Programmation quadratique en variables 0-1 avec contraintes d'égalité : méthodes de valeur propre pour le calcul de bornes et de solutions exactes

M-C. Plateau[1], A. Billionnet[2], and S. Elloumi[1]

[1] CEDRIC, Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint-Martin, 75141 Paris
{mc.plateau,elloumi}@cnam.fr
[2] CEDRIC, Institut d'Informatique d'Entreprise, 18 allée Jean Rostand, 91025 Evry
billionnet@iie.cnam.fr

Nous considérons le problème suivant de programmation quadratique en variables 0-1 sous des contraintes linéaires d'égalité :

$$(QP) \ : \quad \text{Min} \ \ \{q(x) = x^t Q x + c^t x : Ax = b, \ x \in \{0,1\}^n\}$$

où Q est une matrice symétrique d'ordre n, A est une matrice $m \times n$ et c (resp. b) est un vecteur de n (resp. m) composantes.

Le modèle (QP) est très général et permet de formuler de nombreux problèmes d'Optimisation Combinatoire parmi lesquels nous pouvons citer l'affectation quadratique, certains problèmes de placement de tâches ou d'investissement, et plusieurs problèmes d'optimisation dans les graphes.

Nous nous intéressons à la résolution exacte du problème (QP) par la méthode suivante en deux phases. La Phase I, qui peut être vue comme une phase de prétraitement, consiste à transformer (QP) en un problème (QP') qui possède les deux propriétés suivantes : (1) il est équivalent à (QP), (2) contrairement à (QP), la résolution de sa relaxation continue nous ramène à un problème d'optimisation quadratique convexe. La Phase II consiste simplement à soumettre (QP') à un solveur de programmes quadratiques convexes en nombres entiers.

Cette approche en deux phases n'est pas nouvelle. Elle est proposée par Hammer et Rubin dans [2] mais n'a pas été beaucoup étudiée par la suite, tout au moins dans un processus de résolution exacte. Dans [2], la Phase I consiste à calculer la plus petite valeur propre de la matrice Q, $\lambda_{min}(Q)$. Puis, la Phase II résout le problème (QP') suivant :

$$(QP') \ : \quad \text{Min} \ \ \{q'(x) = q(x) - \lambda_{min}(Q) \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_i) : Ax = b, \ x \in \{0,1\}^n\}$$

dont on peut aisément montrer qu'il est équivalent à (QP) et que sa fonction objectif q' est convexe.

Dans ce travail, nous proposons une amélioration de la méthode de Hammer et Rubin. Etant donné un scalaire a, nous construisons le problème (QP_a) suivant :

$$(QP_a) \ : \ \underset{\substack{Ax=b \\ x \in \{0,1\}^n}}{\text{Min}} \ q_a(x) = x^t Q x + c^t x + a(Ax-b)^t.(Ax-b) - \lambda_{min}(Q_a) \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_i)$$

où $Q_a = Q + aA^t.A$. Nous montrons que (QP_a) est équivalent à (QP) et que sa fonction objectif q_a est convexe. Pour $a = 0$, le problème (QP_0) est même identique à (QP'). Nous disposons ainsi d'une famille de problèmes (QP_a), dont chacun peut être utilisé dans la phase II de l'approche générale décrite ci-dessus. La principale différence entre ces problèmes est qu'ils ne fournissent pas la même borne par relaxation continue. Se pose alors un nouveau problème : comment trouver a tel que la borne $\beta(a) = \text{Min}\{q_a(x) : \; Ax = b, \; x \in [0,1]^n\}$ soit la plus grande possible. Nous montrons que ce problème se ramène au problème du calcul de a tel que la plus petite valeur propre $\lambda_{min}(Q_a)$ soit maximale. Il est connu que ce dernier problème peut être vu comme le dual du problème de programmation semidéfinie positive suivant :

$$(SDP) \quad : \quad \begin{array}{rrl} \text{Min} & < Q, X > & \\ \text{s.c. :} & tr(X) & = 1 \\ & < A^t.A, X > & = 0 \\ & X \succeq 0 & \end{array}$$

où la notation $< U, V >$ désigne le produit scalaire matriciel $tr(U^t.V)$. Ainsi, nous disposons d'une nouvelle méthode générale de résolution exacte de (QP). Dans sa Phase I, on résout (SDP) pour obtenir une valeur optimale a^* et la plus petite valeur propre correspondante $\lambda_{min}(Q_{a^*})$. Dans sa Phase II, on résout (QP_{a^*}) par un solveur de programmes quadratiques convexes en nombres entiers. Nous savons que cette méthode est meilleure que celle suggérée par Hammer et Rubin au sens où l'algorithme B&B de la Phase II utilise de meilleures bornes.

Afin d'avoir une première évaluation expérimentale de cette nouvelle méthode générale, nous l'utilisons pour résoudre le problème du k-sous-graphe le plus dense. Etant donné un graphe G et un entier k, il s'agit de trouver un sous-graphe de k sommets qui soit le plus dense possible (au mieux, on trouvera une clique de k sommets). Notre implémentation s'appuie sur les logiciels SB [3] pour la résolution de (SDP) et Cplex 9 pour la résolution de (QP_{a^*}). Nous constatons que notre méthode améliore de façon considérable celle de Hammer et Rubin. De plus, elle nous permet de résoudre des instances de taille nettement plus importante que des publications récentes qui utilisent le même type d'instances et des approches différentes [1], [4].

Références

1. Billionnet, A. : Different formulations for solving the heaviest k-subgraph problem. Technical Report CEDRIC 384 (2002)
2. Hammer, P.L., A. Rubin : Some remarks on quadratic programming with 0-1 variables. RIRO 3, pp.67-79 (1970)
3. Helmberg, C. : A C++ implementation of the Spectral Bundle Method. Manual version 1.1.1, http ://www.zib.de/helmberg/SBmethod (2000)
4. Pisinger, D. : Exact solution of p-dispersion problems. Technical Report DIKU 99/14, University of Copenhagen (1999)