Une famille de facettes pour le polytope de l'affectation quadratique

Aurélien Blanchard (1), Sourour Elloumi (2), Alain Faye (1)*, Nicolas Wicker (1)

(1) CEDRIC-IIE 18 allée Jean Rostand 91025 Evry cedex FRANCE
(2) CEDRIC-CNAM 292 rue Saint-Martin 75141 Paris cedex FRANCE

* correspondant: adresse électronique fayea@iie.cnam.fr

Résumé:
Nous abordons le problème de l'affectation quadratique d'un point de vue polyédrique. Nous considérons le polytope de l'affectation quadratique défini comme l'enveloppe convexe des solutions du problème linéarisé. Sa dimension et une description minimale de son enveloppe affine ont été données par Padberg et Rijal (1996). Ici nous proposons une large famille d'inégalités induisant des facettes. Nous montrons que le problème de séparation de cette famille est NP-complet. Nous proposons alors une heuristique pour le problème de séparation que nous implémentons dans un algorithme de coupes. Des résultats numériques montre l'intérêt de cette famille d'inégalités.

Mots clés: affectation quadratique, linéarisation, facettes, algorithme de coupes

1. Introduction

Le problème de l'affectation quadratique (QAP) se pose de la manière suivante:
$\min_{p\in\Pi} \sum_{i=1}^{n} q_{i\,p(i)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{h=1\\h\neq i}}^{n} q_{i\,p(i)\,h\,p(h)}$ où Π est l'ensemble des permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$, $q_{ij}, q_{ij\,hk}$ sont des nombres réels. Dans certains cas, les coefficients à 4 indices ont la forme produit $q_{ij\,hk} = a_{ih}b_{jk}$, a_{ih} modélisant un flux, b_{jk} une distance. Un exemple typique est le problème de localisation d'unités de production dans lequel *n* unités de production doivent être placées en *n* sites. Chaque paire d'unités de production échange une quantité donnée de flux ce qui induit un coût égal au produit de la quantité de flux par la distance entre les sites où sont localisées les unités de production. Le problème du voyageur de commerce est un cas particulier du problème de l'affectation quadratique dans lequel *a* est la matrice d'adjacence d'un cycle.

Le problème de l'affectation quadratique peut se formuler par le programme quadratique en variables 0-1 (PQ) suivant:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{h=1\\h\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} q_{ij\,hk}x_{ij}x_{hk}$$

sous les contraintes

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \;\; j=1,\ldots,n, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \;\; i=1,\ldots,n \;,\; x_{ij}\in\{0,1\} \;\; i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,n$$

Les contraintes d'égalité de ce problème sont les contraintes d'affectation. Dans le contexte de l'exemple précédent, $x_{ij}=1$ si et seulement l'unité de production *i* est placée sur le site *j* et les contraintes d'affectation assurent que chaque unité de production est placée sur un site et que chaque site acceuille une et une seule unité de production.

De nombreuses linéarisations ont été proposées pour QAP qui peuvent être classées en 2 familles. La première repose sur la structure des solutions réalisables et la deuxième sur la structure de la fonction

économique. La première approche consiste à modéliser chaque produit $x_{ij}x_{hk}$ par une variable $y_{ij\,hk}$, $O(n^4)$ variables sont ainsi ajoutées. Les contraintes d'égalités utilisées dans ces modèles proviennent d'agrégations des contraintes d'égalités construites en multipliant les contraintes d'affectation par les variables x_{ij} (Lawler (1963), Christofides, Mingozzi et Toth (1980), Bazaraa et Sherali (1980), Frieze et Yadegar (1983), Adams et Johnson (1994)). Resende, Ramakrishnan et Drezner (1995) considèrent la linéarisation d'Adams et Johnson (1994) utilisant $\frac{1}{2}n^2(n-1)^2$ variables supplémentaires et $2n^2(n-1)$ contraintes supplémentaires. Ils donnent une étude expérimentale approfondie de la relaxation continue qui est résolue par des méthodes de points intérieurs.

La seconde famille de linéarisations opère sur la structure de la fonction objectif. Kaufman et Broeckx (1978) modélisent chaque terme $x_{ij}\sum_{\substack{h=1\\h\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} q_{ij\,hk}x_{hk}$ par une seule variable w_{ij} et ainsi créent n^2 variables supplémentaires. n^2 contraintes supplémentaires sont nécessaires pour assurer l'égalité $w_{ij} = x_{ij}\sum_{\substack{h=1\\h\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} q_{ij\,hk}x_{hk}$. Par une démarche équivalente, Burkard et Bönniger (1983) proposent un algorithme approché.

Toutes ces linéarisations ne sont équivalentes à (PQ) que sous des conditions d'intégrité d'une partie des variables. Par contre leur relaxations continues fournissent des minorants différents. Warren P. Adams, Terri A. Johnson (1994) ont montré que la relaxation continue de leur formulation linéaire domine la relaxation continue de bien des linéarisations de la première famille, la raison essentielle étant que les contraintes d'égalités de ces modèles ne sont que des aggrégations des contraintes d'égalités utilisées par Warren P. Adams, Terri A. Johnson. A partir des résultats de Warren P. Adams, Hanif D. Sherali (1986), ils montrent également la dominance de la relaxation continue de leur formulation linéaire sur la relaxation continue de la formulation de L. Kaufman, F. Broeckx (1978) une linéarisation de la deuxième famille.

Dans le cas des coefficients de type produit $q_{ij\,hk} = a_{ih}b_{jk}$, en considérant les variables x, ainsi que les flux a et les distances b comme des matrices nxn, (PQ) peut être formulé à l'aide de la trace de produits de matrices. Cette formulation permet d'obtenir d'autres familles de bornes inférieures basées sur des méthodes de perturbation des diagonales des matrices a et b, sur le calcul des valeurs propres des matrices a et b, ou sur la programmation semi-définie. Pour plus de détails sur ces approches, voir le survey étendu de Pardalos, Rendl et Wolkowicz (1994).

Dans ce papier, nous nous intéressons aux propriétés polyédriques de la linéarisation de la première famille qui modélise les produits $x_{ij}x_{hk}$ en intégrant les égalités $x_{ij}x_{hk} = x_{hk}x_{ij}$ et $x_{ij}x_{ik} = x_{ij}x_{hj} = 0$ dans la définition même des variables réduisant ainsi leur nombre.

Le programme quadratique (PQ) peut se formuler comme un programme linéaire en remplaçant les produits $x_{ij}x_{hk}$ non nuls (i.e. $i \neq h, j \neq k$) par les variables $y_{ij\,hk}$. On définit alors

$$Q_n := \left\{ (x,y) : \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \;\; j = 1,\ldots,n, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \;\; i = 1,\ldots,n, \\ y_{ij\,hk} = x_{ij}x_{hk} \;\; i \neq h, j \neq k,\; x_{ij} \in \{0,1\} \end{bmatrix} \right\}$$

Ici un point doit être précisé. Les variables $y_{ij\,hk}$ et $y_{hk\,ij}$ prennent place pour le même produit i.e. $y_{ij\,hk} \equiv y_{hk\,ij}$, ainsi le nombre de variables y est $\frac{n^2(n-1)^2}{2}$ et $Q_n \subseteq \{0,1\}^{n^2+\frac{n^2(n-1)^2}{2}}$. Cela revient à indicer les variables y par les ensembles de deux couples de la forme $\{(i,j),(h,k)\}$. Pour simplifier on notera $y_{ij\,hk}$ ou indifféremment $y_{hk\,ij}$ à la place de $y_{\{(i,j),(h,k)\}}$.

Enfin nous définissons le polytope $P_n := Conv(Q_n)$, l'enveloppe convexe de Q_n.

On obtient ainsi le problème linéaire (PL) suivant:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{h=1\\h\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} q_{ij\ hk}y_{ij\ hk} \quad \text{s.c. } (x,y)\in P_n$$

Pour résoudre ce problème par les techniques de la programmation linéaire (Simplexe, points intérieurs) il est nécessaire d'obtenir la description de P_n par un ensemble si possible minimal d'égalités et d'inégalités linéaires.
Resende, Ramakrishnan et Drezner (1995) ont étudié de manière expérimentale la relaxation de (PL) suivante:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{h=1\\h\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} q_{ij\ hk}y_{ij\ hk} \quad \text{s.c. } (x,y)\in P'_n$$

où

$$P'_n := \left\{ (x,y): \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \;\; j=1,\ldots,n, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \;\; i=1,\ldots,n, \\ \sum_{\substack{h=1\\h\neq i}}^{n} y_{ij\ hk} = x_{ij} \;\; i,j,k=1,\ldots,n,\ k\neq j \\ \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} y_{ij\ hk} = x_{ij} \;\; i,j,h=1,\ldots,n,\ h\neq i \\ y_{ij\ hk}\geq 0, x_{ij}\geq 0 \;\; i\neq h \;\; j\neq k \end{bmatrix} \right\}$$

Les contraintes d'égalité de ce polyèdre comportent d'une part les contraintes d'égalité initiales (contraintes d'affectation) et les contraintes obtenues en multipliant chacune de ces contraintes initiales par la variable x_{ij} et en remplaçant les produits $x_{ij}x_{hk}\ h\neq i, k\neq j$ engendrés par les variables y adéquates. Les contraintes de ce polyèdre sont ainsi valides pour Q_n c'est-à-dire $Q_n \subseteq P'_n$ et finalement $P_n \subseteq P'_n$.

