Extensions

Clément Rambour

Plan

Cours précédents

- Estimation de la valeur par échantillonnage
- Deux grande familles d'approches :
  - MC : approximation de la valeur par moyenne des retour
  - TD : Minimisation de l'erreur de Bellman
- Contrôle : estimation de la fonction de valeur état-action
- Valeurs stockées dans la table Q

Cours précédents : Approches basées valeurs

- Approximation de la fonction de valeur par une fonction de paramètre $\boldsymbol{\theta}$:

$$Q(s,a) \simeq f_{\boldsymbol{\theta}}(s,a)$$

- Optimisation de $f_{\boldsymbol{\theta}}$ par descente de gradient
- Loss Meas Square Error
  - MC : par rapport au retour
  - TD : par rapport à la TD-target $\rightarrow$ Q-learning
- Deep Q Networks : $f_{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow$ réseau de neurones

Cours précédents : Policy gradient

Motivation :

- Plutôt que de passer par une fonction décrivant le potentiel de chaque état/action de l'agent, pourquoi ne pas apprendre directement la politique ?
- Politique donnée par une distribution paramétrée par $\boldsymbol{\theta}$: $\pi_{\boldsymbol{\theta}}(s, a)$
- Recherche de la politique π_θ paramétrée par θ.
- Optimisation d'une fonction objectif : $J(\theta)$
- **REINFORCE** $J(\theta) = v_{\pi_\theta}(s)$:

$$\theta = \underset{\theta}{\text{argmax}}\ v_{\pi_\theta}(s)$$

- **Actor Critique** Estimation de la valeur (Critique) et optimisation de la politique (Acteur)

optimisation de la valeur vs. optimisation de la politique

Avantages de l'optimisation de politique :

- Meilleure convergence
- Fonctionne en grande dimension ou si les actions sont continues
- Peut apprendre des politiques stochastiques

Désavantages :

- Converge vers un minimum local
- Grande variance

Aujourd'hui

1. Récapitulatif sur les approches Actor-Critique
2. Introduction aux approches basées modèles

Plan

Objectif

- Soit une trajectoire τ :

$$\tau = \{s_0, a_0, r_1, ..., s_{T-1}, a_{T-1}, r_T\}$$

- On note $R(\tau) = \sum_{t=0}^{T} r_t$ la somme des récompense.
- $T(\tau) = G_0$ pour $\gamma = 1$
- La fonction objectif est donc :

$$V(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_\theta}[\sum_{t=0}^{T} r_t] = \sum_{\tau} P(\tau;\theta)R(\tau)$$

  item $P(\tau;\theta)$: probabilité de la trajectoire τ en suivant π_θ

- Notre **fonction objectif** est donc :

$$\underset{\theta}{\text{argmax}} \; V(s;\theta) = \underset{\theta}{\text{argmax}} \; \sum_{\tau} P(\tau;\theta)R(\tau)$$

Gradient de la politique

- Notre **fonction objectif** est donc :

$$\underset{\theta}{\text{argmax}} \; V(s;\theta) = \underset{\theta}{\text{argmax}} \; \sum_{\tau} P(\tau;\theta) R(\tau)$$

- On applique l'astuce vue précédemment pour calculer le gradient :

$$\nabla_\theta V(s;\theta) = \sum_{\tau} P(\tau;\theta) \nabla_\theta \log P(\tau;\theta) R(\tau)$$

- Espérance approchée par une moyenne sur un batch de m trajectoires :

$$\nabla_\theta V(s;\theta) \simeq \hat{g} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} R(\tau_i) \sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t^{(i)} | s_t^{(i)})$$

- Pas besoin de la dynamique du modèle

Variance du gradient

- Problème : fonction objectif avec un potentiellement un **très grand nombre de paramètres**
- Conséquence : **grande variance** dans son estimation
- Comment réduire la variance dans l'estimation du gradient $\nabla_\theta V(s;\theta)$?

