

# Quelques résultats récents de l'équipe Optimisation Combinatoire

Frédéric Roupin

CEDRIC, équipe Optimisation Combinatoire



25 janvier 2008

# Plan

- 1 Contexte
- 2 Cerner la Complexité de problèmes combinatoires
- 3 Modélisations et relaxations
- 4 Applications à des cas concrets

# Plan de la Présentation

- 1 Contexte
- 2 Cerner la Complexité de problèmes combinatoires
- 3 Modélisations et relaxations
- 4 Applications à des cas concrets

# Les Axes de Recherche de l'équipe OC

## ① Programmation Mathématique

# Les Axes de Recherche de l'équipe OC

- 1 Programmation Mathématique
  - Etude de problèmes génériques (nouvelles approches de résolution)

# Les Axes de Recherche de l'équipe OC

## ① Programmation Mathématique

- Etude de problèmes génériques (nouvelles approches de résolution)
- Modèles et relaxations (programmations linéaire, quadratique convexe, semidéfinie, méthodes de coupes polyédriques)

# Les Axes de Recherche de l'équipe OC

## ① Programmation Mathématique

- Etude de problèmes génériques (nouvelles approches de résolution)
- Modèles et relaxations (programmations linéaire, quadratique convexe, semidéfinie, méthodes de coupes polyédriques)
- Résolution de problèmes réels

# Les Axes de Recherche de l'équipe OC

## ① Programmation Mathématique

- Etude de problèmes génériques (nouvelles approches de résolution)
- Modèles et relaxations (programmations linéaire, quadratique convexe, semidéfinie, méthodes de coupes polyédriques)
- Résolution de problèmes réels

## ② Optimisation dans les Graphes

# Les Axes de Recherche de l'équipe OC

## ① Programmation Mathématique

- Etude de problèmes génériques (nouvelles approches de résolution)
- Modèles et relaxations (programmations linéaire, quadratique convexe, semidéfinie, méthodes de coupes polyédriques)
- Résolution de problèmes réels

## ② Optimisation dans les Graphes

- Multichemins, multiflots entiers et multicoupes (avec ou sans contraintes de cardinalité)

# Les Axes de Recherche de l'équipe OC

## ① Programmation Mathématique

- Etude de problèmes génériques (nouvelles approches de résolution)
- Modèles et relaxations (programmations linéaire, quadratique convexe, semidéfinie, méthodes de coupes polyédriques)
- Résolution de problèmes réels

## ② Optimisation dans les Graphes

- Multichemins, multiflots entiers et multicoupes (avec ou sans contraintes de cardinalité)
- Etude de la complexité, résolution efficace des problèmes dans des graphes particuliers

# Les Axes de Recherche de l'équipe OC

## ① Programmation Mathématique

- Etude de problèmes génériques (nouvelles approches de résolution)
- Modèles et relaxations (programmations linéaire, quadratique convexe, semidéfinie, méthodes de coupes polyédriques)
- Résolution de problèmes réels

## ② Optimisation dans les Graphes

- Multichemins, multiflots entiers et multicoupes (avec ou sans contraintes de cardinalité)
- Etude de la complexité, résolution efficace des problèmes dans des graphes particuliers

## ③ Tomographie discrète et Applications

# Les Axes de Recherche de l'équipe OC

## ① Programmation Mathématique

- Etude de problèmes génériques (nouvelles approches de résolution)
- Modèles et relaxations (programmations linéaire, quadratique convexe, semidéfinie, méthodes de coupes polyédriques)
- Résolution de problèmes réels

## ② Optimisation dans les Graphes

- Multichemins, multiflots entiers et multicoups (avec ou sans contraintes de cardinalité)
- Etude de la complexité, résolution efficace des problèmes dans des graphes particuliers

## ③ Tomographie discrète et Applications

- Complexité

# Les Axes de Recherche de l'équipe OC

## ① Programmation Mathématique

- Etude de problèmes génériques (nouvelles approches de résolution)
- Modèles et relaxations (programmations linéaire, quadratique convexe, semidéfinie, méthodes de coupes polyédriques)
- Résolution de problèmes réels

## ② Optimisation dans les Graphes

- Multichemins, multiflots entiers et multicoupes (avec ou sans contraintes de cardinalité)
- Etude de la complexité, résolution efficace des problèmes dans des graphes particuliers

## ③ Tomographie discrète et Applications

- Complexité
- Planification d'horaires de travail

# Les Axes de Recherche de l'équipe OC

## ① Programmation Mathématique

- Etude de problèmes génériques (nouvelles approches de résolution)
- Modèles et relaxations (programmations linéaire, quadratique convexe, semidéfinie, méthodes de coupes polyédriques)
- Résolution de problèmes réels

## ② Optimisation dans les Graphes

- Multichemins, multiflots entiers et multicoupes (avec ou sans contraintes de cardinalité)
- Etude de la complexité, résolution efficace des problèmes dans des graphes particuliers

## ③ Tomographie discrète et Applications

- Complexité
- Planification d'horaires de travail
- Liens avec des problèmes de coloration de graphes

# Problème central étudié

Optimiser  $f(x)$  avec  $x \in S$

$S$  : ensemble **discret** ou au moins **non convexe**

# Problème central étudié

Optimiser  $f(x)$  avec  $x \in S$

$S$  : ensemble **discret** ou au moins **non convexe**



**Convexité** : Optimiser sur  $S$ ="miettes de pain" ou  $S$ ="pain maison" est bien plus difficile qu'optimiser sur  $S$ ="pain industriel"

# Problème central étudié

Optimiser  $f(x)$  avec  $x \in S$

$S$  : ensemble **discret** ou au moins **non convexe**



**Convexité** : Optimiser sur  $S$ ="miettes de pain" ou  $S$ ="pain maison" est bien plus difficile qu'optimiser sur  $S$ ="pain industriel"

**Thèmes Généraux de Recherche :**

- **Complexité** : Identification de la difficulté d'un problème

# Problème central étudié

Optimiser  $f(x)$  avec  $x \in S$

$S$  : ensemble **discret** ou au moins **non convexe**



**Convexité** : Optimiser sur  $S$ ="miettes de pain" ou  $S$ ="pain maison" est bien plus difficile qu'optimiser sur  $S$ ="pain industriel"

## Thèmes Généraux de Recherche :

- **Complexité** : Identification de la difficulté d'un problème
- **Résolution** : Amélioration de méthodes connues ou proposition de nouvelles méthodes pour des problèmes génériques

# Problème central étudié

Optimiser  $f(x)$  avec  $x \in S$

$S$  : ensemble **discret** ou au moins **non convexe**



**Convexité** : Optimiser sur  $S$ ="miettes de pain" ou  $S$ ="pain maison" est bien plus difficile qu'optimiser sur  $S$ ="pain industriel"

