

# Optimisation discrète sous incertitudes modélisées par des fonctions de croyance

Nathalie Helal<sup>1</sup>, Frédéric Pichon<sup>1</sup>, Daniel Porumbel<sup>2</sup>, David Mercier<sup>1</sup> and Éric Lefèvre<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université d'Artois, LGI2A, F-62400 Béthune, France

<sup>2</sup> Conservatoire National des Arts et Métiers, CEDRIC EA 4629, Paris 75003, France

**Mots-clés** : *incertitudes, fonctions de croyance, modèle "chance-constrained"*

## 1 Introduction et Motivation

Un des outils les plus utilisés pour l'optimisation sous incertitudes est la programmation à base de contraintes en probabilité (en anglais *Chance-Constrained Programming*, abrégé CCP). La CCP s'appuie sur l'hypothèse qu'il est possible de décrire toute incertitude quant à une variable, par une loi de probabilité clairement définie. Sous ces conditions, la CCP impose qu'une certaine contrainte soit satisfaite avec une probabilité supérieure à un seuil de confiance  $\beta$ , e.g., on impose que la probabilité de ne pas rater un train soit supérieure à 99.9%. Tout Programme Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) pourrait être formalisé en CCP ainsi :

$$\text{modèle CCP} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.t.} & p(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq C) \geq \beta \\ & \dots \text{ d'autres contraintes déterministes} \dots \\ & x_i \in \mathbf{Z}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right. \quad (*)$$

Ce travail est motivé par le fait qu'il est discutable de modéliser toute incertitude par une loi de probabilité, en particulier lorsque l'incertitude est tout ou partie d'origine épistémique. À titre d'exemple, la SNCF fournit des informations seulement partielles sur l'historique des retards des trains :  $t_1$  trains ont subi un retard de 0 à 5 minutes,  $t_2$  trains ont subi un retard de 5 à 15 minutes,  $t_3$  de 15 à 30 minutes, etc.

## 2 Modélisation par Fonctions de Croyance et Heuristiques

Notre approche repose sur la modification suivante du modèle CCP classique : la contrainte en probabilité (\*) ci-dessus est remplacée par une contrainte à base de fonctions de croyance. Ces fonctions permettent de modéliser souplement les connaissances et de représenter fidèlement les incertitudes. Des idées similaires ont déjà été proposées dans la littérature de *design mécanique* [2, 3], ainsi que pour résoudre des PL classiques [1]. À notre connaissance, c'est la première fois qu'un problème classique d'optimisation discrète est résolu à l'aide d'un modèle CCP à base de fonctions de croyance.

Au lieu de définir une variable aléatoire pour un paramètre  $a$ , on introduit une fonction de masse  $m : 2^D \rightarrow [0, 1]$  où  $D$  est l'ensemble des valeurs possible pour  $a$  (le cadre de discernement). En termes intuitifs, si  $a$  représente la demande d'un client, on peut alors avoir des parts de croyance, par exemple, sur les intervalles suivants  $\{[1, 10], [10, 30], [30, 50], [0, 50]\}$ ; si  $m([1, 10]) = 0.5$ , on a une confiance de 0.5 que la demande soit inférieure ou égale à 10. Une fonction de masse vérifie plusieurs propriétés similaires aux probabilités (ex,  $\sum_{A \subseteq D} m(A) = 1$ ). Modulo certains détails techniques, on peut dire qu'une fonction de masse est plus incertaine qu'une probabilité, car elle n'a pas besoin d'associer une valeur à toute réalisation possible de  $a$ , ex., dans l'exemple ci-dessus,  $m([1, 10]) = 0.5$  n'implique en aucun cas l'existence d'une

probabilité sous-jacente comme  $p(1) = p(2) = \dots = p(10) = 0.05$ . Pour plus de détails, le lecteur intéressé peut consulter les travaux de Shafer [4].