Variance du gradient

1. Structure temporelle → causalité :

$$\nabla_\theta V(\theta) = \mathbb{E}\Big[\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) G_t\Big]$$

2. Bootstrapping → TD
   - Mise à jour de la politique par montée de gradient → Acteur
   - Fonction de valeur Q apprise via TD (par exemple) → Critique

$$\nabla_\theta V(\theta) \simeq \mathbb{E}\Big[\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) Q(s_t, a_t)\Big]$$

3. Calibration de la somme des récomenses → Utilisation de l'avantage $Q(s,a) - V(s)$:

$$\nabla_\theta V(\theta) = \mathbb{E}\Big[\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) \underbrace{(Q(s_t, a_t) - V(s))}_{A(s_t, a_t)}\Big]$$

4. L'erreur TD est un bon estimateur de l'avantage :

$$A(s_t, a_t) \simeq \delta_{\pi_\theta} = r + \gamma V_{\pi_\theta}(s') - V_{\pi_\theta}(s)$$

Off-line Actor Critic : schéma général

Offline Batch TD Actor-Critic

Jusqu'à convergence, répéter :

1. Échantillonner $\{s_t^{(i)}, a_t^{(i)}\}$ une trajectoire suivant $\pi_\theta(a|s)$
2. Calculer $y_t^{(i)} = r_{t+1}^{(i)} + \gamma V_{\pi_\theta}(s_{t+1}^{(i)}; w)$
3. $w \leftarrow w - \lambda \nabla_w \sum_i \mathcal{L}(V_{\pi_\theta}(s_t^{(i)}; w), y_t^{(i)})$
4. Évaluer $A_{\pi_\theta}(s_t^{(i)}, a_t^{(i)}) = r_{t+1}^{(i)} + \gamma V_{\pi_\theta}(s_{t+1}^{(i)}; w) - V_{\pi_\theta}(s_t^{(i)}; w)$
5. $\nabla_\theta J(\theta) \simeq \sum_i \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t^{(i)}|s_t^{(i)}) A_{\pi_\theta}(s^{(i)}, a^{(i)})$
6. $\theta \leftarrow \theta + \alpha \nabla_\theta J(\theta)$

Online Actor Critic : schéma général

Online TD Actor-Critic Jusqu'à convergence, répéter :

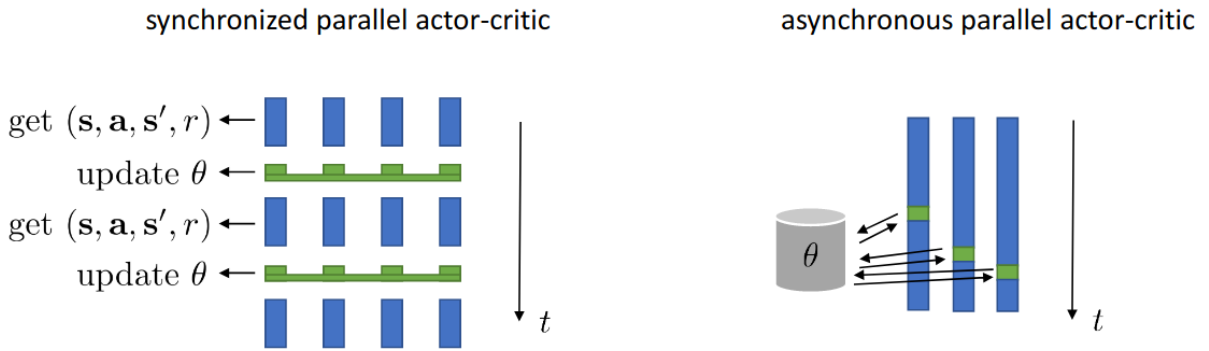
1. Prendre l'action $a_t \sim \pi_\theta(a_t|s_t)$ et observer la transition (s_t, a_t, s_{t+1})
2. Calculer $y_t = r_{t+1} + \gamma V_{\pi_\theta}(s_{t+1}; w)$
3. $w \leftarrow w - \lambda \nabla_w \mathcal{L}(V_{\pi_\theta}(s_t; w), y_t)$
4. Évaluer $A_{\pi_\theta}(s_t, a_t) = r_{t+1} + \gamma V_{\pi_\theta}(s_{t+1}; w) - V_{\pi_\theta}(s_t; w)$
5. $\nabla_\theta J(\theta) \simeq \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t|s_t) A_{\pi_\theta}(s, a)$
6. $\theta \leftarrow \theta + \alpha \nabla_\theta J(\theta)$