## Thèmes Généraux de Recherche :

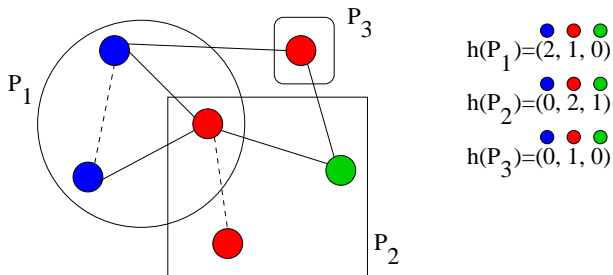
- **Complexité** : Identification de la difficulté d'un problème
- **Résolution** : Amélioration de méthodes connues ou proposition de nouvelles méthodes pour des problèmes génériques
- **Applications** : Etude de problèmes concrets

# Plan de la Présentation

- 1 Contexte
- 2 Cerner la Complexité de problèmes combinatoires
- 3 Modélisations et relaxations
- 4 Applications à des cas concrets

# Tomographie discrète et coloration

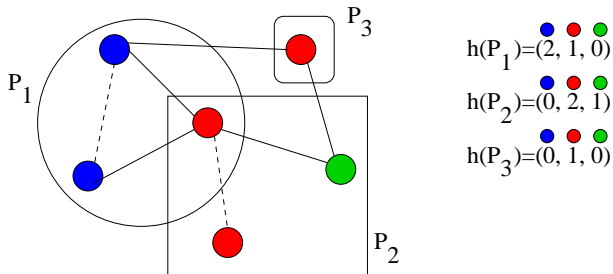
[C. Bentz, M.-C. Costa, D. de Werra, C. Picouleau et B. Ries]  
Généralisation des problèmes de coloration et de tomographie discrète



- un graphe  $G=(V,E)$  et  $P = (P_1, \dots, P_p)$ , où  $P_i$  est inclus dans  $V$

# Tomographie discrète et coloration

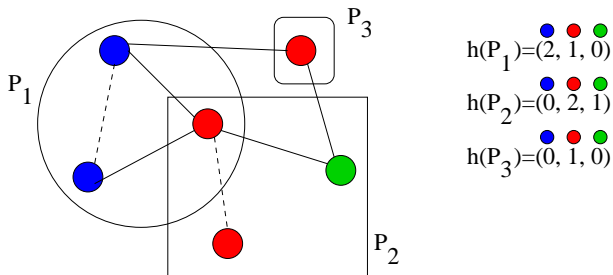
[C. Bentz, M.-C. Costa, D. de Werra, C. Picouleau et B. Ries]  
Généralisation des problèmes de coloration et de tomographie discrète



- un graphe  $G=(V,E)$  et  $P = (P_1, \dots, P_p)$ , où  $P_i$  est inclus dans  $V$
- un ensemble de  $K$  couleurs et  $p$  vecteurs d'entiers  $h(P_i)$

# Tomographie discrète et coloration

[C. Bentz, M.-C. Costa, D. de Werra, C. Picouleau et B. Ries]  
Généralisation des problèmes de coloration et de tomographie discrète



- un graphe  $G=(V,E)$  et  $P = (P_1, \dots, P_p)$ , où  $P_i$  est inclus dans  $V$
- un ensemble de  $K$  couleurs et  $p$  vecteurs d'entiers  $h(P_i)$
- Donner une couleur à chacun des sommets telle que le nombre de sommets de  $P_i$  de couleur  $j$  vaut la  $j$ ème entrée de  $h(P_i)$

## tomographie discrète

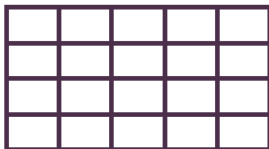
Reconstruire une image à partir de ses **projections** : applications en bases de données, statistiques, compression de données

1R 2B 2V

2R 2B 1V

0R 4B 1V

3R 1B 1V



2R 1R 0R 1R 2R

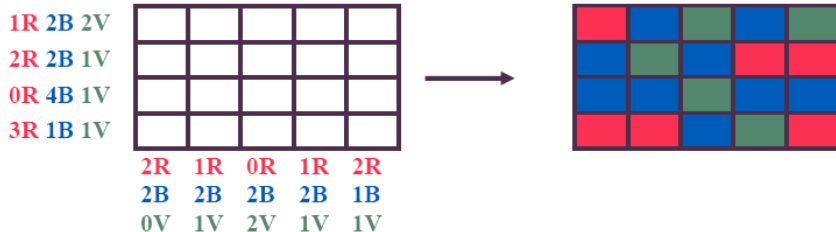
2B 2B 2B 2B 1B

0V 1V 2V 1V 1V



# tomographie discrète

Reconstruire une image à partir de ses **projections** : applications en bases de données, statistiques, compression de données



C'est le problème précédent lorsque le graphe est une grille et  $P$  est l'ensemble des chaînes verticales et horizontales !

# Etude de la complexité

## Démarche

- Faire des **Restrictions** au type de graphe et à  $P$  afin de déterminer une frontière entre cas difficiles et cas polynomiaux.

# Etude de la complexité

## Démarche

- Faire des **Restrictions** au type de graphe et à  $P$  afin de déterminer une frontière entre cas difficiles et cas polynomiaux.
  - Prendre des  $P_i$  qui sont des chaînes.

# Etude de la complexité

## Démarche

- Faire des **Restrictions** au type de graphe et à  $P$  afin de déterminer une frontière entre cas difficiles et cas polynomiaux.
  - Prendre des  $P_i$  qui sont des chaînes.
  - Si  $G$  est un arbre, le problème de la 2-coloration est NP-complet même si le degré maximum des sommets est au plus 3

# Etude de la complexité

## Démarche

- Faire des **Restrictions** au type de graphe et à  $P$  afin de déterminer une frontière entre cas difficiles et cas polynomiaux.
  - Prendre des  $P_i$  qui sont des chaînes.
  - Si  $G$  est un arbre, le problème de la 2-coloration est NP-complet même si le degré maximum des sommets est au plus 3
  - Si  $G$  est un arbre et que deux  $P_i$  ont au plus un sommet commun, le problème de la  $k$ -coloration devient polynomial

# Etude de la complexité

## Démarche

- Faire des **Restrictions** au type de graphe et à  $P$  afin de déterminer une frontière entre cas difficiles et cas polynomiaux.
  - Prendre des  $P_i$  qui sont des chaînes.
  - Si  $G$  est un arbre, le problème de la 2-coloration est NP-complet même si le degré maximum des sommets est au plus 3
  - Si  $G$  est un arbre et que deux  $P_i$  ont au plus un sommet commun, le problème de la  $k$ -coloration devient polynomial
- Identifier des **paramètres** dont les valeurs vont permettre de **classifier** les différents cas :

# Etude de la complexité

## Démarche

- Faire des **Restrictions** au type de graphe et à  $P$  afin de déterminer une frontière entre cas difficiles et cas polynomiaux.
  - Prendre des  $P_i$  qui sont des chaînes.
  - Si  $G$  est un arbre, le problème de la 2-coloration est NP-complet même si le degré maximum des sommets est au plus 3
  - Si  $G$  est un arbre et que deux  $P_i$  ont au plus un sommet commun, le problème de la  $k$ -coloration devient polynomial
- Identifier des **paramètres** dont les valeurs vont permettre de **classifier** les différents cas :
  - Valeurs associées aux propriétés de l'ensemble  $P$ .