Padberg et Rijal (1996) ont montré que la dimension de P_n est $\dim(P_n) = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)+(n-1)^2+1$ ($n\geq 3$). Parallèlement, ils ont montré que l'enveloppe affine de P_n coïncide avec l'enveloppe affine de P'_n et est donc décrite par l'ensemble des solutions du système d'égalités de P'_n. Ils ont de plus exhibé un sous-ensemble de ces égalités donnant une description minimale de l'enveloppe affine de P_n (voir Billionnet, Elloumi, Faye (1997) pour une autre description minimale). Par dualité, le cardinal de cet ensemble est égal au nombre de variables moins la dimension de P_n soit $2(n-1)+n(n-1)(2n-3)$, soit un gain de $2n+2n^2(n-1) - 2(n-1)+n(n-1)(2n-3) = 3n(n-1)+2$ égalités par rapport au système d'égalités de P'_n.

Soit l'ensemble

$$QL_n := \left\{ \left(x_{hk}\right)_{(h,k)\in\{1,\ldots,n\}^2} : \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^{n} x_{hk} = 1 \;\; k\in\{1,\ldots,n\} \\ \sum_{k=1}^{n} x_{hk} = 1 \;\; h\in\{1,\ldots,n\} \\ x_{hk}\in\{0,1\} \quad \forall (h,k) \end{bmatrix} \right\}$$

et le polytope $PL_n := Conv\left(QL_n\right)$, l'enveloppe convexe de QL_n. Ce polytope est le polytope de l'affectation linéaire d'ordre n. La description linéaire de ce polytope est obtenue en relachant les conditions d'intégrité $x_{hk} \in \{0,1\}$ en $x_{hk} \geq 0$ $\left(\forall (h,k)\right)$ dans la définition de QL_n (Birkoff (1946)).
La dimension de PL_n est $(n-1)^2$ (voir 1.7 p.97 et 1.11 p.99-100, Marcus et Minc 1964) et les inégalités $x_{hk} \geq 0$ induisent des facettes pour $n \geq 2$.

En ce qui concerne les facettes de P_n, les inégalités $y_{ij\,hk} \geq 0$ ont été identifiées comme telles par Padberg, Rijal (1996). Ces inégalités suffisent pour décrire les facettes de P_n pour $n=3$ mais ne suffisent plus dès que $n \geq 4$.
Ici nous proposons une famille d'inégalités (incluant les inégalités $y_{ij\,hk} \geq 0$) valides pour P_n et induisant des facettes. Cette famille permet de décrire l'ensemble des facettes de P_4. Le problème de séparation de cette famille est NP-complet. Nous proposons alors un algorithme de séparation approché que nous implémentons dans un algorithme de coupes. Les résultats numériques obtenus sur des problèmes de tailles modestes ($n \leq 16$) sont prometteurs dans le sens où dans la plupart des cas l'algorithme de coupes atteint une solution 0-1 (i.e. résout QAP) et dans les autres cas améliore sensiblement les précédentes bornes inférieures fondées sur la programmation linéaire (Resende, Ramakrishnan, Drezner (1995)). De plus quelques comparaisons avec des bornes basées sur la programmation semi-définie (Karisch (1995)) montrent que la borne obtenue est tout-à-fait compétitive avec des approches non-linéaires.

Etablissons quelques notations:

- l'ensemble des n indices $N:=\{1,\ldots,n\}$

- un couple est une paire ordonnée (i,j). Le premier (resp. second) élément du ou des couples indiçant les variables x ou y est appelé indice de ligne ou encore plus simplement ligne (resp. colonne). Par exemple dans x_{ij}, $y_{ij\,hk}$ i, h, sont des indices de lignes and j, k sont des indices de colonnes.

- le nombre d'éléments d'un ensemble E est noté $|E|$.

2. Symétries de P_n

Nous commençons par donner deux propriétés basiques de P_n qui seront utiles pour la suite.

Soit P une application linéaire, bijective, de $\mathbb{R}^{n^2+\frac{1}{2}n^2(n-1)^2}$ dans $\mathbb{R}^{n^2+\frac{1}{2}n^2(n-1)^2}$ t.q. Q_n, l'ensemble des points extrêmes de P_n, est stable par P i.e. $P(Q_n)=Q_n$.
Alors P_n est stable par P i.e. $P(P_n)=P_n$ et
F est une facette de P_n ssi $P(F)$ est une facette de P_n
$a(x,y) \geq 0$ est une inégalité valide qui induit une facette F de P_n ssi $a(P^{-1}(x,y)) \geq 0$ est une inégalité valide qui induit une facette $P(F)$ de P_n .

Donnons deux exemples d'application P.

2.1. permutation lignes, permutation colonnes

Soient L et C deux permutations de $N=\{1,\ldots,n\}$.
Alors P définie par $P(x,y)=(x',y')$ où $\begin{cases} x'_{ij} = x_{L(i)C(j)} \\ y'_{ij\,hk} = y_{L(i)C(j)\,L(h)C(k)} \end{cases}$
vérifie les 3 critères voulus (linéaire, bijective, stabilité de Q_n).

Dans ce cas, l'inégalité $a(P^{-1}(x,y)) \geq 0$ se déduit de l'inégalité $a(x,y) \geq 0$ par une simple renumérotation des variables.

2.2. transposition lignes-colonnes

P définie par $P(x,y)=(x',y')$ où $\begin{cases} x'_{ij} = x_{ji} \\ y'_{ij\,hk} = y_{ji\,kh} \end{cases}$
vérifie les 3 critères voulus (linéaire, bijective, stabilité de Q_n). Noter que $P^{-1}=P$.

Dans ce cas, l'inégalité $a(P^{-1}(x,y))\geq 0$ se déduit de l'inégalité $a(x,y)\geq 0$ en transposant les indices de lignes et de colonnes des variables.

3. Inégalités valides

Définition.
Soit $n\geq 4$.
Soit i, h, l ($i\neq h$, $l\neq i$, $l\neq h$) 3 indices de ligne distincts et j un indice de colonne.
On considère l'inégalité $I'_C \equiv \sum_{c\in C} y_{ij\,lc} \leq \sum_{k\in A} y_{ij\,hk} + \sum_{c\in C} \sum_{\substack{b\in B \\ b\neq c}} y_{lc\,hb}$

avec $A \cap B = \varnothing,\ A \cup B = N - \{j\},\ |A| \geq 1,\ |B| \geq 1,\ C \subseteq B$.

Proposition 1.
I'_C est une inégalité valide pour P_n.

Preuve.
Par définition de P_n, il est suffisant de vérifier la proposition sur Q_n (les sommets de P_n). Soit $(x,y)\in Q_n$, montrons que (x,y) verifie I'_C. Premièrement remarquons que le membre droit de l'inégalité n'est pas négatif. De plus l'une au plus des variables du membre de gauche peut prendre la valeur 1 (en raison de la contrainte $\sum_{c=1}^{n} x_{lc} = 1$). Il suffit de vérifier que dans ce cas (membre de gauche non nul), le membre droit vaut 1. Supposons maintenant que le membre de gauche n'est pas nul. Alors il existe une et une seule colonne $c\in C$ t.q. $x_{ij} = x_{lc} = 1$, ce qui implique $x_{hj} = x_{hc} = 0$ et $\sum_{k'=1}^{n} x_{hk'} = \sum_{\substack{b\in B \\ b\neq c}} x_{hb} + \sum_{k\in A} x_{hk} = 1$ puisque $B \cup A - \{c\} = N - \{j,c\}$ et finalement (x,y) satisfait

$$x_{lc} \sum_{\substack{b\in B \\ b\neq c}} x_{hb} + x_{ij} \sum_{k\in A} x_{hk} = \sum_{\substack{b\in B \\ b\neq c}} y_{lc\,hb} + \sum_{k\in A} y_{ij\,hk} = 1.$$

□

Exemple: n=5, i=2, j=1, h=4, l=3, C={3,4}, A={2}

$$\begin{matrix} y_{2133} \\ +y_{2134} \end{matrix} \leq \begin{matrix} y_{2142} & +y_{3344} & +y_{3345} \\ & +y_{3443} & +y_{3445} \end{matrix}$$

Si $x_{21} = x_{33} = 1$ alors $x_{41} = x_{43} = 0$ et la contrainte d'affectation $x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$ devient $x_{42} + x_{44} + x_{45} = 1$. En multipliant judicieusement cette égalité par x_{21} et x_{33}, on obtient $x_{21}x_{42} + x_{33}(x_{44} + x_{45}) = 1$, et le membre droit de l'inégalité est égal au membre gauche. L'autre alternative est le cas $x_{21} = x_{34} = 1$ qui se démontre de manière analogue.

