Introduction à la RO

Problèmes de flots dans les graphes

Cédric BENTZ (CNAM)

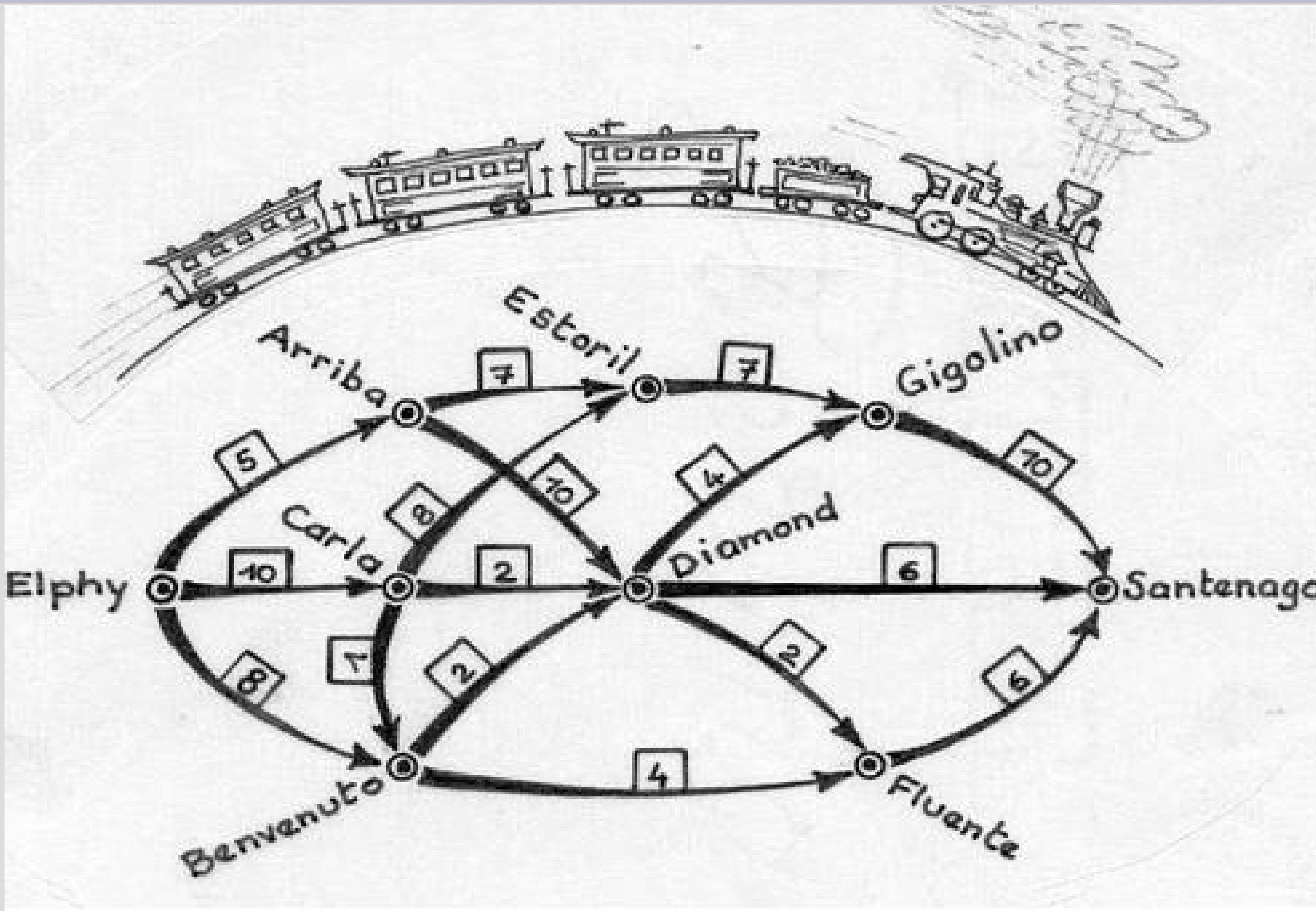
Christophe PICOULEAU (CNAM)

Capacité journalière d'un réseau ferroviaire (1/2)

- Sur le réseau ferroviaire, on a indiqué sur chaque tronçon entre 2 villes le nombre maximum de trains qui peuvent passer par jour dans le sens indiqué.
  - Aller de Elphy à Santenago prend moins d'un jour.
  - Chaque jour, il peut partir au plus 23 trains d'Elphy.
- Combien de ces trains, au maximum, peuvent parvenir dans la journée à Santenago ?