Online Actor Critic : schéma général

Online AC

1. Prendre l'action $a \sim \pi_\theta(a|s)$
2. *Fit* $V_{\pi_\theta}(s_t^{(i)}; w)$ vers la TD target
3. Évaluer $A_{\pi_\theta}(s_t^{(i)}, a_t^{(i)}) = r_{t+1}^{(i)} + \gamma V_{\pi_\theta}(s_{t+1}^{(i)}; w) - V_{\pi_\theta}(s_t^{(i)}; w)$
4. $\nabla_\theta J(\theta) \simeq \sum_i \nabla_\theta \log \pi_\theta(a_t^{(i)}|s_t^{(i)}) A_{\pi_\theta}(s^{(i)}, a^{(i)})$
5. $\theta \leftarrow \theta + \alpha \nabla_\theta J(\theta)$

Problème : batch de taille 1 $\Rightarrow$ grande corrélation entre les transitions



Soft Actor Critic

Constat :

- Les algorithmes vus jusqu'à présents convergent souvent vers une politique déterministe
- Particulièrement vrai pour SARSA ou Q-learning
- Également avec policy gradient... donc aussi avec AC
- Lorsqu'un chemin fait monter la somme des récompenses celui-ci est trop vite privilégié
- Problème : politique déterministe pas forcément optimale

Intuition : Encourager le modèle à continuer à explorer

Principe

Comment favoriser l'exploration ?

- Value based algorithms : $\epsilon - greedy \rightarrow$ au final converge vers déterministe
- Policy gradient : variance du gradient $\rightarrow$ non souhaitable

Ajout d'un terme opposée à la confiance du réseau : **l'entropie**

$$\mathcal{H}(\pi(.|s)) = -\mathbb{E}[\log \pi(.|s)]$$

Soft RL

On cherche la politique qui maximise la somme des récompense et d'entropie maximale :

$$J(\theta) = \mathbb{E}\big[\sum_{t=0}^{T-1} r_t\big] + \lambda \mathcal{H}(\pi(.|s_t))$$

Soft RL

On cherche la politique qui maximise la somme des récompense et d'entropie maximale :

$$J(\theta) = \mathbb{E}\big[\sum_{t=0}^{T-1} r_t\big] + \lambda \mathcal{H}(\pi(.|s_t))$$

- Modification de la récurrence de Bellman par ajout d'un terme d'entropie Q :

$$Q(s,a) \leftarrow \mathbb{E}[R_{t+1} + Q(S_{t+1}, A_{t+1}|S_t = s, A_t = a) - \lambda \log \pi(A_{t+1}|S_{t+1})]$$

- Mise à jour de la politique par minimisation de la KL-divergence :

$$\pi \leftarrow \text{argmin } D_{KL}(\pi||\exp Q(s,.)/Z)$$

- cf. TP

Soft Actor Critic

- De nombreuses versions dans la littératures
- Dernière en date : pas d'utilisation de la fonction de valeur
- Peut être utilisée comme A2C vu précédement : avec Q **et** V, avec A...

Plan

Model based

Et si on **connaît** le modèle *ie.* les transitions entre états ?

- Connu dans de nombreux cas : jeux, systèmes physiques simples, simulations
- Utilisation d'un modèle : plus d'information sur les états suivants
- Possibilité de simuler l'environnement
- Combinaison avec les approches non basées modèles possible

→ Connaître le modèle rend la vie plus simple

Écriture du problème basé modèle

Notation issues de communautés proches mais différentes : contrôle optimal, contrôle de trajectoire, planification

- c : Coût / rôle inverse de r la récompense
- f : fonction de transition

Formulation :

$$a_1, ..., a_T = \underset{a_1,...,a_T}{\text{argmin}} \sum_{t=1}^{T} c(s_t, a_t) \text{ tel que } s_t = f(s_{t-1}, a_{t-1})$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1, ..., a_T = \underset{a_1,...,a_T}{\text{argmax}} \sum_{t=1}^{T} r(s_t, a_t) \text{ tel que } s_t = f(s_{t-1}, a_{t-1})$$

