Etude du problème de la multicoupe minimale à cardinalité contrainte

C. Bentz[1], M.-C. Costa[1], N. Derhy[1], et F. Roupin[2]

[1] CEDRIC, Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint-Martin, 75141 Paris
{cedric.bentz,costa,nicolas.derhy}@cnam.fr
[2] CEDRIC, Institut d'Informatique d'Entreprise, 18 allée Jean Rostand, 91025 Evry
roupin@iie.cnam.fr

1 Introduction

Soient un graphe $G = (V, E)$ possédant n sommets et m arêtes pondérées par des entiers positifs, et une liste $\mathcal{L}$ de k paires {source, puits} de sommets (nommés sommets terminaux).

Le problème de la multicoupe minimale (PMCM) consiste à supprimer un ensemble d'arêtes de poids total minimal de façon à séparer la source et le puits de chacune des k paires de $\mathcal{L}$.

Soit un entier p donné, le problème de la multicoupe minimale à cardinalité contrainte (p-PMCM) consiste à trouver la multicoupe de poids minimal contenant au plus p arêtes.

L'ensemble des cas NP-difficiles pour PMCM le reste pour p-PMCM. Ainsi, ce dernier est NP-difficile dans un graphe quelconque mais également dans certains graphes particuliers comme les étoiles [2].

2 Modélisation de p-PMCM

Nous modélisons ce problème par le programme (P) qui est linéaire, en nombres entiers et possède deux contraintes : la première indique que sur tout chemin reliant une source à son puits, au moins une arête doit être coupée. La deuxième contrainte est celle de cardinalité et force le nombre d'arêtes coupées à être inférieur ou égal à p.

Soit z_e la variable booléenne valant 1 si l'arête e appartient à la coupe et 0 sinon. μ_i représente une chaîne d'une source s_i vers son puits t_i et M est le nombre total de chaînes de s_1 à t_1,..., de s_k à t_k. Considérons également (D), le dual de la relaxation continue de ce modèle et notons f_i la variable duale associée à la contrainte de multicoupe et C la variable duale associée à la contrainte de cardinalité.

$$
\text{(P)}\begin{cases}
Min \displaystyle\sum_{e\in E} c_e z_e & \\
\text{s. c.} \displaystyle\sum_{e\in\mu_i} z_e \geq 1 \ \forall i \in \{1,\dots,M\} & (1)\\
\displaystyle\sum_{e\in E} z_e \leq p & (2)\\
z_e \in \{0,1\} \ \forall e \in E &
\end{cases}
\qquad
\text{(D)}\begin{cases}
Max \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i \ - p\,C & \\
s.c. \displaystyle\sum_{i/e\in\mu_i} f_i \leq c_e + C \ \forall e \in E & (3)\\
f_i, C \in R^+ &
\end{cases}
$$

3 Résolution de p-PMCM dans une chaîne

Nous montrons que p-PMCM est polynomial dans une chaîne car la matrice des contraintes de (P) est alors totalement unimodulaire. Nous élaborons ensuite deux algorithmes combinatoires polynomiaux résolvant ce problème.

3.1 Une approche fondée sur la dualité

Le premier algorithme développé utilise principalement le fait que la matrice des contraintes soit totalement unimodulaire. Il se déroule en deux parties :

– Résolution du programme dual par dichotomie sur la variable C

– Calcul d'une solution entière du primal à l'aide des écarts complémentaires

Notons ϕ la fonction donnant la valeur optimale du programme dual pour une valeur donnée de la variable C.

Résolution du dual
La résolution du dual se base sur la remarque suivante : pour une valeur donnée de C, $\phi(C)$ peut se calculer en $O(nk)$[1] en résolvant le problème de multiflot entier dans la chaîne où toutes les capacités ont augmenté de C unités.

Nous montrons également deux propriétés importantes sur la fonction ϕ :
- Un optimum de ϕ est atteint lorsque C décrit l'ensemble $\{0, \ldots, Max(0, C_{max} - 2C_{min})\}$ où C_{max} et C_{min} représentent respectivement les capacités maximum et minimum des arêtes de la chaîne.
- La fonction ϕ est soit décroissante, soit croissante puis décroissante.

Nous pouvons alors calculer un optimal entier du dual par recherche dichotomique sur C.

Obtention d'une solution entière du primal
Il nous reste maintenant à déduire une solution de (P) à partir de la solution entière obtenue pour (D). Pour cela, nous avons élaboré un algorithme permettant de trouver parmi les solutions optimales de PMCM, une solution de cardinalité minimum. La complexité de cet algorithme est en $O(nk)$. Pour résoudre p-PMCM, nous montrons qu'il suffit alors d'appliquer cet algorithme à la chaîne où toutes les capacités ont augmenté de la valeur C^* correspondant à la valeur optimale obtenue pour la variable C lors de la résolution du dual. Nous obtenons alors une multicoupe de poids minimal et de cardinalité inférieure à p.

Au final, le premier algorithme élaboré a pour complexité $O(n.k.Max(1, log|C_{max} - 2C_{min}|))$.

3.2 Un algorithme de programmation dynamique

Pour le deuxième algorithme, nous utilisons une fonction g à deux variables, de N^2 dans N : $g(i,j)$ est égale au poids d'une multicoupe de poids minimum qui sépare exactement les i premières paires de terminaux (en partant de l'extrémité gauche de la chaîne) et qui est de cardinalité j. Soit μ_i la chaîne reliant s_i à t_i. Nous montrons alors la formule de récurence suivante :

$$g(i,j) = \min_{(i',e)/i'<i \text{ et } e\in\mu_{i'+1} \text{ et } e\in\mu_i \text{ et } e\notin\mu_{i+1}} \{g(i', j-1) + c(e)\}$$

Nous montrons que nous pouvons calculer $g(i,j)$ en $O(n)$ lorsque nous connaissons les valeurs de $g(i', j-1)$ avec $i' < i$. De plus, i peut varier de 1 à k et j de 1 à p puisque nous cherchons une multicoupe contenant au plus p arêtes. Ainsi, Cela nous permet de développer un algorithme de programmation dynamique dont la complexité est en $O(npk)$.

4 Conclusion

Nous avons développé deux algorithmes combinatoires polynomiaux résolvant p-PMCM lorsque le graphe est une chaîne. En raison de leur complexité, aucun des deux algorithmes ne domine systématiquement l'autre et nous pourrons choisir l'un ou l'autre en fonction de l'instance à résoudre. De plus, nous pouvons utiliser ces algorithmes afin de résoudre p-PMCM lorsque le graphe est un anneau (la complexité des deux algorithmes est alors multipliée par n).

Enfin, il serait intéressant d'étudier la complexité de p-PMCM dans certains graphes comme les arbres orientes ou les arborescences pour lesquels PMCM est résolu en temps polynomial.

Références

1. M.-C. Costa, L. Létocart et F. Roupin. A greedy algorithm for multicut and integral multiflow in rooted trees. Operation Research Letters 31, 21-27 (2003)
2. N. Garg, V.V. Vazirani et M. Yannakakis. Primal-dual approximation algorithms for integral flow and multicut in trees. Algorithmica 18, 3-20. (1997)