/sommets suffit à les déconnecter).

Preuve du théorème de Menger (sens ==>)

- Preuve de Menger utilisant le théorème de Ford-Fulkerson :
  - Orienter le graphe, en remplaçant chaque arête par un ensemble approprié de 5 arcs.
  - Si chemins disjoints par les sommets, remplacer chaque sommet v par 2 nouveaux sommets (l'un incident aux arcs entrant en v, l'autre incident aux arcs sortant de v), reliés par un arc.
  - Fixer la capacité de tous les arcs à 1.
  - Alors : nombre maximum de chemins disjoints (par les sommets ou les arêtes) de x à y = valeur d'un flot maximum de x à y, et taille minimum d'un ensemble déconnectant = capacité d'une coupe min.

La suite ?

- Preuves de *théorèmes* classiques sur des *paramètres* essentiels :
  - Basées sur des *notions purement combinatoires* (chaînes augmentantes/améliorantes, dénombrement, réduction entre problèmes, contre-exemple minimal...).

  ==> Lien entre l'optimisation dans les graphes et la programmation math. ? *Preuves alternatives basées sur la programmation linéaire*.

  ==> Autres notions fondamentales : *généralisation des couplages parfaits (r-facteurs pour r > 0), colorations*.