(D'après « La vie du rail », 1998.)

Capacité journalière d'un réseau ferroviaire (2/2)



Flot dans un graphe orienté

- Modèle :
  - Un graphe orienté représentant le réseau : un sommet par gare, un arc muni d'une **capacité** par tronçon
  - On part d'une origine (**source**) = Elphy, et on cherche à rallier une destination (**puits**) = Santenago
    - **Réseau de transport** : graphe avec source, puits, capacités
    - Quantité de trains circulant sur un tronçon donné = **flot** sur l'arc associé
    - Toute unité de flot (c'est-à-dire tout train) qui part d'Elphy doit parvenir à Santenago

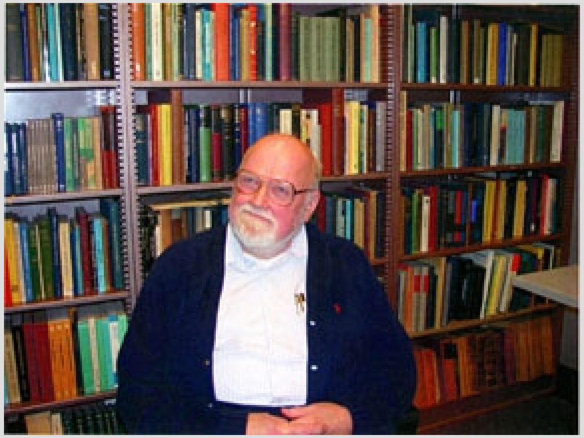
Formalisation du problème

- **Problème du flot maximum** :
  - **Maximiser le flot total** émis par la source (c'est-à-dire le nombre total de trains partant d'Elphy)
  - Tout train parvenant à une gare en repart
    - **Conservation du flot (en chaque sommet)**
  - On doit tenir compte des capacités des tronçons (le flot sur chaque tronçon est borné par sa capacité)
    - **Contraintes de capacité (sur les arcs)**

Est-ce simple de déterminer efficacement un flot maximum ?

- Un arc est **saturé** si son flot = sa capacité
- Notion de flot **complet**
  - Définition : flot dans lequel tout chemin entre la source et le puits contient au moins un arc saturé
    - Comment calculer un flot complet ?
    - Un flot maximum est-il nécessairement complet ?
    - Un flot complet est-il nécessairement maximum ?
  - Calculer un flot complet entre Elphy et Santenago. Quelle est sa valeur ? Peut-on l’améliorer ?