Plan

Random shooting methods

Optimisation de la fonction objectif J par tirage aléatoire

$$(a_1, ..., a_T) = \boldsymbol{A} = \underset{\boldsymbol{A}}{\text{argmax}}\ J(\boldsymbol{A})$$

Deux étapes :

1. Tirer $\boldsymbol{A}_1, ..., \boldsymbol{A}_N \sim \mathcal{U}$
2. Choisir $\boldsymbol{A}_i = \underset{j}{\text{argmax}}\ J(\boldsymbol{A}_j)$

Cross-Entropy Methods

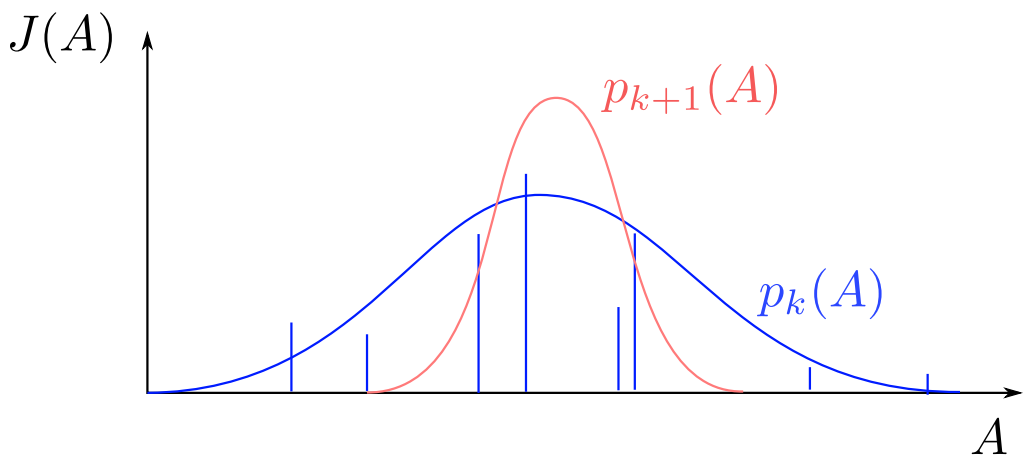
Restriction des échantillons aux actions les plus prometteuses

Initialisation $p(A) = \mathcal{U} ou \mathcal{N}$

repeat

1. Tirer $\boldsymbol{A}_1, ..., \boldsymbol{A}_N \sim p(A)$
2. Évaluer $J(A_1), ..., J(A_N)$
3. Prendre les M meilleures trajectoires
4. Raffiner $p(A)$ tel que $\boldsymbol{A}_1, ..., \boldsymbol{A}_M \sim p(A)$

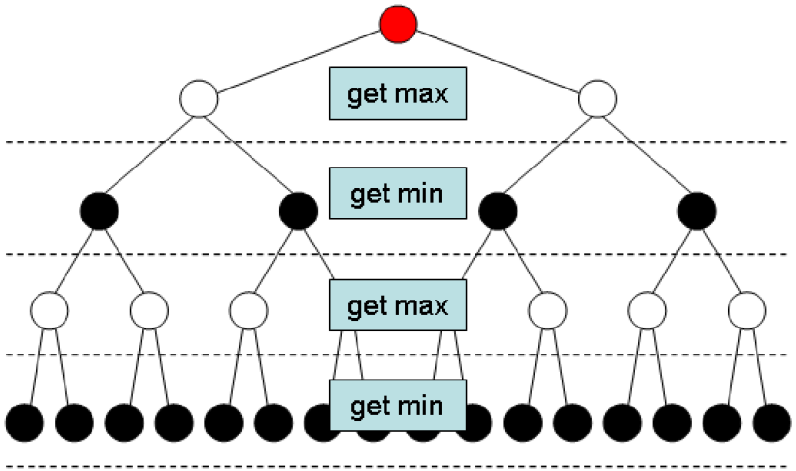
until convergence;