Proposition 2.
Un sommet de P_n sature I'_C (i.e. satisfait I'_C avec égalité) si et seulement si il satisfait les conditions:

$$\begin{cases} \forall c \in C \ x_{lc} = 0 \Rightarrow x_{ij} + \sum_{k \in A} x_{hk} \le 1 \\ \exists c \in C \ x_{lc} = 1 \Rightarrow x_{hj} + x_{ij} + \sum_{k \in A} x_{hk} \ge 1 \end{cases}$$

(par convention si C vide alors $x_{lc} = 0 \ \forall c \in C$)

Preuve.
Si $\forall c \in C \ x_{lc} = 0$ alors l'inégalité devient $0 \le \sum_{k \in A} y_{ijhk}$, expression qui s'annule (sur Q_n) ssi $x_{ij} = 0$ ou $\sum_{k \in A} x_{hk} = 0$.
Si $\exists c \in C \ x_{lc} = 1$ alors l'inégalité devient (sur Q_n) $x_{ij} \le \sum_{k \in A} y_{ijhk} + \sum_{\substack{b \in B \\ b \neq c}} x_{hb}$. Si $x_{ij} = 1$ l'inégalité est saturée car le second membre n'excède pas 1. Si $x_{ij} = 0$ l'inégalité est saturée ssi $\forall b \in B \ x_{hb} = 0$ (noter que x_{hc}=0) et puisque les sommets satisfont la contrainte $\sum_{k'=1}^{n} x_{hk'} = 1$ la condition $\forall b \in B \ x_{hb} = 0$ peut s'écrire $x_{hj} + \sum_{k \in A} x_{hk} = 1$.

□

Remarque: on peut vérifier facilement que P_n n'est pas inclu dans la face induite par I'_C (I'_C induit une face propre de P_n). Considérer un sommet de P_n t.q. $x_{ij} = 1$, $x_{hk} = 1$ $(k \in A)$ et $\begin{cases} \text{si } |A| \ge 2 & x_{lk'} = 1 \ (k' \in A - \{k\}) \\ \text{si } C \neq B & x_{lb=1} \ (b \in B \setminus C) \end{cases}$ (alors la première condition de proposition2 n'est pas vérifiée). Par contre, si $|A| = 1$ et $C = B$ (alors $|C| = n - 2 \ge 2$) considérer un sommet de P_n t.q. $x_{lc} = 1 \ (c \in C), x_{ik} = 1 \ (k \in A), x_{hc'} = 1 \ (c' \in C - \{c\})$ (alors la deuxième condition de proposition2 n'est pas vérifiée).

En appliquant à I'_C l'application P définie section 2.2 (transposition lignes-colonnes), on obtient une nouvelle famille d'inégalités valides.

Définition et Proposition.
Soit $n \ge 4$.
Soit j, k, l ($j \neq k$, $l \neq j$, $l \neq k$) 3 indices de colonnes distincts et i un indice de ligne.
On considère l'inégalité $I'_L \equiv \sum_{c \in L} y_{ijcl} \le \sum_{h \in A} y_{ijhk} + \sum_{c \in L} \sum_{\substack{b \in B \\ b \neq c}} y_{clbk}$
avec $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = N - \{i\}$, $|A| \ge 1$, $|B| \ge 1$, $L \subseteq B$.
Alors I'_L est valide pour P_n.

Exemple: reprenons l'exemple précédent et transposons lignes et colonnes, on obtient l'inégalité

$$y_{1233} + y_{1243} \le y_{1224} + y_{3344} + y_{3354} + y_{4334} + y_{4354}$$

avec i=1, j=2, k=4, l=3, L={3,4}, A={2}

Remarque
Les familles I'_C et I'_L sont stables par toute application P définie section 2.1 (permutation lignes-permutation colonnes).

4. Inégalités I_C, I_L

On considère ici les inégalités I'_C et I'_L t.q. A contient un seul élément. Dans ce cas, on notera I_C pour I'_C et I_L pour I'_L .

Théorème 1
Pour $n \geq 4$ si $|C| \leq n-3$ alors I_C induit une facette de P_n.

démonstration
voir section preuves

Pour $C = \emptyset$, $I_C \equiv y_{ijhk} \geq 0$ et on retrouve le résultat de Padberg et Rijal (1996).

Remarque 1.
Soit $n \geq 4$. Si $|C| = n-2$ alors I_C est la somme des inégalités $y_{i'jh'k} \geq 0$ $i' \in N - \{i,h,l\}$, $h' \in N - \{h,l,i'\}$ où k est l'unique élément de A.

Preuve.
Pour tout sous-ensemble M de N, nous utiliserons la notation $\notin M$ pour $\in N - M$. Utilisant les égalités satisfaites par les points de P_n (voir section1), nous établissons:

$$\sum_{i' \notin \{i,h,l\}} \sum_{h' \notin \{h,l,i'\}} y_{i'jh'k} = \sum_{i' \notin \{i,h,l\}} \left(x_{i'j} - y_{i'jhk} - y_{i'jlk} \right)$$

$$= \left(1 - x_{hj} - x_{ij} - x_{lj}\right) + \left(y_{ijhk} + y_{ljhk} - x_{hk}\right) + \left(y_{ijlk} + y_{hjlk} - x_{lk}\right)$$

$$= y_{ijhk} + \left(1 - x_{lj} - x_{lk}\right) + \left(y_{ljhk} - x_{hk}\right) + \left(y_{ijlk} - x_{ij}\right) + \left(y_{hjlk} - x_{hj}\right) \text{ réordonnant les termes}$$

$$= y_{ijhk} + \sum_{c \notin \{j,k\}} x_{lc} - \sum_{c \notin \{j,k\}} y_{lchk} - \sum_{c \notin \{j,k\}} y_{ijlc} - \sum_{c \notin \{j,k\}} y_{hjlc}$$

$$= y_{ijhk} + \sum_{c \notin \{j,k\}} \left(x_{lc} - y_{lchk} - y_{hjlc} \right) - \sum_{c \notin \{j,k\}} y_{ijlc} \text{ réordonnant les termes}$$

$$= y_{ijhk} + \sum_{c \notin \{j,k\}} \sum_{b \notin \{j,k,c\}} y_{lchb} - \sum_{c \notin \{j,k\}} y_{ijlc}$$

Ajoutant la condition de non-négativité à ce dernier terme, nous obtenons I_C avec $A=\{k\}$ et $C=B=N-\{j,k\}$.

□

Le résultat précédent nous renseigne sur la nécessité de la condition sur le cardinal maximum de C.
Pour $n=4$ si $|C| = n-2$ (i.e. $C=B$) alors I_C est équivalente à une inégalité $I_\emptyset$ et induit donc une facette.
Pour $n \geq 5$ si $|C| = n-2$ (i.e. $C=B$) alors I_C n'induit pas une facette de P_n car c'est la somme de plusieurs inégalités $I_\emptyset$.

Résultat
Pour $n \geq 4$ si $|L| \leq n-3$ alors I_L induit une facette de P_n. Pour $n \geq 5$ la condition sur la taille maximum de L est nécessaire.

démonstration
On applique à I_C l'application P définie section 2.2 (transposition lignes-colonnes).

□

Le polytope P_3 est un simplexe dont les 6 facettes peuvent être décrites par des inégalités $y_{ij\,hk} \geq 0$. Pour P_4 ces inégalités ne suffisent plus et les inégalités I_C et I_L sont nécessaires (et suffisantes). On a précisément:

Propriété
P_4 peut être décrit par les inégalités I_C , I_L. Par ailleurs P_4 admet 144 facettes qui sont toutes des simplexes et donc P_4 est simplicial.

Démonstration: voir section preuves.

5. Inégalités I'C, I'L

Théorème 2
Pour $n \geq 4$, l'inégalité I'_C induit une facette de P_n si $1 \leq |C| \leq n-2-|A|$.
démonstration: voir section preuves.

Remarque 2.
Pour C vide et $|A| \geq 2$, alors il est facile de voir que I'_C n'induit pas une facette (I'_C est une somme d'inégalités de type $I_\varnothing$).
Pour $|A| = 1$, on retrouve I_C et la condition portant sur le cardinal maximum de C devient $|C| \leq n-3$ (i.e. $C \neq B$) qui, on l'a vu, est nécessaire pour $n \geq 5$.
Pour $1 = |C| = n-1-|A|$, supposons $C=\{c\}$ alors $A=N-\{j,c\}$ et $B=\{c\}$. En utilisant les égalités satisfaites par P_n (cf section1), on a:

$$I'_C \equiv 0 \leq \sum_{k \in A} y_{ijhk} - y_{ijlc} = x_{ij} - y_{ijhc} - y_{ijlc} = \sum_{h' \in N-\{i,h,l\}} y_{ijh'c}$$

et donc I'_C est une somme de plusieurs inégalités de type $I_\varnothing$ dès que $n \geq 5$ et n'induit pas dans ce cas une facette.
Par contre pour $|A| \geq 2$ et $|C| \geq 2$, si $|C| = n-1-|A|$ (i.e. $C=B$) il n'est pas prouvé que I'_C n'induit pas une facette.

Résultat
Pour $n \geq 4$, l'inégalité I'_L induit une facette de P_n si $1 \leq |L| \leq n-2-|A|$.

démonstration
On applique à I'_C l'application P définie section 2.2 (transposition lignes-colonnes).

□

6. Algorithmes de séparation

On s'intéresse au problème de séparation des facettes I'_C, les résultats se transposant facilement aux inégalités I'_L.