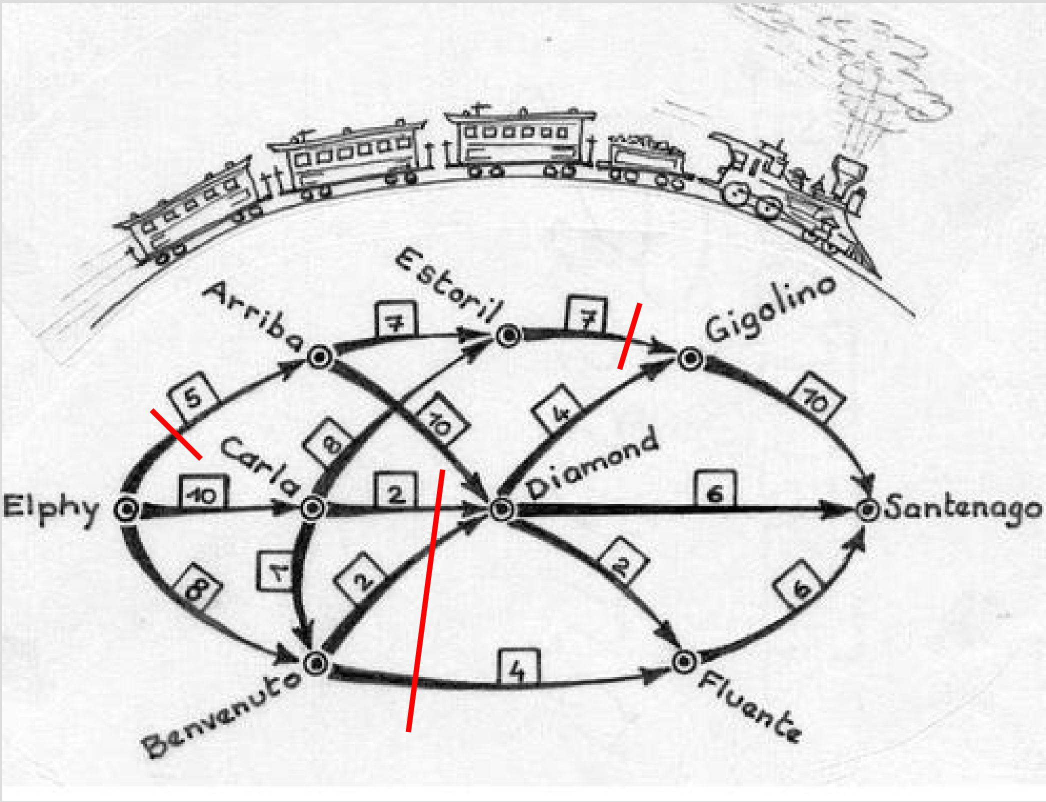
Méthode de Ford et Fulkerson



- Méthode de « marquage » de Ford & Fulkerson pour déterminer un flot maximum (1956)
- Description via la notion de **graphe d’écart**
- Etant donnés un réseau de transport R et un flot f, le graphe d’écart de R associé à f est tel que :
  - Même ensemble de sommets que R
  - Arc (i,j) dans R de flot nul ➔ arc (i,j) de même capacité
  - Arc (i,j) dans R saturé ➔ arc (j,i) de même capacité
  - Sinon, arc (i,j) dans R ➔ 2 arcs : arc (i,j) de capacité $capa_{ij}$-f_{ij}, et arc (j,i) de capacité f_{ij}
- On cherche ensuite un chemin entre la source et le puits dans ce graphe d’écart, et on modifie le flot le long de ce chemin en fonction des capacités

Notion de coupe dans un graphe

- **Coupe** dans un graphe = ensemble d'arcs dont la suppression ne laisse aucun chemin entre la source et le puits
  - **Valeur** de la coupe = somme des capacités de ses arcs (**20** ici)
  - **Support** de la coupe = sommets restant liés à la source
- Valeur flot ≤ valeur coupe
- Théorème de Ford-Fulkerson : valeur d'un flot maximum = valeur d'une coupe minimum



Questions & exercices (1/5)

1) Flot de valeur donnée
   - On veut savoir s’il est possible d’envoyer 18 trains par jour de Elphy à Santenago ➔ comment faire ?
2) Flot maximum dans ce graphe, mais *non orienté*
3) Sources et/ou destinations multiples
   - Comment modéliser et résoudre le problème si on a plusieurs origines et/ou destinations ?
     - Si Arriba et Elphy sont des origines (sources), et Gigolino et Santenago des destinations (puits) ?
     - Si Arriba, Benvenuto, Elphy, Gigolino et Santenago sont à la fois des origines (sources) et des destinations (puits) ?

Questions & exercices (2/5)

4) Contrôles entre deux gares données

- Par mesure de sécurité, chaque train est contrôlé à la fois au départ (Elphy) et à l'arrivée (Santenago)
- Par mesure de précaution, on souhaiterait aussi :
  - Pouvoir contrôler visuellement l'état de chaque train circulant entre Elphy et Santenago,
  - Au moins une fois durant son parcours,
  - A l'aide de caméras installées le long des tronçons.
- Comment faire en sorte d'installer le nombre minimum de caméras pour contrôler tous les trains ?

Questions & exercices (3/5)

5) Mise aux normes d'une voie

- On doit mettre aux normes une voie, et pour cela réaliser certains aménagements dessus, parmi plusieurs possibles (chaque aménagement a un coût connu)
- La non réalisation de certains aménagements génère une certaine pénalité à payer à l'Etat : plus précisément, chaque pénalité est associée à un aménagement ou à un ensemble d'aménagements, et si au moins l'un des aménagements de cet ensemble n'est pas réalisé, alors la pénalité est due
- Chaque aménagement peut participer à plusieurs pénalités : donc, elles seront toutes dues si l'aménagement n'est pas réalisé
- Comment décider quels aménagements réaliser, de façon à minimiser les dépenses qui en découlent (= la somme des coûts des investissements réalisés et des pénalités à payer à l'Etat) ?