# Etude de la complexité

## Démarche

- Faire des **Restrictions** au type de graphe et à  $P$  afin de déterminer une frontière entre cas difficiles et cas polynomiaux.
  - Prendre des  $P_i$  qui sont des chaînes.
  - Si  $G$  est un arbre, le problème de la 2-coloration est NP-complet même si le degré maximum des sommets est au plus 3
  - Si  $G$  est un arbre et que deux  $P_i$  ont au plus un sommet commun, le problème de la  $k$ -coloration devient polynomial
- Identifier des **paramètres** dont les valeurs vont permettre de **classifier** les différents cas :
  - Valeurs associées aux propriétés de l'ensemble  $P$ .
  - Type de graphe (arbre, biparti), diamètre, etc...

# Plan de la Présentation

- 1 Contexte
- 2 Cerner la Complexité de problèmes combinatoires
- 3 Modélisations et relaxations**
- 4 Applications à des cas concrets

# Outils de la Programmation Mathématique

On sait résoudre **efficacement** différentes classes de problèmes convexes :

# Outils de la Programmation Mathématique

On sait résoudre **efficacement** différentes classes de problèmes convexes :

- Programmation linéaire continue et entière, programmation quadratique convexe (CPLEX)

# Outils de la Programmation Mathématique

On sait résoudre **efficacement** différentes classes de problèmes convexes :

- Programmation linéaire continue et entière, programmation quadratique convexe (CPLEX)
- Programmation semidéfinie (SB, SDPLR), semidéfinie de "moindres carrés" (SDLS)

# Outils de la Programmation Mathématique

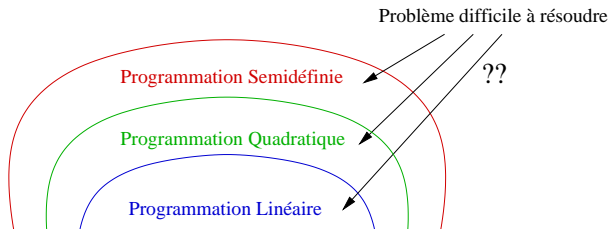
On sait résoudre **efficacement** différentes classes de problèmes convexes :

- Programmation linéaire continue et entière, programmation quadratique convexe (CPLEX)
- Programmation semidéfinie (SB, SDPLR), semidéfinie de "moindres carrés" (SDLS)

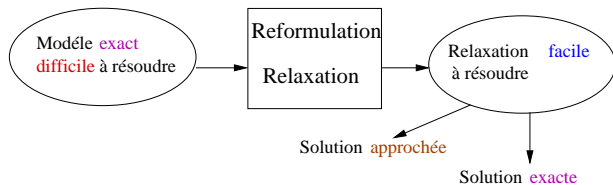
# Outils de la Programmation Mathématique

On sait résoudre **efficacement** différentes classes de problèmes convexes :

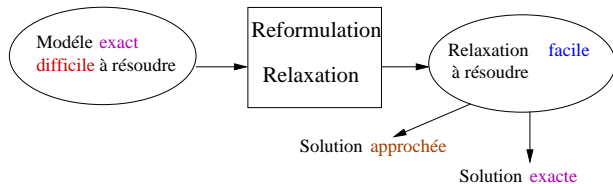
- Programmation linéaire continue et entière, programmation quadratique convexe (CPLEX)
- Programmation semidéfinie (SB, SDPLR), semidéfinie de "moindres carrés" (SDLS)



# Modéliser et Relâcher

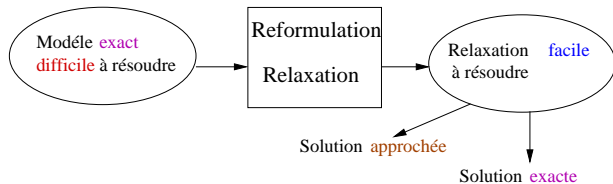


# Modéliser et Relâcher



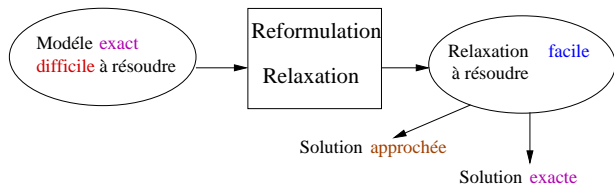
- 1 **Approximation** : Quelle est la qualité de la borne ?

# Modéliser et Relâcher



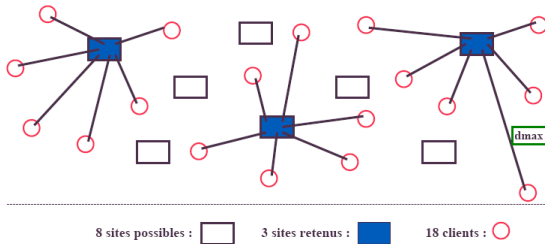
- 1 **Approximation** : Quelle est la qualité de la borne ?
- 2 **Coût de la résolution** : Quelle est le temps nécessaire au calcul de cette borne ?

# Modéliser et Relâcher



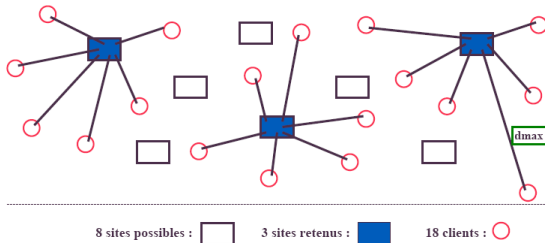
- 1 **Approximation** : Quelle est la qualité de la borne ?
- 2 **Coût de la résolution** : Quelle est le temps nécessaire au calcul de cette borne ?
- 3 **Cas d'une résolution exacte** : par exemple par une méthode d'évaluation/séparation (Branch&Bound) : quel est le ratio **qualité/temps** ?