Plan

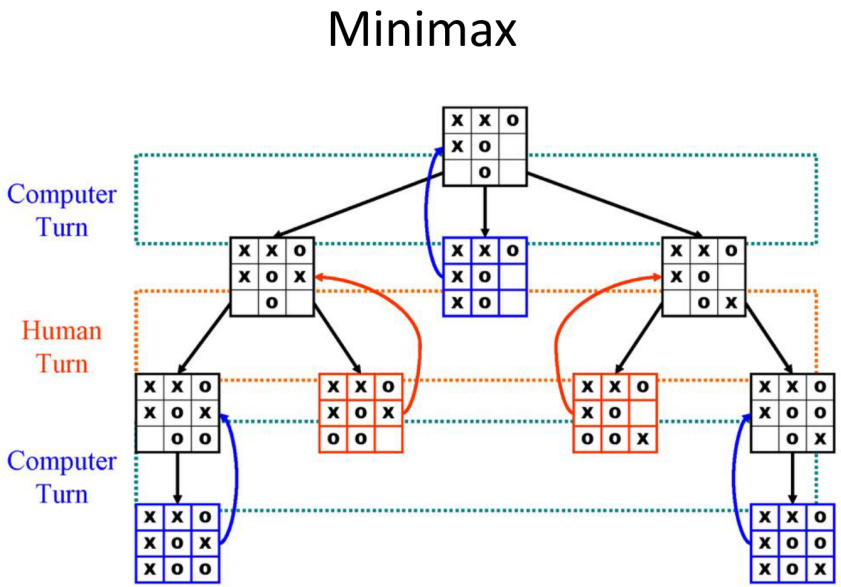
MiniMax Tree

Dans le cas d'un environnement discret, on peut modéliser l'arbre de décision



MiniMax Tree

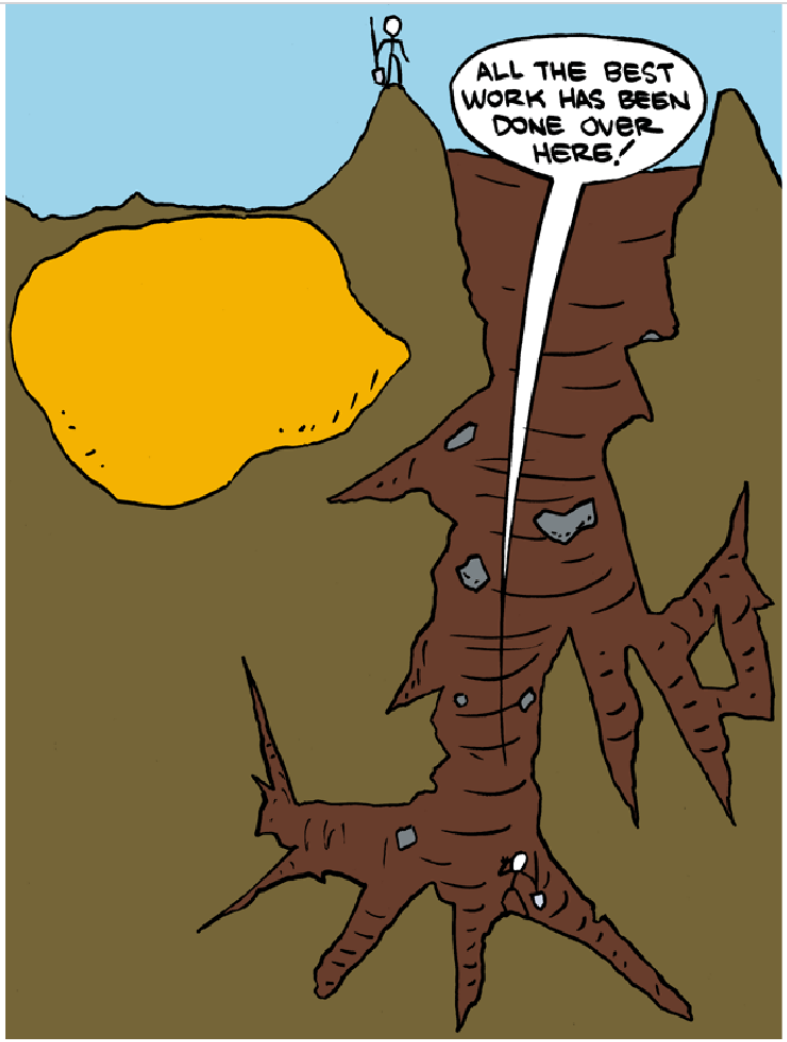
Dans le cas d'un environnement discret, on peut modéliser l'arbre de décision