On supposera dans ce paragraphe que (x,y) est un point de P'_n (voir section1).
Pour tout c appartenant à C, (x,y) vérifie $\sum_{\substack{b \in B \\ b \neq c}} y_{lchb} = x_{lc} - y_{lchj} - \sum_{k \in A} y_{lchk}$ et I'_C s'écrit $\sum_{k \in A} y_{ijhk} + \sum_{c \in C} \left(x_{lc} - y_{lchj} - y_{ijlc} \right) - \sum_{c \in C} \sum_{k \in A} y_{lchk} \geq 0$. Pour i, j, h, l donnés, il ne reste plus qu'à déterminer les ensembles A et C. Dans ce cas (i, j, h, l donnés) la facette I'_C la plus violée par (x,y) est déterminée par la résolution du problème bi-linéaire en 0-1 suivant:

$$\min \sum_{k\in N\setminus\{j\}} a_k z_k + \sum_{c\in N\setminus\{j\}} b_c u_c + \sum_{c\neq k\in N\setminus\{j\}} q_{ck} u_c z_k$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} z_k + u_k \le 1 & k\in N\setminus\{j\} \quad (1) \\ \sum_{k\in N\setminus\{j\}} z_k \ge 1 & (2) \\ \sum_{c\in N\setminus\{j\}} u_c \ge 1 & (3) \\ \sum_{k\in N\setminus\{j\}} (z_k + u_k) \le n-2 & (4) \\ (z_k, u_k) \in \{0,1\}^2 & k\in N\setminus\{j\} \quad (5) \end{cases}$$

avec $a_k = y_{ijhk}$, $b_c = x_{lc} - y_{lchj} - y_{ijlc}$, $q_{ck} = -y_{lchk}$

La signification des variables est la suivante:

$$z_k = \begin{cases} 1 \text{ si } k \text{ est mis dans } A \\ 0 \text{ sinon } (k \text{ est mis dans } B) \end{cases}$$

$$u_k = \begin{cases} 1 \text{ si } k \text{ est mis dans } C \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La signification des contraintes est la suivante:
(1) k est mis dans A ou C ou $B\setminus C$
(2) A est non vide
(3) C est non vide
(4) $B\setminus C$ est non vide (i.e. $B\neq C$)

Noter que, comme (x,y) appartient à P'_n, les coefficients a_k, b_c sont positifs (ou nuls) et q_{ck} négatifs (ou nuls).

Soit v^* la valeur optimale du problème et z^*, u^* une solution (optimale).
Si $v^*\ge 0$ alors (pour i, j, h, l donnés) il n'existe pas de facettes I'_C violée par (x,y) sinon la facette I'_C définie avec i, j, h, l et $A=\{k: z^*_k=1\}$ et $C=\{c: u^*_c=1\}$ est violée par (x,y)

On remarque que toute facette violée vérifie les contraintes (2) et (3) car sinon on obtient une solution de valeur positive ou nulle. On peut donc supprimer (2) et (3) sans pour autant écarter de facettes violées. Maintenant discutons de la complexité du problème résultant. Pour simplifier les notations, posons $M=N\setminus\{j\}$ et $m = |M|$. On obtient le programme:

$$Pb(M) \quad \min \sum_{k\in M} a_k z_k + \sum_{c\in M} b_c u_c + \sum_{c\neq k\in M} q_{ck} u_c z_k$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} z_k + u_k \le 1 & k\in M \quad (1) \\ \sum_{k\in M} (z_k + u_k) \le m-1 & (4) \\ (z_k, u_k) \in \{0,1\}^2 & k\in M \quad (5) \end{cases}$$

avec $a_k \ge 0$, $b_c \ge 0$, $q_{ck} \le 0 \quad \forall c,k\in M$

Maintenant, montrons que $Pb(M)$ est NP-complet. Pour cela, montrons que Max-Cut (Garey, Johnson 1979) se réduit à $Pb(M)$. Max-Cut se définit de la façon suivante: étant donné un graphe $G=(V,E)$ simple, non-orienté, muni de poids $c_e\ge 0$ pour toute arête e de E (on peut toujours supposer G complet quitte à rajouter des poids c_e nuls), trouver un sous-ensemble U de V tel que $\sum_{e\in\delta(U)} c_e$ est maximum où $\delta(U)$ désigne les arêtes $e=(i,j)$ avec i dans U et j dans $V\setminus U$.

Proposition: Max-Cut se réduit à $Pb(M)$ en temps polynomial.
démonstration.
Max-Cut peut se formuler en le problème bi-linéaire suivant:

$$MC(G) \quad \begin{cases} \max \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}(u_i z_j + u_j z_i) \\ \text{s.c.} \begin{cases} z_i + u_i = 1 & i \in V \\ (z_i, u_i) \in \{0,1\}^2 & i \in V \end{cases} \end{cases}$$

avec $u_i = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $z_i = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \in V \setminus U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Considérons le problème $\overline{MC}(G)$ où pour tout sommet i de V on relâche la contrainte d'égalité $z_i + u_i = 1$ en la contrainte d'inégalité $z_i + u_i \le 1$. A partir de $(z_i, u_i)_{i\in V}$ solution (optimale) de $\overline{MC}(G)$, on peut construire une solution (optimale) de $MC(G)$ en temps polynomial. En effet la non-négativité des poids c_e entraîne que pour tout i tel que $z_i + u_i = 0$, en posant u_i=1 ou bien z_i=1 on construit une nouvelle solution saturant la contrainte d'inégalité et ceci sans dégrader la valeur de l'objectif, c'est-à-dire une solution (optimale) de $MC(G)$.
Maintenant en introduisant un sommet fictif m_0 et en posant:

$$\begin{cases} M = V \cup \{m_0\} \\ a_i = b_i = 0 \quad \forall i \in V \\ a_{m_0} = b_{m_0} = 1 \\ q_{ji} = q_{ij} = -c_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \\ q_{i m_0} = q_{m_0 i} = 0 \quad \forall i \in V \end{cases}$$

$Pb(M)$ devient:

$$\min z_{m_0} + u_{m_0} - \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\left(u_i z_j + u_j z_i\right)$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} z_i + u_i \le 1 & i \in V \\ z_{m_0} + u_{m_0} \le 1 \\ \sum_{i\in V} (z_i + u_i) + z_{m_0} + u_{m_0} \le |V| \\ (z_i, u_i) \in \{0,1\}^2 & i \in V \\ (z_{m_0}, u_{m_0}) \in \{0,1\}^2 \end{cases}$$

alors $(z_i, u_i)_{i\in V\cup\{m_0\}}$ solution optimale de ce problème vérifie $z_{m_0} = u_{m_0} = 0$ et par conséquent $(z_i, u_i)_{i\in V}$ est solution optimale de

$$\min - \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\left(u_i z_j + u_j z_i\right)$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} z_i + u_i \le 1 & i \in V \\ \sum_{i\in V} (z_i + u_i) \le |V| \\ (z_i, u_i) \in \{0,1\}^2 & i \in V \end{cases}$$

On remarque que la deuxième inégalité est maintenant redondante. En la retirant et en multipliant l'objectif par -1, on obtient $\overline{MC}(G)$.

□

Il résulte de cette proposition que $Pb(M)$ est NP-complet et que par suite le problème de séparation des facettes I'_C est lui aussi NP-complet.

Nous allons examiner deux restrictions particulières du problème de séparation.

6.1. Recherche de facettes t.q. $|A| = 1$ (facettes I_C)

Posons $A=\{k\}$ (i.e. z_k=1). Alors le problème de séparation (pour i, j, h, l donnés) devient:

$$\min a_k + \sum_{c \in N \setminus \{j,k\}} (b_c + q_{ck}) u_c$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \sum_{c \in N \setminus \{j,k\}} u_c \le n-3 & (6) \\ u_c \in \{0,1\} & c \in N \setminus \{j,k\} \end{cases}$$

Le problème est maintenant linéaire. On remarque que comme (x,y) est dans P'_n, toute facette I_C violée vérifie la contrainte de cardinalité (6) car si le cardinal de C est n-2 alors I_C est une somme d'inégalités de type $I_\varnothing$ (cf remarque1). Par conséquent on peut relâcher (6) et le problème se résout alors très simplement par l'algorithme suivant:

pour tout c dans N-$\{j,k\}$ **faire**
  si $b_c+q_{ck} \ge 0$ **alors**
    $u_c=0$
  sinon
    $u_c=1$
fait

Cet algorithme est en O(n) et finalement en énumérant sur les indices i, j, h, l et k on obtient un algorithme de séparation des facettes I_C en O(n^6).

6.2. Recherche de facettes t.q. $|C| = 1$

Posons $C=\{c\}$ (i.e. $u_c=1$). Le problème de séparation (pour i, j, h, l donnés) devient:

$$\min \; b_c + \sum_{k \in N \setminus \{j,c\}} (a_k + q_{ck}) z_k$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \sum_{k \in N \setminus \{j,c\}} z_k \le n-3 & (7) \\ z_k \in \{0,1\} & k \in N \setminus \{j,c\} \end{cases}$$

Le problème est maintenant linéaire. On remarque que comme (x,y) est dans P'_n, toute facette $I'_{\{c\}}$ violée vérifie la contrainte de cardinalité (7) car si le cardinal de A est n-2 alors $I'_{\{c\}}$ est une somme d'inégalités de type $I_\varnothing$ (cf. remarque2). Par conséquent on peut relâcher (7) et le problème se résout alors très simplement par l'algorithme suivant:

pour tout k dans N-$\{j,c\}$ **faire**
  si $a_k+q_{ck} \ge 0$ **alors**
    $z_k=0$
  sinon
    $z_k=1$
fait

Cet algorithme est en O(n) et finalement en énumérant sur les indices i, j, h, l et c on obtient un algorithme de séparation des facettes $I'_{\{c\}}$ en O(n^6).