À partir de cette fonction de masse, il est possible de définir une fonction de *croissance* notée  $Bel(\cdot)$ . Par exemple, la valeur  $Bel(a \leq C)$  ci-dessous quantifie la croissance que l'on peut déduire sur le fait que  $a \leq C$ :

$$Bel(a \leq C) = \sum_{[g,h] \subseteq [0,C]} m([g,h])$$

En remplaçant (\*) dans le modèle CCP par  $Bel(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq C) \geq \beta$ , on obtient un modèle CCP à base de fonctions de croissance.

Nous avons réalisé une étude de cas sur un problème NP-dur très classique en optimisation discrète : le CVRP (Capacitated Vehicle Routing Problem). On rappelle que ce problème impose à chaque route une contrainte de capacité  $\sum_{v \in V} x_{rv}a_v \leq C$  où  $x_{rv}$  prend la valeur 1 si la route  $r$  sert le client  $v$ ,  $a_v$  est la demande du client  $v$  et  $V$  est l'ensemble des clients. Pour ajouter les incertitudes, on suppose que les demandes sont données en entrée comme des fonctions de masse similaires à la fonction  $m : 2^D \rightarrow [0, 1]$  exemplifiée plus haut. Suite à la modélisation CCP, la contrainte de capacité devient  $Bel(\sum_{v \in V} x_{rv}a_v \leq C) \geq \beta$ .

Le PLNE classique de CVRP est ainsi enrichi avec une contrainte à base de fonctions de croissance; le modèle résultant devient malheureusement encore plus difficile que le PLNE déterministe. Par contre, les meilleurs algorithmes heuristiques et méta-heuristiques pour le cas déterministe peuvent être adaptés à ces nouveaux modèles CCP. Nous avons choisi de tester un algorithme de recuit simulé. Un algorithme de convolution permet de calculer la fonction de masse pour la somme des demandes  $\sum_{v \in V} x_{rv}a_v$  à partir des fonctions de masse des clients individuels. Le reste de l'heuristique fonctionne de la même manière dans le cas déterministe, dans le cas du CCP probabiliste et celui du CCP à base de fonctions de croissance.

### 3 Résultats Partiels, Conclusions et Perspectives

À partir des instances CVRP d'Augerat [5], nous avons défini des instances incertaines en remplaçant les demandes déterministes par une fonction de masse  $m$  comme celle exemplifiée ci-dessus. On a trouvé, par exemple, que la transformation de l'instance A-n32-k5 peut avoir une solution avec un coût de 960.26 pour  $\beta = 1$  et de 869.93 pour  $\beta = 0.9$  d'où un gain d'un peu moins de 10%. La variation de  $\beta$  nous conduit à un coût plus faible lorsque  $\beta$  diminue, puisque le nombre des solutions valides augmente quand  $\beta$  diminue. Par ailleurs, la solution que nous proposons est plus générale car elle permet de gérer à la fois des problèmes avec des demandes déterministes (en fixant dans ce cas  $\beta = 1$ ) mais également avec des demandes fournies sous forme de probabilités.

Notre article a montré que cette approche est tout-à-fait faisable pour résoudre des problèmes NP-durs d'optimisation combinatoire; elle pourrait être utile lorsque l'on n'a pas de distribution de probabilité clairement définie pour les paramètres incertains. La plupart des méthodes (méta-)heuristiques pour un problème déterministe peuvent être étendues à nos modèles CCP.

### Références

- [1] H. Masri and F. B. Abdelaziz. Belief linear programming. *International Journal of Approximate Reasoning*, 51:973–983, 2010.
- [2] Z. P. Mourelatos and J. Zhou. A design optimization method using evidence theory. *Journal of Mechanical Design*, 128:901–908, 2006.
- [3] R. K. Srivastava, K. Deb, and R. Tulshyan. An evolutionary algorithm based approach to design optimization using evidence theory. *Journal of Mechanical Design*, 135(8), 2013.
- [4] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [5] P. Augerat. *Approche polyédrale du problème de tournées de véhicules*. PhdThesis, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1995.