## Localisation et affectation de clients à des serveurs [S.Elloumi]



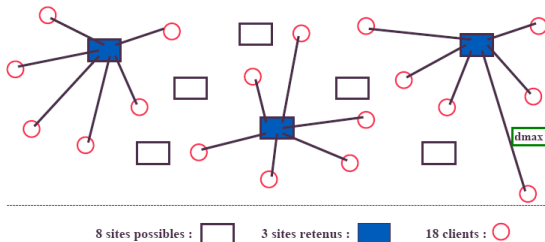
- 1 Choisir la **localisation** des serveurs

## Localisation et affectation de clients à des serveurs [S.Elloumi]



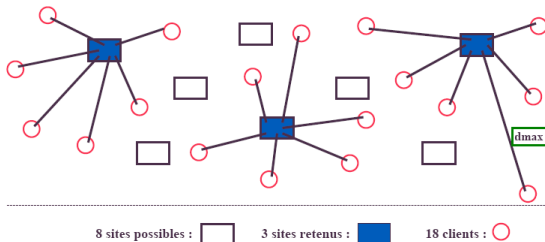
- ① Choisir la **localisation** des serveurs
- ② **Affecter** chaque client au serveur le plus proche

## Localisation et affectation de clients à des serveurs [S.Elloumi]



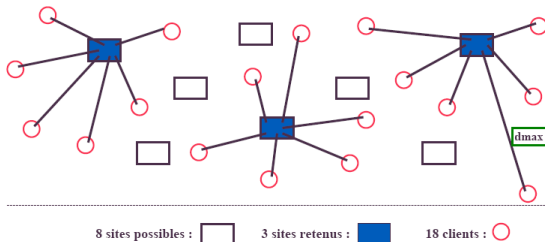
- ① Choisir la **localisation** des serveurs
- ② **Affecter** chaque client au serveur le plus proche
- ③ **Minimiser la distance maximale** entre clients et serveurs

## Localisation et affectation de clients à des serveurs [S.Elloumi]



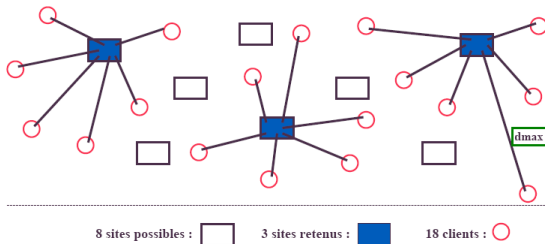
- ① Choisir la **localisation** des serveurs
- ② **Affecter** chaque client au serveur le plus proche
- ③ **Minimiser la distance maximale** entre clients et serveurs

## Localisation et affectation de clients à des serveurs [S.Elloumi]



- ① Choisir la **localisation** des serveurs
  - ② **Affecter** chaque client au serveur le plus proche
  - ③ **Minimiser la distance maximale** entre clients et serveurs
- **Idée** Il n'existe qu'un ensemble connu  $D_0, \dots, D_k$  de distances possibles entre les clients et les serveurs

## Localisation et affectation de clients à des serveurs [S.Elloumi]



- 1 Choisir la **localisation** des serveurs
  - 2 **Affecter** chaque client au serveur le plus proche
  - 3 **Minimiser la distance maximale** entre clients et serveurs
- **Idée** Il n'existe qu'un ensemble connu  $D_0, \dots, D_k$  de distances possibles entre les clients et les serveurs
- **Nouvelle formulation** où des variables de décision valent 1 si la distance est supérieure à  $D_k \Rightarrow$  **Gain d'un facteur 10 sur le temps de résolution !**

## L'impact double de la modélisation d'un problème

Différentes **représentations** du même espace de solutions discrètes conduisent à des relaxations dont l'**efficacité** est très différente en pratique

## L'impact double de la modélisation d'un problème

Différentes **représentations** du même espace de solutions discrètes conduisent à des relaxations dont l'**efficacité** est très différente en pratique

Etude des liens entre relaxations semidéfinies et l'approche lagrangienne [A.Faye, F.Roupin]

- Cadre homogène pour comparer de telles relaxations

## L'impact double de la modélisation d'un problème

Différentes **représentations** du même espace de solutions discrètes conduisent à des relaxations dont l'**efficacité** est très différente en pratique

Etude des liens entre relaxations semidéfinies et l'approche lagrangienne [A.Faye, F.Roupin]

- Cadre homogène pour comparer de telles relaxations
- Détermination d'une limite théorique générale

## L'impact double de la modélisation d'un problème

Différentes **représentations** du même espace de solutions discrètes conduisent à des relaxations dont l'**efficacité** est très différente en pratique

Etude des liens entre relaxations semidéfinies et l'approche lagrangienne [A.Faye, F.Roupin]

- Cadre homogène pour comparer de telles relaxations
- Détermination d'une **limite théorique générale**
- **Vitesse de convergence** des algorithmes de résolution numérique : des relaxations semidéfinies équivalentes **théoriquement** ne le sont plus en **pratique**

## L'impact double de la modélisation d'un problème

Différentes **représentations** du même espace de solutions discrètes conduisent à des relaxations dont l'**efficacité** est très différente en pratique

Etude des liens entre relaxations semidéfinies et l'approche lagrangienne [A.Faye, F.Roupin]

- **Cadre homogène** pour comparer de telles relaxations
- Détermination d'une **limite théorique générale**
- **Vitesse de convergence** des algorithmes de résolution numérique : des relaxations semidéfinies équivalentes **théoriquement** ne le sont plus en **pratique**

## L'impact double de la modélisation d'un problème

Différentes **représentations** du même espace de solutions discrètes conduisent à des relaxations dont l'**efficacité** est très différente en pratique

Etude des liens entre relaxations semidéfinies et l'approche lagrangienne [A.Faye, F.Roupin]

- **Cadre homogène** pour comparer de telles relaxations
  - Détermination d'une **limite théorique générale**
  - **Vitesse de convergence** des algorithmes de résolution numérique : des relaxations semidéfinies équivalentes **théoriquement** ne le sont plus en **pratique**
- D. Quadri, E. Soutif : Problème du "sac-à-dos" en variables entières

# L'impact double de la modélisation d'un problème

Différentes **représentations** du même espace de solutions discrètes conduisent à des relaxations dont l'**efficacité** est très différente en pratique

Etude des liens entre relaxations semidéfinies et l'approche lagrangienne [A.Faye, F.Roupin]

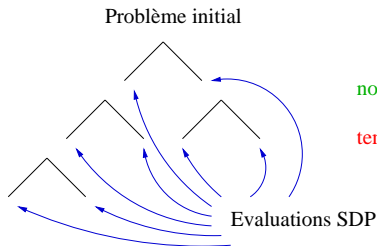
- **Cadre homogène** pour comparer de telles relaxations
  - Détermination d'une **limite théorique générale**
  - **Vitesse de convergence** des algorithmes de résolution numérique : des relaxations semidéfinies équivalentes **théoriquement** ne le sont plus en **pratique**
- D. Quadri, E. Soutif : Problème du "sac-à-dos" en variables entières
- A. Billionnet, S. Elloumi, M.C. Plateau, A. Lambert : programmes quadratiques en variables 0-1 et entières

# Relaxations et branch&bound

- Utiliser la programmation semidéfinie (SDP) dans une méthode d'évaluation/séparation (branch&bound) est souvent **très coûteux**