Questions & exercices (4/5)

6) Un 2e problème de mise aux normes d'une voie

- On doit mettre aux normes une voie, et pour cela réaliser certains aménagements dessus, parmi plusieurs possibles
- Chaque aménagement a un coût connu, et la non réalisation de cet aménagement génère une certaine pénalité à payer à l'Etat
- De plus, pour chaque paire d'aménagements, si le premier est réalisé mais pas le second, alors on doit s'acquitter d'une pénalité supplémentaire envers l'Etat
- Comment décider quels aménagements réaliser, de façon à minimiser les dépenses qui en découlent (= la somme des coûts des investissements réalisés et des pénalités à payer à l'Etat) ?

Questions & exercices (5/5)

7) 2 trajets concurrents dans un graphe *non orienté*

- Trajet no 1 : Elphy (source) vers Santenago (puits)
- Trajet no 2 : Fluente (source) vers Benvenuto (puits)
  - Pour des raisons techniques, les prix d'installation ne sont pas uniformes : installer une caméra sur chaque tronçon coûte (en milliers d'euros) un prix correspondant à sa capacité (certaines capacités ayant été réévaluées)
  - Chaque train (quel que soit son trajet) doit être contrôlé par une caméra au moins une fois, et le tout à moindre coût
  - Liens avec la question 4) ?

Flot à coût minimum (1/2)

- Variante : un **coût unitaire** de circulation par arc
  - On veut alors acheminer le flot au puits à moindre coût
  - Modèle (graphe) : un réseau (graphe), un coût unitaire et une capacité par arc, une source s, un puits p
- Formalisation : problème du flot à coût minimum
  - Minimiser la somme totale des coûts des arcs
    - Coût d'un arc = quantité de flot sur l'arc fois son coût unitaire
  - Contraintes de capacité
  - Conservation du flot
  - Quantité de flot connue F à acheminer de s à p

Flot à coût minimum (2/2)

- Beaucoup de similitudes avec d'autres problèmes
  - Si F = valeur d'un flot maximum (cf algorithme de Ford & Fulkerson) : flot maximum à coût minimum
  - Si F = 1 ➔ ?
- Méthode de résolution similaire (graphes d'écart)
  - Algorithme de Busacker & Gowen
  - Chaque arc du graphe d'écart associé à un réseau de transport R et à un flot f a un coût (le coût unitaire de l'arc si celui-ci est dans R, et son opposé sinon)
  - On choisit alors, dans le graphe d'écart, un **plus court chemin** entre la source et le puits

Une première application des flots à coût minimum : le frêt ferroviaire (programmes de transport)

- Transport de marchandises (entrepôts vers clients)
  - Plusieurs entrepôts, plusieurs clients
  - Chaque entrepôt a une certaine quantité disponible
  - Chaque client a une certaine demande
  - Capacités de transport supposées suffisantes ici
  - Transporter des marchandises d'un entrepôt donné vers un client donné induit un coût unitaire fixe
- Comment satisfaire les demandes à moindre coût
  - Si quantité disponible totale = demande totale ?
  - Sinon ?