Monte Carlo Tree Search

Dans le cas d'un environnement discret, on peut modéliser l'arbre de décision

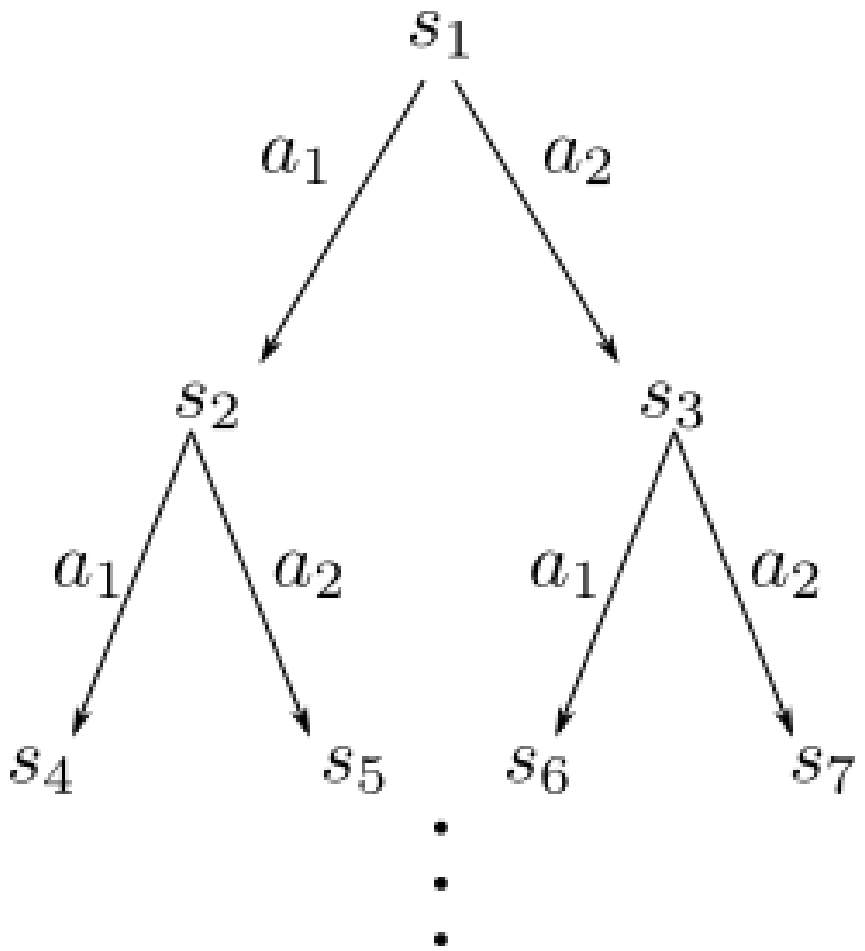
- L'arbre est souvent trop grand pour être parcouru en entier...
- ... en particulier si l'environnement est stochastique
- On peut approcher la valeur des états par échantillonnage



Monte Carlo Tree Search

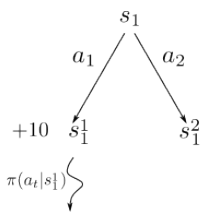
Dans le cas d'un environnement discret, on peut modéliser l'arbre de décision

- L'arbre est souvent trop grand pour être parcouru en entier...
- ... en particulier si l'environnement est stochastique
- On peut approcher la valeur des états par échantillonnage