## Relaxations et branch&bound

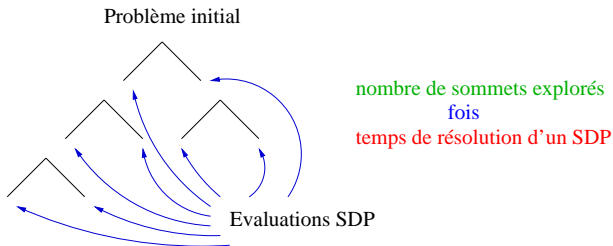
- Utiliser la programmation semidéfinie (SDP) dans une méthode d'évaluation/séparation (branch&bound) est souvent **très coûteux**



nombre de sommets explorés  
fois  
temps de résolution d'un SDP

## Relaxations et branch&bound

- Utiliser la programmation semidéfinie (SDP) dans une méthode d'évaluation/séparation (branch&bound) est souvent **très coûteux**



- **Idée** : dégrader la qualité de la borne semidéfinie en échange d'une **diminution du temps de calcul**

## Méthode QCR

[A. Billionnet, S. Elloumi, M.C. Plateau]

- Idée : "Capter" la qualité de borne SDP dans une relaxation quadratique convexe (très rapide à résoudre)

## Méthode QCR

[A. Billionnet, S. Elloumi, M.C. Plateau]

- Idée : "Capter" la qualité de borne SDP dans une relaxation quadratique convexe (très rapide à résoudre)
- Autre avantage : utilisation d'un outil générique (CPLEX)

## Méthode QCR

[A. Billionnet, S. Elloumi, M.C. Plateau]

- Idée : "Capter" la qualité de borne SDP dans une relaxation quadratique convexe (très rapide à résoudre)
- Autre avantage : utilisation d'un outil générique (CPLEX)

# Méthode QCR

[A. Billionnet, S. Elloumi, M.C. Plateau]

- Idée : "Capter" la qualité de borne SDP dans une relaxation quadratique convexe (très rapide à résoudre)
- Autre avantage : utilisation d'un outil générique (CPLEX)

Principe de l'approche :

- 1 Initialement : un problème quadratique en variables 0-1 difficile à résoudre

# Méthode QCR

[A. Billionnet, S. Elloumi, M.C. Plateau]

- Idée : "Capter" la qualité de borne SDP dans une relaxation quadratique convexe (très rapide à résoudre)
- Autre avantage : utilisation d'un outil générique (CPLEX)

Principe de l'approche :

- 1 Initialement : un problème quadratique en variables 0-1 difficile à résoudre
- 2 Relaxation continue puis ajout d'un terme à la fonction pour la convexifier (on obtiendrait alors un problème facile)

# Méthode QCR

[A. Billionnet, S. Elloumi, M.C. Plateau]

- Idée : "Capter" la qualité de borne SDP dans une relaxation quadratique convexe (très rapide à résoudre)
- Autre avantage : utilisation d'un outil générique (CPLEX)

Principe de l'approche :

- 1 Initialement : un problème quadratique en variables 0-1 difficile à résoudre
- 2 Relaxation continue puis ajout d'un terme à la fonction pour la convexifier (on obtiendrait alors un problème facile)
- 3 Problème : Quel terme ajouter ??

# Méthode QCR

[A. Billionnet, S. Elloumi, M.C. Plateau]

- **Idée** : "Capter" la qualité de borne SDP dans une **relaxation quadratique convexe** (très rapide à résoudre)
- Autre avantage : utilisation d'un **outil générique** (CPLEX)

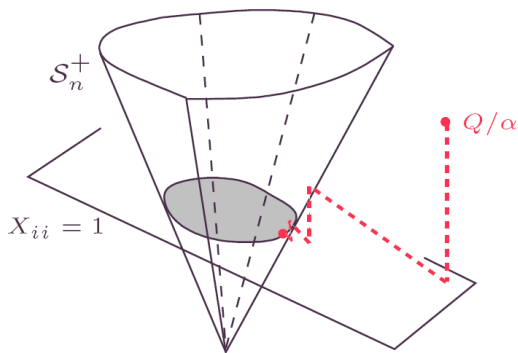
Principe de l'approche :

- 1 Initialement : un problème quadratique en variables 0-1 **difficile** à résoudre
- 2 Relaxation **continue** puis **ajout** d'un terme à la fonction pour la convexifier (on obtiendrait alors un **problème facile**)
- 3 **Problème** : Quel terme ajouter ??
- 4 En résolvant **un seul** programme semidéfini on obtient le **meilleur** possible !

# SDLS : "Semidefinite Least Squares" Problem

[J. Malick, F. Roupin]

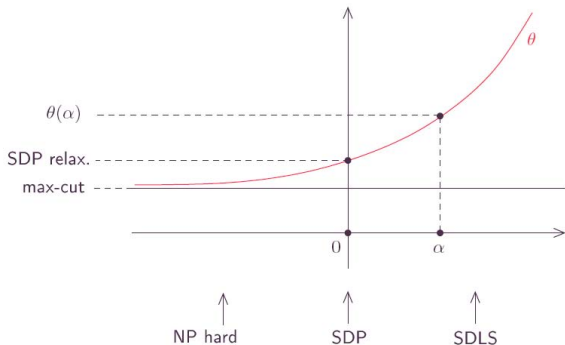
Borne **moins bonne** que celle de l'approche semidéfinie mais **plus rapide** à calculer



**Projection** d'une matrice  $\frac{Q}{\alpha}$  sur l'intersection d'un cône et d'un espace affine

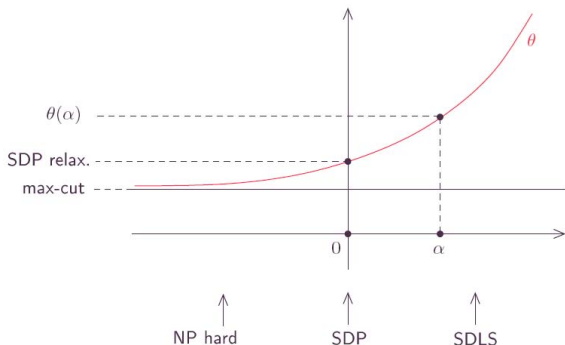
# SDLS : "Semidefinite Least Squares" Problem

Avantage de l'approche : on peut diminuer le temps de résolution en échange d'une détérioration de la borne  $\theta$  (paramètre  $\alpha$ )



# SDLS : "Semidefinite Least Squares" Problem

Avantage de l'approche : on peut diminuer le temps de résolution en échange d'une détérioration de la borne  $\theta$  (paramètre  $\alpha$ )



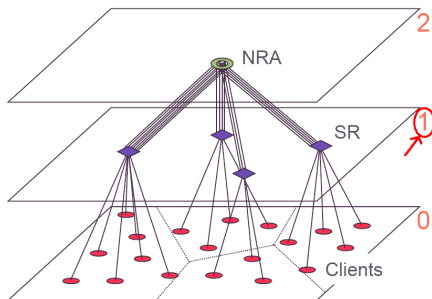
Lorsque  $\alpha$  tend vers 0 on retrouve la valeur du SDP !