Cet algorithme peut servir de point de départ pour une heuristique pour le problème de séparation.

6.3. Heuristique pour le problème de séparation

Le principe de l'heuristique consiste à partir des inégalités I'_C données par l'algorithme de séparation décrit au paragraphe 6.2 et à compléter leurs ensembles C pour obtenir des contraintes encore plus violées. Pour i, j, h, l et $C=\{c\}$ fixés, l'algorithme de séparation décrit au paragraphe 6.2 donne les ensembles A et B d'une inégalité $I'_{\{c\}}$ la plus violée. On complète l'ensemble C de l'inégalité avec des indices c' tels que $b_{c'} + \sum_{k \in A} q_{c'k} < 0$ de manière à obtenir une inégalité encore plus violée.

Finalement, l'heuristique de sélection d'inégalités I'_C se résume en l'algorihme suivant:

Pour tout i, j, l, c et $h \in N$ tels que $i \neq l \neq h$ et $j \neq c$ faire
lancer l'algorithme de séparation du paragraphe 6.2: on obtient une inégalité $I'_{\{c\}}$ où A et B sont donnés;
Si l'inégalité est violée Alors
$C=\{c\}$; //on va compléter l'inégalité avec d'autres c
Pour tout $c' \in B/\{c\}$ faire

Si $b_{c'} + \sum_{k \in A} q_{c'k} < 0$ alors
$C=C \cup \{c'\}$;

FinSi
Fait
FinSi

Fait

A noter que cet algorithme n'oblige pas C à être strictement inclu dans B (condition qui garantit que l'inégalité induit une facette cf. théorème2) puisque de toute façon la violation de l'inégalité ne peut qu'augmenter.

La complexité de cet algorithme est $O(n^6)$.

Comme on le verra dans la section suivante, en pratique on ne parcourt pas entièrement l'ensemble des valeurs des 5 indices i, j, l, c et h car la recherche est arrêtée dès qu'un nombre suffisant de contraintes violées a été trouvé (cf. section 7.1).

7. Résultats numériques

7.1. Description d'un algorithme de génération de coupes

Les facettes I'_C et I'_L ont été mises en oeuvre dans un algorithme de coupes dont les caractéristiques principales sont les suivantes.
On fixe deux paramètres positifs ε et γ qui permettent de choisir les contraintes violées que l'on ajoute au programme linéaire et celles que l'on retranche: soit $f(x,y) \geq 0$ une inégalité I'_C ou I'_L et soit (x^*, y^*) la solution courante alors si $f(x^*, y^*) \leq -\varepsilon$ cette contrainte sera ajoutée et si $f(x^*, y^*) \geq \gamma$ elle sera supprimée.
Cela signifie que l'on ajoute les contraintes les plus violées et que l'on supprime les contraintes les plus "□respectées□".
Quand la progression de la borne d'une itération à la suivante est trop faible, on divise ε par 10 de façon à accepter plus de contraintes violées et à relancer la progression. Quand le nombre de contraintes du programme courant dépasse un certain seuil (4000) on divise γ par 10 afin de supprimer plus de contraintes. Toujours en vue de limiter la taille des problèmes traités, un 3ème paramètre donne le nombre maximum de contraintes que l'on peut ajouter à une itération, généralement on a pris 800 (avec 400 pour I'_C et 400 pour I'_L).
L'algorithme s'arrête quand il ne trouve plus d'inégalités violées.
A chaque itération le programme linéaire est optimisé par une méthode barrière implémentée dans la fonction Baropt de Cplex. Le premier programme linéaire résolu (programme initial) est le programme décrit par le polyèdre P'_n (section1) avec un système d'égalités non-redondant (i.e. correspondant à une une description minimale de l'enveloppe affine de P_n).

Les jeux d'essais proviennent de l'exécution du programme sur des problèmes de la librairie QAPLIB (Burkard, Karisch, Rendl 1991). La machine sur laquelle ils ont tournés est un Digital AlphaServer 800 5/333 sous Digital Unix 4.0D. La version Cplex utilisée est la version 6.

7.2. Résultats expérimentaux

Dans un premier temps, on a exécuté deux programmes de génération de coupes sur la série de problèmes CAR10; le premier ne générant que des coupes I_C et I_L, (selon l'algorithme exact du paragraphe 6.1) le second générant les coupes I'_C et I'_L (selon l'heuristique du 6.3) afin d'évaluer l'apport de cette dernière famille plus générale. Dans le tableau des résultats, nous donnons les bornes inférieures (Borne inf) obtenues par les deux programmes, le nombre d'itérations (nb.iter) pour les obtenir, l'optimum de chaque problème et l'écart relatif avec cet optimum, calculé comme suit□:

$\frac{\text{optimum-borne inf}}{\text{optimum}} \times 100$.

	Résultats pour les coupes I_C et I_L			Résultats pour les coupes I_C' et I_L'			
Problème	Borne inf	Ecart relatif	nb.iter	Borne inf	Ecart relatif	nb.iter	Optimum
CAR10GA	4957	0	2	4957	0	2	4957
CAR10GB	8006*	0,85	19	8074	0	4	8074
CAR10GC	8667	0	5	8667	0	3	8667
CAR10GD	8668*	1,87	14	8833	0	7	8833
CAR10GE	9348*	2,15	19	9553	0	4	9553
CAR10GF	7831*	0,26	16	7851	0	3	7851
CAR10GG	9539*	4,58	13	9996	0	7	9996
CAR10GH	9558	0	3	9558	0	2	9558
CAR10GI	6344	0	2	6344	0	2	6344
CAR10GJ	10353	0	3	10353	0	2	10353
CAR10GK	6966	0	2	6966	0	2	6966
CAR10GL	11831*	2,05	10	12078	0	8	12078
CAR10GM	7144*	0,35	13	7169	0	3	7169
CAR10GN	10443*	0,41	15	10486	0	4	10486
CAR10GO	9563*	0,04	14	9567	0	3	9567

* borne inférieure arrondie à l'entier supérieur (la fonction objectif est entière)

Ce tableau montre que l'ajout des coupes I'_C et I'_L permet d'obtenir l'optimum dans des cas où on n'y arrivait pas avec les seules coupes I_C et I_L et ceci en un nombre d'itérations toujours inférieur ou égal.

Le tableau suivant contient les résultats détaillés de jeux d'essais mettant en oeuvre les inégalités I'_C et I'_L (selon l'algorithme du 6.3).
La signification des colonnes est la suivante:
- nbvar est le nombre de variables du problème
- contr.init est le nombre de contraintes (égalité) du problème initial
- contr.fin est le nombre de contraintes du dernier problème
- LBinit est la valeur du problème initial
- LBfin est la valeur du dernier problème
- optimum est la valeur de la meilleure solution connue
- Δfin % est l'écart relatif $\frac{\text{optimum}-\text{LBfin}}{\text{optimum}} \times 100$
- gain est le gain relatif de la borne LBfin par rapport à LBinit $\frac{\text{LBfin}-\text{LBinit}}{\text{LBinit}} \times 100$

- nb.iter est le nombre d'itérations
- tps (s) est le temps total d'exécution en secondes

La borne inférieure initiale LBinit correspond à la borne de Resende, Ramakrishnan, Drezner (1995). On constate que l'apport des inégalités I'_C et I'_L améliore sensiblement cette borne inférieure. Le gain est remarquable sur les problèmes ESC08.
L'algorithme arrive à atteindre l'optimum (i.e. LBfin=optimum) de problèmes jusqu'à n=15. Cependant, le temps de calcul devient très important pour n=15 en raison de la taille des problèmes.