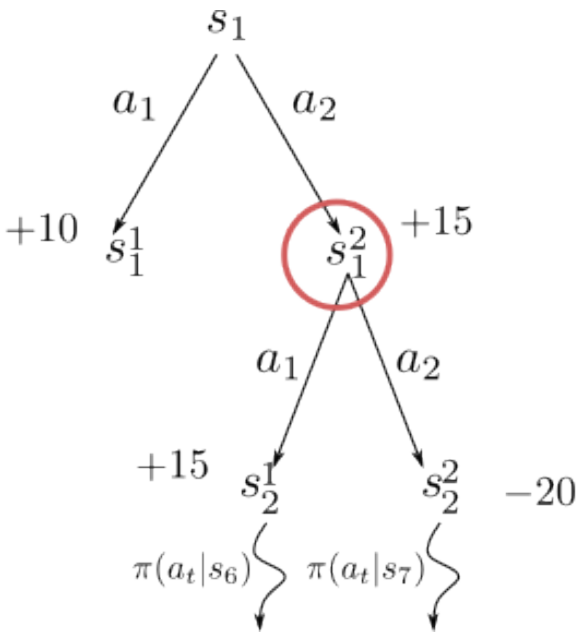
Monte Carlo Tree Search

Comment parcourir l'arbre ?
On préfère les noeuds non visités puis ceux de plus grande valeur



Monte Carlo Tree Search

Comment parcourir l'arbre ?
On préfère les noeuds non visités puis ceux de plus grande valeur



Monte Carlo Tree Search

generic MCTS sketch

1. find a leaf s_l using TreePolicy(s_1)
2. evaluate the leaf using DefaultPolicy(s_l)
3. update all values in tree between s_1 and s_l

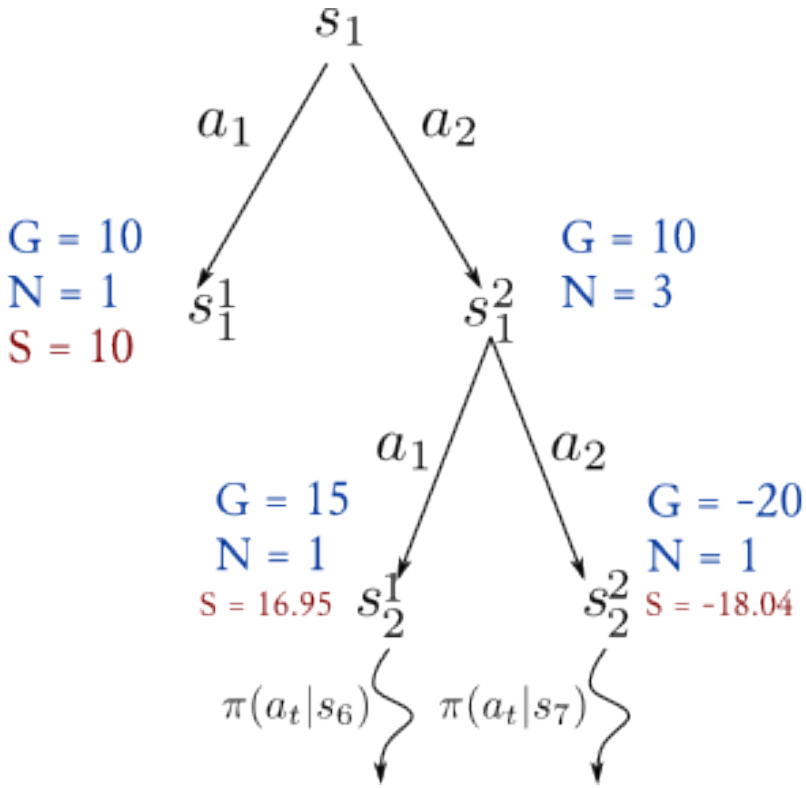
take best action from s_1

UCT TreePolicy(s_t)

if s_t not fully expanded, choose new a_t

else choose child with best Score(s_{t+1})

$$\text{Score}(s_t) = \frac{G(s_t)}{N(s_t)} + 2C\sqrt{\frac{2\ln N(s_{t-1})}{N(s_t)}}$$



Plan

Optimisation de trajectoire

model-based reinforcement learning version 1.5:

1. run base policy $\pi_0(\mathbf{a}_t|\mathbf{s}_t)$ (e.g., random policy) to collect $\mathcal{D} = \{(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}')_i\}$
2. learn dynamics model $f(\mathbf{s}, \mathbf{a})$ to minimize $\sum_i \|f(\mathbf{s}_i, \mathbf{a}_i) - \mathbf{s}'_i\|^2$
3. plan through $f(\mathbf{s}, \mathbf{a})$ to choose actions
4. execute the first planned action, observe resulting state $\mathbf{s}'$ (MPC)
5. append $(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}')$ to dataset $\mathcal{D}$

Optimisation de trajectoire

On cherche à résoudre :

$$a_1, ..., a_T = \underset{a_1,...,a_T}{\text{argmin}} \sum_{t=1}^{T} c(s_t, a_t) \text{ tel que } s_t = f(s_{t-1}, a_{t-1})$$

Cas linéaire :

- $f(s_t, a_t) = \boldsymbol{F}_t \begin{bmatrix} s_t \\ a_t \end{bmatrix} + \boldsymbol{f}_t$
- $c(s_t, a_t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_t \\ a_t \end{bmatrix}^T \boldsymbol{C}_t \begin{bmatrix} s_t \\ a_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_t \\ a_t \end{bmatrix}^T \boldsymbol{c}_t$

Optimisation de trajectoire

Linear Quadratic Regulator

Backward Recursion

$(\boldsymbol{V}_T, \boldsymbol{v}_T) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$

for $t = T$ **to** 1 **do**

1. $(\boldsymbol{Q}_t, \boldsymbol{q}_t) = g(\boldsymbol{C}_t, \boldsymbol{F}_t, \boldsymbol{V}_t, \boldsymbol{c}_t, \boldsymbol{f}_t, \boldsymbol{v}_t)$
2. $J(\boldsymbol{s}_t, \boldsymbol{a}_t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_t \\ a_t \end{bmatrix}^T \boldsymbol{Q}_t \begin{bmatrix} s_t \\ a_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_t \\ a_t \end{bmatrix}^T \boldsymbol{q}_t$
3. $a_t^* = \underset{a_t}{\operatorname{argmax}}\ J(\boldsymbol{s}_t, \boldsymbol{a}_t) = \boldsymbol{K}_t \boldsymbol{s}_t + \boldsymbol{k}_t$
4. $(\boldsymbol{V}_t, \boldsymbol{v}_t) = h(\boldsymbol{C}_t, \boldsymbol{F}_t, \boldsymbol{V}_t, \boldsymbol{c}_t, \boldsymbol{f}_t, \boldsymbol{v}_t)$

end

Avec g et h deux fonctions linéaires

Forward Recursion

$(\boldsymbol{V}_T, \boldsymbol{v}_T) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$

for $t = 1$ **to** T **do**

1. $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{K}_t \boldsymbol{s}_t + \boldsymbol{k}_t$
2. $\boldsymbol{s}_{t+1} = f(\boldsymbol{s}_t, \boldsymbol{a}_t)$

end

Optimisation de trajectoire

- Dans le cas de transitions stochastiques, DQR est toujours optimal si la distribution est symétrique *eg* gaussienne.
- Cas non linéaire $\rightarrow$ On se ramène au cas linéaire en partant d'une séquence de référence $(s'_1, a'_1), ...(s'_T, a'_T)$:

$$\boldsymbol{C}_t = \nabla^2_{s_t,a_t} c(s'_t, a'_t)$$
$$\boldsymbol{c}_t = \nabla_{s_t,a_t} c(s'_t, a'_t)$$
$$\boldsymbol{F}_t = \nabla_{s_t,a_t} f(s'_t, a'_t)$$

- Dans le cas non-linéaire, on fait généralement quelques itérations seulement en suivant la récursion vers l'avant avant de replanifier.

Plan

Bibliographie

- Reinforcement Learning : an introduction, second edition, Richard S. Sutton and Adrew G. Barto
- Reinforcement Learning courses, David Silver, DeepMind (https ://www.davidsilver.uk/)
- A3C (Mnih et al. ICML 2016)
- T. P. Lillicrap et al., Continuous control with deep reinforcement learning
- Browne, Powley, Whitehouse, Lucas, Cowling, Rohlfshagen, Tavener, Perez, Samothrakis, Colton. (2012). A Survey of Monte Carlo Tree Search Methods