# Plan de la Présentation

- 1 Contexte
- 2 Cerner la Complexité de problèmes combinatoires
- 3 Modélisations et relaxations
- 4 Applications à des cas concrets

## Localisation d'équipements sur un territoire

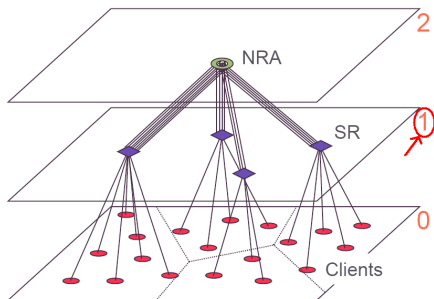
[Thèse M.Trampont, C.Destré (France Telecom), A.Faye, M.C.Costa]



- Les positions des **Noeuds de Raccordement des Abonnés** et des **clients** sont données

## Localisation d'équipements sur un territoire

[Thèse M.Trampont, C.Destré (France Telecom), A.Faye, M.C.Costa]



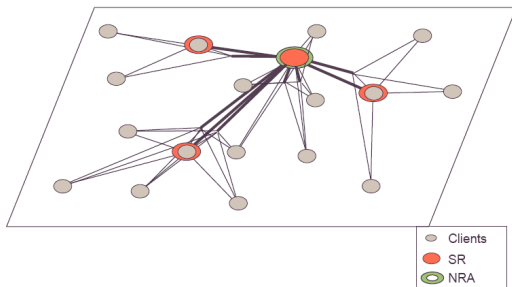
- Les positions des **Noeuds de Raccordements des Abonnés** et des **clients** sont données
- Déterminer le **nombre** et la **place** des **Sous-Répartiteurs** pour minimiser un ensemble de coûts d'installation et de liaison

# Localisation d'équipements sur un territoire

- Problème d'optimisation pour une part **discret** et pour une autre part **continu**

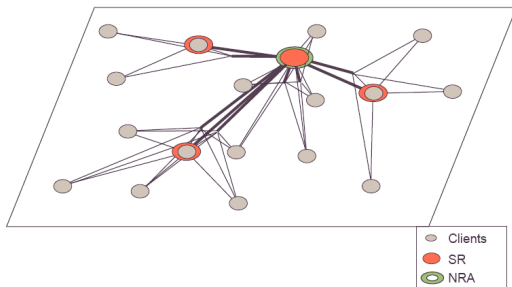
## Localisation d'équipements sur un territoire

- Problème d'optimisation pour une part **discret** et pour une autre part **continu**
- Une fois fixé le nombre des sous-répartiteurs, le sous-problème devient :



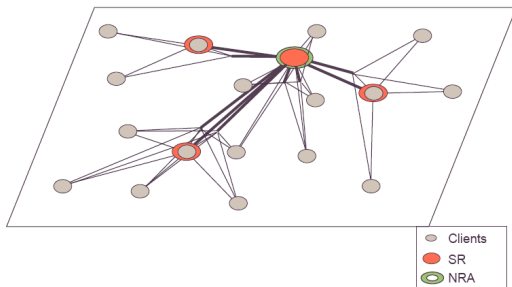
## Localisation d'équipements sur un territoire

- Problème d'optimisation pour une part **discret** et pour une autre part **continu**
- Une fois fixé le nombre des sous-répartiteurs, le sous-problème devient :

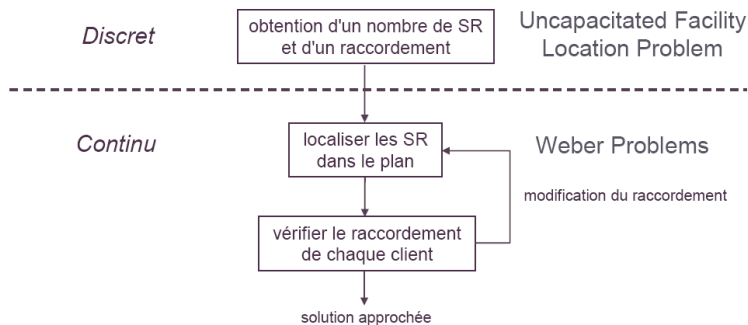


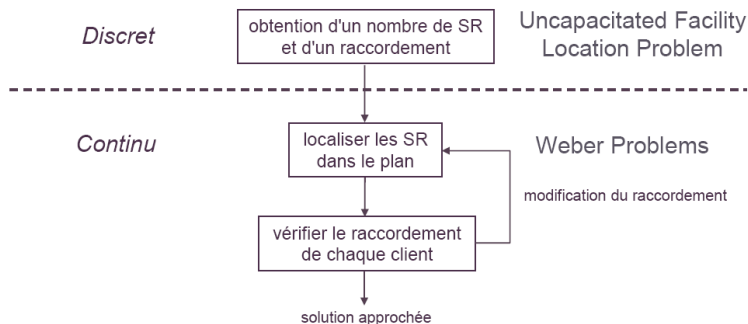
## Localisation d'équipements sur un territoire

- Problème d'optimisation pour une part **discret** et pour une autre part **continu**
- Une fois fixé le nombre des sous-répartiteurs, le sous-problème devient :

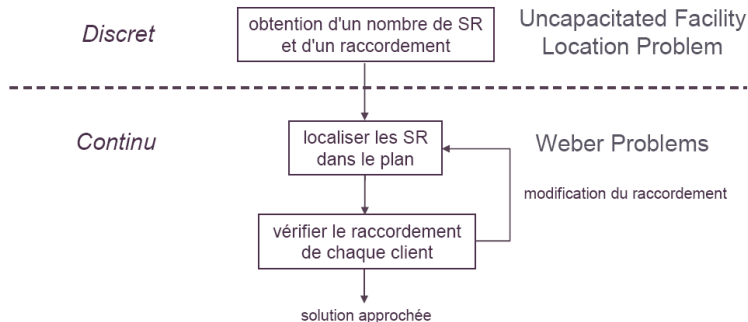


Problème de **Weber multi-source** : déjà **NP-difficile** !