Problème	nb.var.	contr.init	contr.fin	LBinit	LBfin	optimum	Δfin %	gain	nb.iter	tps (s)
ESC08A	1632	742	905	0	2 *	2	0	+∞	7	588
ESC08B	1632	742	1565	2	6	8	25	200	21	2658
ESC08C	1632	742	2296	22	29 *	32	9,4	31,82	20	2678
ESC08D	1632	742	2428	2	6*	6	0	200	30	4868
ESC08E	1632	742	1714	0	2*	2	0	+∞	7	639
ESC08F	1632	742	1869	18	18	18	0	0	3	150
NUG08	1632	742	1687	204*	214	214	0	4,67	4	353
SCR10	4150	1548	2349	26874*	26992	26992	0	0,44	2	413
ROU10	4150	1548	2996	170401*	174220	174220	0	2,25	3	998
CAR10GA	4150	1548	2349	4815*	4957	4957	0	2,94	2	378
CAR10GB	4150	1548	2930	7703*	8074	8074	0	4,81	4	1830
CAR10GC	4150	1548	2882	8465*	8667	8667	0	2,38	3	1024
CAR10GD	4150	1548	3482	8347*	8833	8833	0	5,82	7	4465
CAR10GE	4150	1548	2753	8972*	9553	9553	0	6,47	4	1939
ROU12	8856	2794	6510	224303*	235528	235528	0	5,02	49	150912
SCR12	8856	2794	5567	29828*	31410	31410	0	5,31	24	61320
NUG12	8856	2794	6514	523*	559*	578	3,2	6,8	61**	182877
CHR15A	22275	5698	6832	9514*	9896	9896	0	4,01	4	23812
ROU15	22275	5698	9321	324902*	333586*	354210	5,82	2,67	26**	274807
SCR15	22275	5698	7388	49265*	51140	51140	0	3,8	12	207738
NUG15	22275	5698	8848	1041*	1082*	1150	5,91	3,93	20**	271576

* arrondi à l'entier supérieur

** programme interrompu avant la fin

Enfin, nous avons comparé notre borne avec une borne, proposée par Karisch (1995), basée sur la programmation semi-définie. Karisch propose différentes relaxations semi-définies; la meilleure d'entre elles ϕ_{R5} , est obtenue par un algorithme de coupes. Elle revient en fait à considérer la relaxation semi-définie du programme linéaire initial de notre algorithme (p.70 4.4.4 Karisch 1995). Elle est donc toujours supérieure ou égale à la borne donnée à la première itération de notre algorithme (cf. colonnes LBinit et ϕ_{R5} du tableau suivant). Le tableau suivant rassemble les résultats obtenus. Ses colonnes sont:
- LBinit valeur du problème initial (1ère itération)
- LBfin valeur du dernier problème (dernière itération)
- nb.iter nombre d'itérations

- ϕ_{R5} borne obtenue par programmation semi-définie (Karisch 1995)
- no.iter itération à partir de laquelle notre borne dépasse ϕ_{R5}
- optimum valeur de la meilleure solution connue

On voit que l'ajout des facettes I'_C et I'_L permet de rattraper l'écart entre la valeur du programme linéaire initial et la borne ϕ_{R5} et de dépasser celle-ci.

Problème	LBinit	LBfin	ϕ_{R5}	no.iter	nb.iter	Optimum
NUG12	523	559	545	10	61**	578
HAD12	1622	1652	1635	3	6	1652
HAD14	2667	2724	2703	5	10	2724
NUG15	1041	1082	1081	20	20**	1150
HAD16	3561	3653	3648	13	18**	3720

** programme interrompu avant la fin

8. Conclusion et perspectives

Nous avons exhibé une large famille d'inégalités I'_C et I'_L induisant des facettes du polytope de l'affectation quadratique P_n . Nous avons proposé des algorithmes pour résoudre le problème de séparation correspondant et implémenté ceux-ci dans un algorithme de coupes.

D'une manière pratique on a pu mesurer ce que les facettes I'_C et I'_L ont pu apporter au programme linéaire initial de l'algorithme de coupes, en particulier dans le cas des problèmes ESC08 de la librairie QAPLIB (Burkard, Karisch, Rendl 1991). Au vu de l'article de Resende, Ramakrishnan, Drezner (1995), il semblerait que nous ayons obtenu les meilleures bornes inférieures de certains problèmes. On a pu voir aussi l'importance des facettes I'_C et I'_L pour obtenir une relaxation linéaire au moins aussi bonne que la meilleure relaxation semi-définie de Karisch (1995).

La borne est bonne mais la taille des problèmes très importante pour $n \geq 15$ induit un temps de calcul excessif.

Pour réduire la taille nous proposons de travailler, non plus sur P_n , mais sur l'image de P_n au travers d'une application linéaire convenablement choisie. Donnons deux exemples.

Etant donnée une base des contraintes d'égalité (décrivant l'enveloppe affine de P_n), on peut projeter P_n sur les variables hors-base (i.e. éliminer les variables de base). Pour cela il suffit de calculer l'expression des variables de base en fonction des variables hors base puis d'exprimer les inégalités I'_C et I'_L en fonction des variables hors-base uniquement.

Etant donnée une base $B_1, \cdots, B_m$ de l'enveloppe affine de P_n , soit φ la bijection qui à un point de l'enveloppe affine de P_n associe ses coordonnées dans la base i.e. si $(x, y) = \lambda_1 B_1 + \cdots + \lambda_m B_m$ (avec $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$) alors $\varphi(x, y) = (\lambda_1 \cdots \lambda_m)$; on peut résoudre le problème sur $\varphi(P_n)$ (au lieu de P_n). Pour cela il suffit d'exprimer les inégalités I'_C et I'_L en fonction des variables λ (noter que les variables λ sont de signes quelconques).

Dans les deux cas, on obtiendra une diminution du nombre de variables de $O(n^3)$. Par exemple pour n=15, on passera de 22275 variables à 16577 variables soit un gain de 5698 variables.

Une base des contraintes d'égalité peut être trouvée dans Padberg, Rijal (1996) ou dans Billionnet, Elloumi, Faye (1997).
Une base de l'enveloppe affine peut être trouvée dans la section 9 (preuves) à la définition1.

9. Preuves

En préliminaire, nous donnons quelques remarques et notations utiles. En ce qui concerne les notions ou résultats sur les polytopes convexes, se référer aux ouvrages de Brondsted (1983), Nemhauser, Wolsey (1988), Stoer, Witzgall (1970).

Etant donné un polytope P , $\dim(P)$ désigne la dimension de P.

Remarques préliminaires et notations.

R1) L'indépendance affine entraine l'indépendance linéaire dans les espaces affines ne contenant pas 0. L'enveloppe affine de P_n (resp. PL_n) (cf section1) ne contenant pas 0 (les contraintes d'affectation n'admettent pas 0 comme solution), P_n (resp. PL_n) contient $\dim(P_n)+1$ (resp. $\dim(PL_n)+1$) sommets linéairement indépendants et toute facette de P_n (resp. PL_n) contient $\dim(P_n)$ (resp. $\dim(PL_n)$) sommets linéairement indépendants.

Rappelons que $\dim(P_n) = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3) + (n-1)^2 + 1$ pour $n \geq 3$ (Padberg et Rijal 1996) et que $\dim(PL_n)=(n-1)^2$ pour $n \geq 2$ (voir 1.7 p.97 et 1.11 p.99-100 Marcus et Minc 1964) et les inegalités $x_{hk} \geq 0$ induisent les facettes de PL_n.

Rappelons que l'on note Q_n (resp. QL_n) les sommets de P_n (resp. PL_n)

R2) Dans la suite, on aura à considérer des parties de Q_n définies par des conditions C de la forme: $x_{ij} = 1 \ \ \forall (i,j) \in \mathbf{C}$ où $\mathbf{C}$ est un ensemble de couples de lignes et de colonnes. On notera de telle partie $Q_n \cap \left\{ x_{ij} = 1 \ \ \forall (i,j) \in \mathbf{C} \right\}$. On dira que la condition C est *valide* si $Q_n \cap \left\{ x_{ij} = 1 \ \ \forall (i,j) \in \mathbf{C} \right\}$ est non vide (ou de manière équivalente si $QL_n \cap \left\{ x_{ij} = 1 \ \ \forall (i,j) \in \mathbf{C} \right\}$ est non vide).
La condition C est valide ssi $\mathbf{C}$ est un couplage du graphe biparti, complet $G = \left(V_1 \times V_2, E \right)$ avec $V_1=V_2=N$ et $E = V_1 \times V_2$, V_1 représentant les lignes, V_2 les colonnes. Pour vérifier que $\mathbf{C}$ est un couplage de G, il suffit de vérifier qu'une ligne i (resp. colonne j) apparaît au plus une fois dans les extrémités initiales i.e. $\in V_1$ (resp. terminales i.e. $\in V_2$) des arêtes de $\mathbf{C}$.
Plus généralement, soit A_1 une partie de Q_n et A une partie de A_1 t.q. A est l'ensemble des points de A_1 vérifiant une condition C_1 associée à un ensemble de couples $\mathbf{C}_1$. On dira que C_1 est *valide pour* A_1 ssi $A_1 \cap \left\{ x_{ij} = 1 \ \ \forall (i,j) \in \mathbf{C}_1 \right\}$ est non vide. Si A_1 est définie par une condition C_0 associée à un ensemble de couples $\mathbf{C}_0$ c'est-à-dire si $A_1 = Q_n \cap \left\{ x_{ij} = 1 \ \ \forall (i,j) \in \mathbf{C}_0 \right\}$, alors $A = Q_n \cap \left\{ x_{ij} = 1 \ \ \forall (i,j) \in \mathbf{C}_0 \cup \mathbf{C}_1 \right\}$ et C_1 est valide pour A_1 ssi $\mathbf{C}_0 \cup \mathbf{C}_1$ est un couplage de G. Si $\mathbf{C}_1$ est formé d'un unique couple (i,j) et si $\mathbf{C}_0$ est un couplage (i.e. A_1 non vide) alors $\mathbf{C}_0 \cup \mathbf{C}_1$ est un couplage ssi i (resp. j) n'apparaît pas dans les extrémités initiales (resp. terminales) des arêtes de $\mathbf{C}_0$.