Une 2ème application des flots à coût minimum : l'affectation linéaire

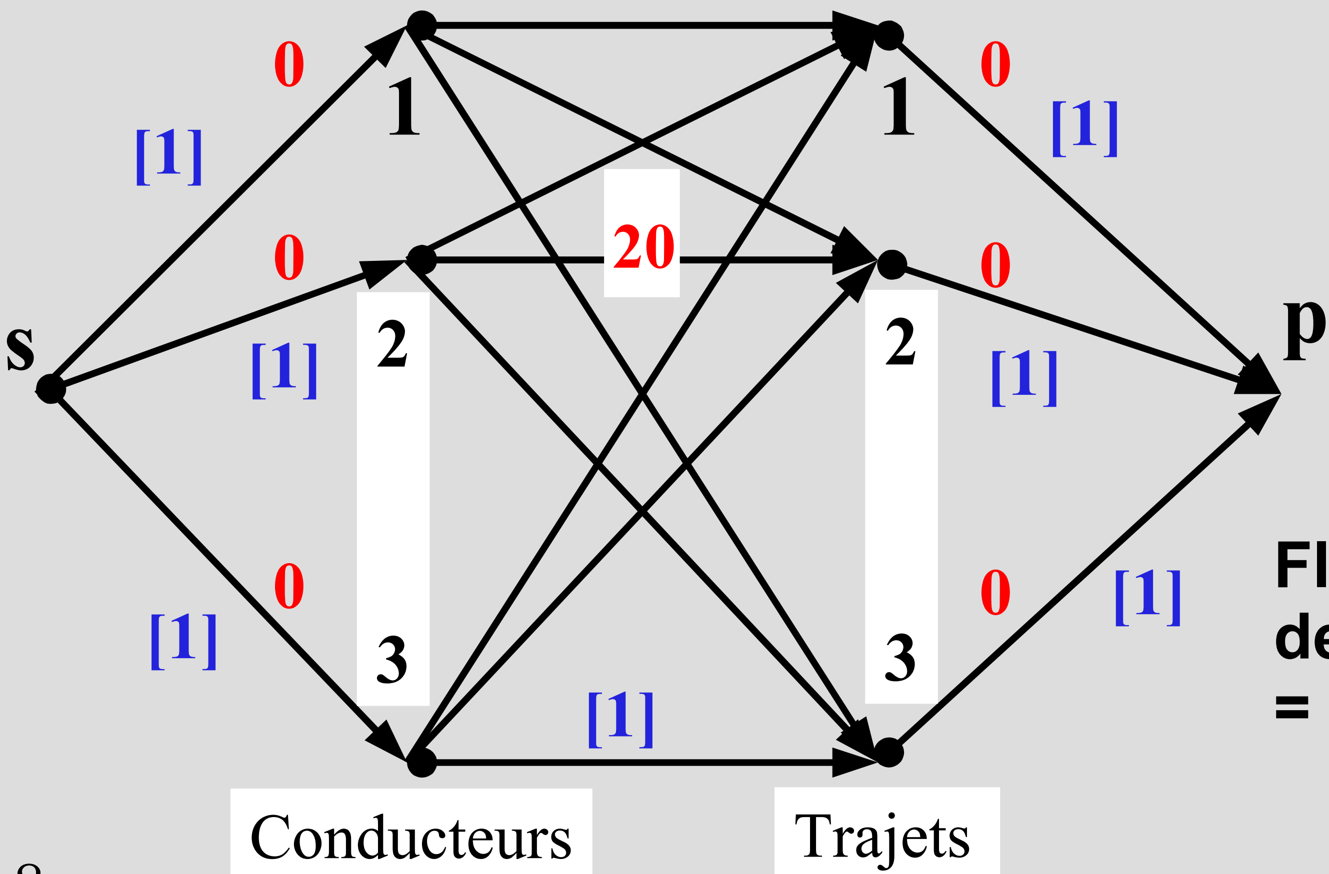
- **Contexte** : n conducteurs doivent être affectés à n trajets, de façon à minimiser la somme totale des temps de récupération associés, sachant qu'un conducteur a droit à un temps de récupération qui dépend du trajet effectué (selon l'âge du conducteur, l'horaire et la durée du trajet, mais également l'éloignement par rapport au domicile familial, ou même des conditions spécifiquement négociées)
- **Formalisation** : chaque couple (trajet, conducteur) est muni d'une valeur (temps), et 1 trajet=1 conducteur

	Trajet 1	Trajet 2	Trajet 3
1	10 min	15 min	40 min
2	5 min	20 min	1 heure
3	10 min	3 heures	3 heures

Conducteurs

Calcul d'une affectation linéaire à l'aide d'un flot à coût minimum

- Soit un problème d'affectation linéaire donné par une matrice à n lignes et n colonnes $T=(t_{ij})$



[capacité]
coût

Flot à coût minimum de valeur n (n=3) = affectation optimale !

Affectation en présence de ressources insuffisantes

- On modifie légèrement le problème précédent
  - Temps de récupération découlant de l'affectation de trajets à des conducteurs
  - En revanche, on suppose que certains conducteurs ne peuvent (ou ne veulent) pas effectuer certains trajets (ou leur nombre est < nombre de trajets à effectuer)
  - On veut affecter le nombre maximum de trajets à des conducteurs, tout en minimisant le temps total
    - **Couplage biparti maximum de coût minimum**
    - Flot maximum à coût minimum ? Dans quel graphe ?

Bilan

- Deux problèmes de base, servant de modèles :
  - Flot maximum,
  - Coupe minimum.
- Une variante : flot à coût minimum
- De nombreuses applications :
  - Contrôle des voies,
  - Choix d'aménagements,
  - Affectation linéaire (ressources suffisantes ou non),
  - Programmes de transport (frêt ferroviaire),
  - Etc.