Résolution **approchée** du problème

Résolution **approchée** du problème

Amélioration de 30% des résultats par rapport à une méthode statistique existante

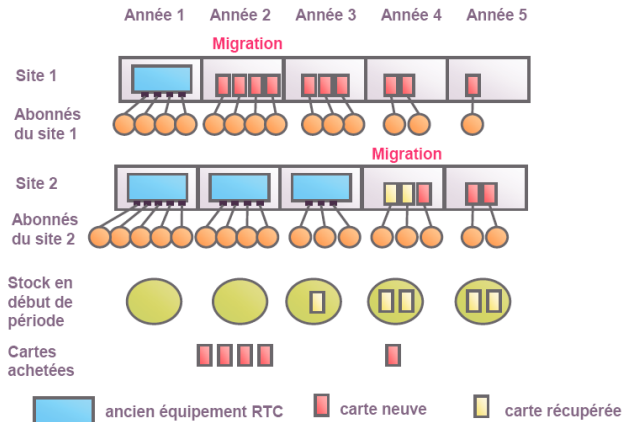
Résolution **approchée** du problème

Amélioration de 30% des résultats par rapport à une méthode statistique existante

Travaux en cours : **recuit simulé**, problème avec un **réseau existant**  
(modèle utilisant un graphe  $\Rightarrow$  passage au discret grâce à une projection des NRA et des clients sur les arêtes du graphe)

# Migration dans un réseau Telecom

[Thèse A. Lemaître, B. Decocq (Orange), A. Billionnet, S. Elloumi]  
Passage progressif des clients du Réseau Téléphonique Commuté au VoIP  
avec décroissance du nombre de clients



# Migration dans un réseau Telecom

- Déterminer les **années** de migration et le **nombre** de cartes à acheter

# Migration dans un réseau Telecom

- Déterminer les **années** de migration et le **nombre** de cartes à acheter
- **Coûts** de la migration :

# Migration dans un réseau Telecom

- Déterminer les **années** de migration et le **nombre** de cartes à acheter
- **Coûts** de la migration :
  - Installation/Désinstallation des cartes

# Migration dans un réseau Telecom

- Déterminer les **années** de migration et le **nombre** de cartes à acheter
- **Coûts** de la migration :
  - Installation/Désinstallation des cartes
  - Achat des cartes neuves

# Migration dans un réseau Telecom

- Déterminer les **années** de migration et le **nombre** de cartes à acheter
- **Coûts** de la migration :
  - Installation/Désinstallation des cartes
  - Achat des cartes neuves
  - Récupération des cartes (clients perdus)

# Migration dans un réseau Telecom

- Déterminer les **années** de migration et le **nombre** de cartes à acheter
- **Coûts** de la migration :
  - Installation/Désinstallation des cartes
  - Achat des cartes neuves
  - Récupération des cartes (clients perdus)

# Migration dans un réseau Telecom

- Déterminer les **années** de migration et le **nombre** de cartes à acheter
- **Coûts** de la migration :
  - Installation/Désinstallation des cartes
  - Achat des cartes neuves
  - Récupération des cartes (clients perdus)

## Résolution :

- Modélisation par un **programme linéaire en nombres entiers**

# Migration dans un réseau Telecom

- Déterminer les **années** de migration et le **nombre** de cartes à acheter
- **Coûts** de la migration :
  - Installation/Désinstallation des cartes
  - Achat des cartes neuves
  - Récupération des cartes (clients perdus)

## Résolution :

- Modélisation par un **programme linéaire en nombres entiers**
- Utilisation de CPLEX pour obtenir la solution optimale (Branch&Bound) : **très bons résultats**

# Migration dans un réseau Telecom

- Déterminer les **années** de migration et le **nombre** de cartes à acheter
- **Coûts** de la migration :
  - Installation/Désinstallation des cartes
  - Achat des cartes neuves
  - Récupération des cartes (clients perdus)

## Résolution :

- Modélisation par un **programme linéaire en nombres entiers**
- Utilisation de CPLEX pour obtenir la solution optimale (Branch&Bound) : **très bons résultats**
- Utilisation d'une heuristique (seule ou en entrée de CPLEX)

# Migration dans un réseau Telecom

- Déterminer les **années** de migration et le **nombre** de cartes à acheter
- **Coûts** de la migration :
  - Installation/Désinstallation des cartes
  - Achat des cartes neuves
  - Récupération des cartes (clients perdus)

## Résolution :

- Modélisation par un **programme linéaire en nombres entiers**
- Utilisation de CPLEX pour obtenir la solution optimale (Branch&Bound) : **très bons résultats**
- Utilisation d'une heuristique (seule ou en entrée de CPLEX)
- **robustesse** : Problème de la fiabilité des données !

# Allocation de registres

[Thèse B. Robillard, S. Blazy, E. Soutif]

**Exécution de programme** : Accès mémoire par le processeur et  
Existence de  $K$  **registres** (zones de stockage à accès rapide)

# Allocation de registres

[Thèse B. Robillard, S. Blazy, E. Soutif]

**Exécution de programme** : Accès mémoire par le processeur et  
Existence de  $K$  **registres** (zones de stockage à accès rapide)

- Savoir quelles variables doivent être **affectées** aux registres

# Allocation de registres

[Thèse B. Robillard, S. Blazy, E. Soutif]

**Exécution de programme** : Accès mémoire par le processeur et  
Existence de  $K$  **registres** (zones de stockage à accès rapide)

- Savoir quelles variables doivent être **affectées** aux registres
- **Minimiser les mouvements** entre les registres (quelle variable dans quel registre à un moment donné)

# Allocation de registres

[Thèse B. Robillard, S. Blazy, E. Soutif]

**Exécution de programme** : Accès mémoire par le processeur et  
Existence de  $K$  **registres** (zones de stockage à accès rapide)

- Savoir quelles variables doivent être **affectées** aux registres
- **Minimiser les mouvements** entre les registres (quelle variable dans quel registre à un moment donné)
- Modélisation par un problème de  **$K$ -coloration** de coût minimal d'un graphe particulier (représentant des relations d'**interférence** et de **préférence** entre les variables)

# Allocation de registres

[Thèse B. Robillard, S. Blazy, E. Soutif]

**Exécution de programme** : Accès mémoire par le processeur et  
Existence de  $K$  **registres** (zones de stockage à accès rapide)

- Savoir quelles variables doivent être **affectées** aux registres
- **Minimiser les mouvements** entre les registres (quelle variable dans quel registre à un moment donné)
- Modélisation par un problème de  **$K$ -coloration** de coût minimal d'un graphe particulier (représentant des relations d'**interférence** et de **préférence** entre les variables)
- On **minimise** le poids total des arêtes de préférence avec extrémités de couleurs différentes

## Modélisation par un problème de coloration

Modélisation par un **graphe d'interférence**  $G = G_i + G_p$

- Sommets de  $G_i =$  Sommets de  $G_p =$  Variables du programme

## Modélisation par un problème de coloration

Modélisation par un **graphe d'interférence**  $G = G_i + G_p$

- Sommets de  $G_i =$  Sommets de  $G_p =$  Variables du programme
- Arêtes de  $G_i$  : **arêtes d'interférence**  $\{v_1, v_2\}$  s'il existe un point de programme où  $v_1$  et  $v_2$  sont définies et utilisées par la suite

## Modélisation par un problème de coloration

Modélisation par un **graphe d'interférence**  $G = G_i + G_p$

- Sommets de  $G_i =$  Sommets de  $G_p =$  Variables du programme
- Arêtes de  $G_i$  : **arêtes d'interférence**  $\{v_1, v_2\}$  s'il existe un point de programme où  $v_1$  et  $v_2$  sont définies et utilisées par la suite
- Arêtes de  $G_p$  : **arêtes de préférence**  $\{v_1, v_2\}$  s'il existe une affectation entre  $v_1$  et  $v_2$ .