R3) Soit $v = \left(v_i \right)_{i \in I}$ un vecteur indéxé par les éléments d'un ensemble I. La projection de v sur les variables indéxées dans $J \subset I$ est le vecteur $v' = \left(v_i \right)_{i \in J}$ c'est-à-dire le vecteur v auquel on a retiré les composantes dans $I \setminus J$.
Soient $i \in N$ un indice de ligne et $j \in N$ un indice de colonne.
La projection de $QL_n \cap \left\{ x_{ij} = 1 \right\}$ sur les variables x indicées dans $\left(N - \{i\} \right) \times \left(N - \{j\} \right)$ est QL_{n-1} .
La projection de $Q_n \cap \left\{ x_{ij} = 1 \right\}$ sur les variables (x,y) indicées dans $\left(N - \{i\} \right) \times \left(N - \{j\} \right)$ est Q_{n-1} .

De plus sur $Q_n \cap \left\{x_{ij}=1\right\}$, on a $y_{ijh'k'} = x_{ij}x_{h'k'} = x_{h'k'}\ \ \forall (h',k') \in \left(N-\{i\}\right)\times\left(N-\{j\}\right)$ et donc projeter un vecteur $v \in Q_n \cap \left\{x_{ij}=1\right\}$ sur $y_{ijh'k'}$ revient à projeter v sur $x_{h'k'}$. Comme par définition de Q_n , $v=(x,y)\in Q_n$ ssi $x \in QL_n$, la projection de $Q_n \cap \left\{x_{ij}=1\right\}$ sur les variables $y_{ijh'k'}$ (h',k') parcourant $\left(N-\{i\}\right)\times\left(N-\{j\}\right)$ est $QL_{n\text{-}1}$.
Maintenant si on rajoute une 2è condition $x_{hk}=1$ t.q. $h\neq i$ et $k\neq j$, on en déduit que la projection de $Q_n \cap \left\{x_{ij}=x_{hk}=1\right\}$ sur les variables $y_{ijh'k'}$ (h',k') parcourant $\left(N-\{i,h\}\right)\times\left(N-\{j,k\}\right)$ est $QL_{n\text{-}2}$.

Soit V un ensemble de variables et $\pi \subset Q_n$, on note $proj_V(\pi)$ la projection des points de π sur V (par raccourci on dira la projection de π sur V) et $rang_V(\pi)$ le rang sur V de π c'est-à-dire le rang de $proj_V(\pi)$. Lorsque V sera omis, $rang(\pi)$ désignera le rang de π.

Définition1
Pour $n\geq 4$, soient les ensembles de variables et de sommets suivants:
- V_1 les variables x,y indexées dans $\left(N-\{1\}\right)\times\left(N-\{1\}\right)$
- Π_1 les sommets de P_n t.q. $x_{11}=1$
- V_{2a}^j les variables $y_{1jhk}\ \ h\in N-\{1,n\}, k\in N-\{j,1\}$
- Π_{2a}^j les sommets de P_n t.q. $x_{1j}=x_{n1}=1$ $\Big\}\ j=2,\ldots,n$
- V_{2b}^i les variables $y_{i1hk}\ \ h\in N-\{i,n\}, k\in N-\{1,2\}$
- Π_{2b}^i les sommets de P_n t.q. $x_{i1}=x_{n2}=1$ $\Big\}\ i=2,\ldots,n-1$

$\begin{cases} - \ V_{2c}^1 \text{ les variables } y_{i1\,nk} \quad i\in\{2,\ldots,n-1\},\ k\in\{3,\ldots,n\} \\ - \ \Pi_{2c}^1 = \bigcup\limits_{\substack{i\in\{2,..,n-1\}\\ k\in\{3,..,n\}}} \Pi_{2c}^{1\,(i,k)} \text{ où } \Pi_{2c}^{1\,(i,k)} \text{ sont les sommets de } P_n \text{ t.q. } x_{i1}=x_{12}=x_{nk}=1 \end{cases}$

$\begin{cases} - \ V_{2c}^2 \text{ les variables } y_{i1\,h2} \quad h\in\{2,\ldots,n-1\},\ i\in\{2,\ldots,n-1\}\ \ i\neq h \\ - \ \Pi_{2c}^2 = \bigcup\limits_{\substack{i,h\in\{2,..,n-1\}\\ i\neq h}} \Pi_{2c}^{2\,(i,h)} \text{ où } \Pi_{2c}^{2\,(i,h)} \text{ sont les sommets de } P_n \text{ t.q. } x_{i1}=x_{n3}=x_{1n}=x_{h2}=1 \end{cases}$

$\begin{cases} - \ V_{2c}^3 \text{ les variables } y_{1j\,nk} \quad j\in\{3,\ldots,n\}, k\in\{3,\ldots,n\}, j\neq k,\ k=3\Rightarrow j\leq n-1 \\ - \ \Pi_{2c}^3 = \bigcup\limits_{\substack{j,k\in\{3,..,n\}\\ j\neq k,\ k=3\Rightarrow j\leq n-1}} \Pi_{2c}^{3\,(j,k)} \text{ où } \Pi_{2c}^{3\,(j,k)} \text{ sont les sommets de } P_n \text{ t.q. } x_{1j}=x_{nk}=1 \end{cases}$

et soit Π l'union des ensembles de sommets précédents.

R e m a r q u e : on vérifie facilement que les conditions qui définissent $\Pi_1, \Pi_{2a}^j, \Pi_{2b}^i, \Pi_{2c}^{1\,(i,k)}, \Pi_{2c}^{2\,(i,h)}, \Pi_{2c}^{3\,(j,k)}$ sont toutes valides (au sens de R2) de sorte qu'aucun de ces ensembles n'est vide.

Lemme 1.
Soit $n\geq 4$, on considère Π l'union des ensembles de sommets de la définition1.
Pour tout ensemble A de sommets de P_n, on définit:

$\eta_1 = rang_{V_1}\left(A\cap\Pi_1\right)$

$r_{2a}^j = rang_{V_{2a}^j}\left(A\cap\Pi_{2a}^j\right)\ \ (j=2,\ldots,n)$

$r_{2b}^i = rang_{V_{2b}^i}\left(A\cap\Pi_{2b}^i\right)\ \ (i=2,\ldots,n-1)$

$r_{2c}^k = rang_{V_{2c}^k}\left(A\cap\Pi_{2c}^k\right)\ \ (k=1,2,3)$

a) On a alors

$r_1 \le \dim\left(P_{n-1}\right)+1$

$r_{2a}^j \le \dim\left(PL_{n-2}\right)+1 \ \ (j=2,\ldots,n)$

$r_{2b}^i \le \dim\left(PL_{n-2}\right)+1 \ \ (i=2,\ldots,n-1)$

$r_{2c}^k \le \left|V_{2c}^k\right| \ \ (k=1,2,3)$

$r_1 + \sum_{j=2}^{n} r_{2a}^j + \sum_{i=2}^{n-1} r_{2b}^i + \sum_{k=1}^{3} r_{2c}^k \le rang(A\cap\Pi) \le \dim\left(P_n\right)+1$ et si les bornes supérieures des rangs r_1, $r_{2a}^j \ (j=2,\ldots,n)$, $r_{2b}^i \ (i=2,\ldots,n-1)$, $r_{2c}^k \ (k=1,2,3)$ sont atteintes les 2 inégalités précédentes deviennent des égalités strictes $r_1 + \sum_{j=2}^{n} r_{2a}^j + \sum_{i=2}^{n-1} r_{2b}^i + \sum_{k=1}^{3} r_{2c}^k = rang(A\cap\Pi) = \dim\left(P_n\right)+1$.

b) De plus

si $A\cap\Pi_1=\Pi_1$ alors r_1 atteint sa borne supérieure

si $A\cap\Pi_{2a}^j=\Pi_{2a}^j$ alors r_{2a}^j atteint sa borne supérieure

si $A\cap\Pi_{2b}^i=\Pi_{2b}^i$ alors r_{2b}^i atteint sa borne supérieure

si $A\cap\Pi_{2c}^{1\,(i,k)}\neq\varnothing \ \forall i\in\{2,\ldots,n-1\}, k\in\{3,\ldots,n\}$ (en particulier si $A\cap\Pi_{2c}^1=\Pi_{2c}^1$) alors r_{2c}^1 atteint sa borne supérieure.

si $A\cap\Pi_{2c}^{2\,(i,h)}\neq\varnothing \ \forall i,h\in\{2,\ldots,n-1\}, i\neq h$ (en particulier si $A\cap\Pi_{2c}^2=\Pi_{2c}^2$) alors r_{2c}^2 atteint sa borne supérieure.

si $A\cap\Pi_{2c}^{3\,(j,k)}\neq\varnothing \ \forall j,k\in\{3,\ldots,n\}, j\neq k, \ k=3\Rightarrow j\le n-1$ (en particulier si $A\cap\Pi_{2c}^3=\Pi_{2c}^3$) alors r_{2c}^3 atteint sa borne supérieure.

Preuve.