## Modélisation par un problème de coloration

Modélisation par un **graphe d'interférence**  $G = G_i + G_p$

- Sommets de  $G_i =$  Sommets de  $G_p =$  Variables du programme
- Arêtes de  $G_i$  : **arêtes d'interférence**  $\{v_1, v_2\}$  s'il existe un point de programme où  $v_1$  et  $v_2$  sont définies et utilisées par la suite
- Arêtes de  $G_p$  : **arêtes de préférence**  $\{v_1, v_2\}$  s'il existe une affectation entre  $v_1$  et  $v_2$ .

# Modélisation par un problème de coloration

Modélisation par un **graphe d'interférence**  $G = G_i + G_p$

- Sommets de  $G_i =$  Sommets de  $G_p =$  Variables du programme
- Arêtes de  $G_i$  : **arêtes d'interférence**  $\{v_1, v_2\}$  s'il existe un point de programme où  $v_1$  et  $v_2$  sont définies et utilisées par la suite
- Arêtes de  $G_p$  : **arêtes de préférence**  $\{v_1, v_2\}$  s'il existe une affectation entre  $v_1$  et  $v_2$ .

$K$ -coloration de  $G_i =$  Choix valide de registre pour chaque variable

$\Rightarrow$  Trouver une  $K$ -coloration de  $G_i$  minimisant le poids des arêtes de préférence avec extrémités de couleurs différentes

## Quelques résultats

- Les graphes d'interférences sont en général **triangulés** (tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 possède une corde)

## Quelques résultats

- Les graphes d'interférences sont en général **triangulés** (tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 possède une corde)
- Dans ce cas si la coloration est possible avec moins de  $K$  couleurs : on peut résoudre une partie du problème en temps **polynomial** (i.e. quelles sont les variables dans les registres)

## Quelques résultats

- Les graphes d'interférences sont en général **triangulés** (tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 possède une corde)
- Dans ce cas si la coloration est possible avec moins de  $K$  couleurs : on peut résoudre une partie du problème en temps **polynomial** (i.e. quelles sont les variables dans les registres)
- **Résultat de complexité** : La Coloration de graphes avec préférence généralise les problèmes de multicoupe et de coloration. Le problème est difficile !

## Quelques résultats

- Les graphes d'interférences sont en général **triangulés** (tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 possède une corde)
- Dans ce cas si la coloration est possible avec moins de  $K$  couleurs : on peut résoudre une partie du problème en temps **polynomial** (i.e. quelles sont les variables dans les registres)
- **Résultat de complexité** : La Coloration de graphes avec préférence généralise les problèmes de multicoupe et de coloration. Le problème est difficile !
- ① Utilisation variée de méthodes de RO :

## Quelques résultats

- Les graphes d'interférences sont en général **triangulés** (tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 possède une corde)
- Dans ce cas si la coloration est possible avec moins de  $K$  couleurs : on peut résoudre une partie du problème en temps **polynomial** (i.e. quelles sont les variables dans les registres)
- **Résultat de complexité** : La Coloration de graphes avec préférence généralise les problèmes de multicoupe et de coloration. Le problème est difficile !
- ① Utilisation variée de méthodes de RO :
  - modélisation par programmation linéaire en variables 0-1 (utilisation d'un solveur générique)

## Quelques résultats

- Les graphes d'interférences sont en général **triangulés** (tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 possède une corde)
- Dans ce cas si la coloration est possible avec moins de  $K$  couleurs : on peut résoudre une partie du problème en temps **polynomial** (i.e. quelles sont les variables dans les registres)
- **Résultat de complexité** : La Coloration de graphes avec préférence généralise les problèmes de multicoupe et de coloration. Le problème est difficile !
- ① Utilisation variée de méthodes de RO :
  - modélisation par programmation linéaire en variables 0-1 (utilisation d'un solveur générique)
  - algorithmique dans les graphes

## Quelques résultats

- Les graphes d'interférences sont en général **triangulés** (tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 possède une corde)
  - Dans ce cas si la coloration est possible avec moins de  $K$  couleurs : on peut résoudre une partie du problème en temps **polynomial** (i.e. quelles sont les variables dans les registres)
  - **Résultat de complexité** : La Coloration de graphes avec préférence généralise les problèmes de multicoupe et de coloration. Le problème est difficile !
- ① Utilisation variée de méthodes de RO :
    - modélisation par programmation linéaire en variables 0-1 (utilisation d'un solveur générique)
    - algorithmique dans les graphes
  - ② Vérification formelle en Coq des résultats :

## Quelques résultats

- Les graphes d'interférences sont en général **triangulés** (tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 possède une corde)
  - Dans ce cas si la coloration est possible avec moins de  $K$  couleurs : on peut résoudre une partie du problème en temps **polynomial** (i.e. quelles sont les variables dans les registres)
  - **Résultat de complexité** : La Coloration de graphes avec préférence généralise les problèmes de multicoupe et de coloration. Le problème est difficile !
- 1 Utilisation variée de méthodes de RO :
    - modélisation par programmation linéaire en variables 0-1 (utilisation d'un solveur générique)
    - algorithmique dans les graphes
  - 2 Vérification formelle en Coq des résultats :
    - Preuves de correction

## Quelques résultats

- Les graphes d'interférences sont en général **triangulés** (tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4 possède une corde)
  - Dans ce cas si la coloration est possible avec moins de  $K$  couleurs : on peut résoudre une partie du problème en temps **polynomial** (i.e. quelles sont les variables dans les registres)
  - **Résultat de complexité** : La Coloration de graphes avec préférence généralise les problèmes de multicoupe et de coloration. Le problème est difficile !
- 1 Utilisation variée de méthodes de RO :
    - modélisation par programmation linéaire en variables 0-1 (utilisation d'un solveur générique)
    - algorithmique dans les graphes
  - 2 Vérification formelle en Coq des résultats :
    - Preuves de correction
    - Validation *a posteriori*

## Perspectives et Bilan

- Une année passée riche en publications : en particulier 13 dans des revues internationales, deux livres

## Perspectives et Bilan

- Une année passée riche en publications : en particulier 13 dans des revues internationales, deux livres
- Des collaborations productives ou nouvelles : EPFL (suisse), INRIA Grenoble

## Perspectives et Bilan

- Une année passée riche en publications : en particulier 13 dans des revues internationales, deux livres
- Des collaborations productives ou nouvelles : EPFL (suisse), INRIA Grenoble
- Plusieurs thèses/masters en milieu industriel ou sur des sujets transversaux à plusieurs équipes du CEDRIC

## Perspectives et Bilan

- Une année passée riche en publications : en particulier 13 dans des revues internationales, deux livres
- Des collaborations productives ou nouvelles : EPFL (suisse), INRIA Grenoble
- Plusieurs thèses/masters en milieu industriel ou sur des sujets transversaux à plusieurs équipes du CEDRIC
- Et donc des perspectives pour de nombreuses applications de la RO !