Pour les parties 1), 2.a) et 2.b) de la preuve, on suppose $A\cap\Pi_1=\Pi_1$, $A\cap\Pi_{2a}^j=\Pi_{2a}^j$ $(j=2,\ldots,n)$, $A\cap\Pi_{2b}^i=\Pi_{2b}^i$ $(i=2,\ldots,n-1)$. Pour la partie 2.c), on suppose $A\cap\Pi_{2c}^{1\,(i,k)}$ non vide et, sans perte de généralité, contenant un seul élément, ceci pour tout $i\in\{2,\ldots,n-1\}, k\in\{3,\ldots,n\}$. Par raccourci, on notera Π_{2c}^1 à la place de $A\cap\Pi_{2c}^1$. On fait la même hypothèse et le même raccourci pour Π_{2c}^2 et Π_{2c}^3.
Nous allons montrer que les rangs (définis dans l'énoncé du lemme) atteignent leurs bornes supérieures et que les 2 dernières égalités de la partie a) du lemme sont satisfaites avec égalité.

Pour cela nous considèrerons des matrices construites selon la méthode suivante:
soit V un ensemble de variables de P_n et π un ensemble de sommets de P_n, nous construisons la matrice M t.q. chaque colonne de M est la projection d'un point de π sur les variables V. Nous noterons $M=proj_V(\pi)$ et $rang(M)$ désignera le rang de la matrice M (i.e. $rang_V(\pi)$).

1) Soit $M_1=proj_{V_1}\left(\Pi_1\right)$. Les colonnes de M_1 sont les sommets de P_{n-1}. Alors, $rang\left(M_1\right)=\dim\left(P_{n-1}\right)+1=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+(n-2)^2+2$ (cf. remarques R1, R3).

2) a) Soit $M_{2a}=proj_{V_{2a}}\left(\Pi_{2a}\right)$ construite avec $V_{2a}=\bigcup_{j=2}^{n}V_{2a}^j$, $\Pi_{2a}=\bigcup_{j=2}^{n}\Pi_{2a}^j$

Soit $M_{2a}^j = proj_{V_{2a}^j}\left(\Pi_{2a}^j\right)$ $j=2,\ldots,n$. Prenant Π_{2a}^j (resp. V_{2a}^j) dans l'ordre $j=2,\ldots,n$, les blocs M_{2a}^j $(j=2,\ldots,n)$ sont sur la diagonale de M_{2a}. Comme les sommets de P_n satisfont $x_{1j}=1 \Rightarrow \left(x_{1j'}=0 \;\; j'\neq j\right) \Rightarrow \left(y_{1j'h'k'}=0 \;\; h'\neq 1, k'\neq j'\right)$, M_{2a} a ses elements nulles ailleurs et est diagonale par bloc c'est-à-dire $M_{2a} = \begin{pmatrix} M_{2a}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M_{2a}^n \end{pmatrix}$. Les colonnes de M_{2a}^j sont les sommets de PL_{n-2} et le rang de M_{2a}^j est $\dim\left(PL_{n-2}\right)+1=(n-3)^2+1$ (appliquer R1 et R3 avec $(i,j)=(1,j)$ et $(h,k)=(n,1)$). Le rang de M_{2a} est donc $(n-1)\left((n-3)^2+1\right)$.

2)b) Soit $M_{2b} = proj_{V_{2b}}\left(\Pi_{2b}\right)$ construite avec $V_{2b} = \bigcup_{i=2}^{n-1} V_{2b}^i$, $\Pi_{2b} = \bigcup_{i=2}^{n-1} \Pi_{2b}^i$

De façon similaire à a), les blocs $M_{2b}^i = proj_{V_{2b}^i}\left(\Pi_{2b}^i\right)$ $(i=2,\ldots,n-1)$ sont sur la diagonale de $M2b$. Comme les sommets de P_n satisfont $x_{i1}=1 \Rightarrow \left(x_{i'1}=0 \;\; i'\neq i\right) \Rightarrow \left(y_{i'1h'k'}=0 \;\; h'\neq i', k'\neq 1\right)$, $M2b$ est diagonale par bloc. Le rang de M_{2b}^i est $\dim\left(PL_{n-2}\right)+1=(n-3)^2+1$ (appliquer R1 et R3 avec $(i,j)=(i,1)$ et $(h,k)=(n,2)$) et le rang de $M2b$ est $(n-2)\left((n-3)^2+1\right)$.

2)c) Soit $M_{2c} = proj_{V_{2c}}\left(\Pi_{2c}\right)$ construite avec $V_{2c} = V_{2c}^1 \cup V_{2c}^2 \cup V_{2c}^3$, $\Pi_{2c} = \Pi_{2c}^1 \cup \Pi_{2c}^2 \cup \Pi_{2c}^3$.

La diagonale de $M2c$ peut être partitionnée en 3 blocs M_{2c}^k (k=1,2,3) construits avec les variables V_{2c}^k et les points Π_{2c}^k c'est-à-dire $M_{2c}^k = proj_{V_{2c}^k}\left(\Pi_{2c}^k\right)$.

Les sommets de P_n satisfont $x_{i1}=x_{nk}=1 \Rightarrow y_{i'1nk'}=x_{i'1}x_{nk'}=0$ pour $i'\neq i$ ou $k'\neq k$ et, rangeant correctement ses lignes et colonnes, M_{2c}^1 est la matrice identité d'ordre $(n\text{-}2)(n\text{-}2)=\left|V_{2c}^1\right|$.

Les sommets de P_n satisfont $x_{i1}=x_{h2}=1 \Rightarrow y_{i'1h'2}=x_{i'1}x_{h'2}=0$ pour $i'\neq i$ ou $h'\neq h$ et, rangeant correctement ses lignes et colonnes, M_{2c}^2 est la matrice identité d'ordre $(n\text{-}2)(n\text{-}3)=\left|V_{2c}^2\right|$.

Les sommets de P_n satisfont $x_{1j}=x_{nk}=1 \Rightarrow y_{1j'nk'}=x_{1j'}x_{nk'}=0$ pour $j'\neq j$ ou $k'\neq k$ et, rangeant correctement ses lignes et colonnes, M_{2c}^3 est la matrice identité d'ordre $(n-3)^2+(n-4)=\left|V_{2c}^3\right|$.

La condition x_{12}=1 satisfaite par les points de Π_{2c}^1 implique x_{h2}=0 $h\neq$1 et x_{1j}=0 $j\neq$2 et la projection de Π_{2c}^1 sur $V_{2c}^2 \cup V_{2c}^3$ est {0}.

De même, $x_{n3}=1 \Rightarrow x_{nk}=0 \;\; k\neq 3$ et $x_{1n}=1 \Rightarrow x_{1j}=0 \;\; j\neq n$, et la projection de Π_{2c}^2 sur V_{2c}^3 est {0}.

Ceci implique la structure triangulaire supérieure de l'ensemble c'est-à-dire $M_{2c} = \begin{pmatrix} M_{2c}^1 & & \\ 0 & M_{2c}^2 & \\ 0 & 0 & M_{2c}^3 \end{pmatrix}$. Le rang de M_{2c} est au moins la somme des rangs des blocs de la diagonale c'est-à-dire $(n-2)\left(2(n-3)+1\right)+(n-3)^2+(n-4)$.

Maintenant considérons la matrice M construite à partir de l'union des variables $V_1, V_{2a}, V_{2b}, V_{2c}$ (décrites plus haut) et de l'union sommets $\Pi_1, \Pi_{2a}, \Pi_{2b}, \Pi_{2c}$ (décrits plus haut), ordonnant lignes et

colonnes de façon que M_1, M_{2a} ,..., M_{2c} soient sur la diagonale de M et dans cet ordre. Montrons que M est triangulaire supérieure par blocs c'est-à-dire $M = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ 0 & M_{2a} & & \\ 0 & 0 & M_{2b} & \\ 0 & 0 & 0 & M_{2c} \end{pmatrix}$.

Les sommets de P_n satisfont les points suivants:

• $x_{11} = 1 \Rightarrow x_{1j} = x_{i1} = 0 \ (i,j) \in \{2,\ldots,n\}^2$. Par conséquent la projection de Π_1 sur les variables $V_{2a} \cup V_{2b} \cup V_{2c}$ est {0}.

• $x_{n1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_{i1} = 0 & i \neq n \\ x_{nk} = 0 & k \neq 1 \end{cases}$. Par conséquent la projection de Π_{2a} sur les variables $V_{2b} \cup V_{2c}$ est {0}.

• $x_{n2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_{nk} = 0 & k \neq 2 \\ x_{h2} = 0 & h \neq n \end{cases}$. Par conséquent la projection de Π_{2b} sur les variables V_{2c} est {0}.

Donc on a:

$$rang(M) \geq rang(M_1) + rang(M_{2a}) + rang(M_{2b}) + rang(M_{2c})$$

$$\geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + (n-2)^2 + 2$$

$$+(n-1)\left((n-3)^2+1\right) + (n-2)\left((n-3)^2+1\right) + (n-2)\left(2(n-3)+1\right) + (n-3)^2 + (n-4)$$

$$= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3) + (n-1)^2 + 2 = \dim\left(P_n\right) + 1$$

D'autre part, comme les colonnes de M sont les projections des sommets de P_n , on a rang(M)≤dim(P_n)+1.

La figure1 montre la structure de la matrice M dans le cas n=4. Noter que 2 sommets sont candidats pour entrer dans Π_{2c}^3. Nous avons, arbitrairement, choisi le sommet t.q. $x_{31} = 1$.

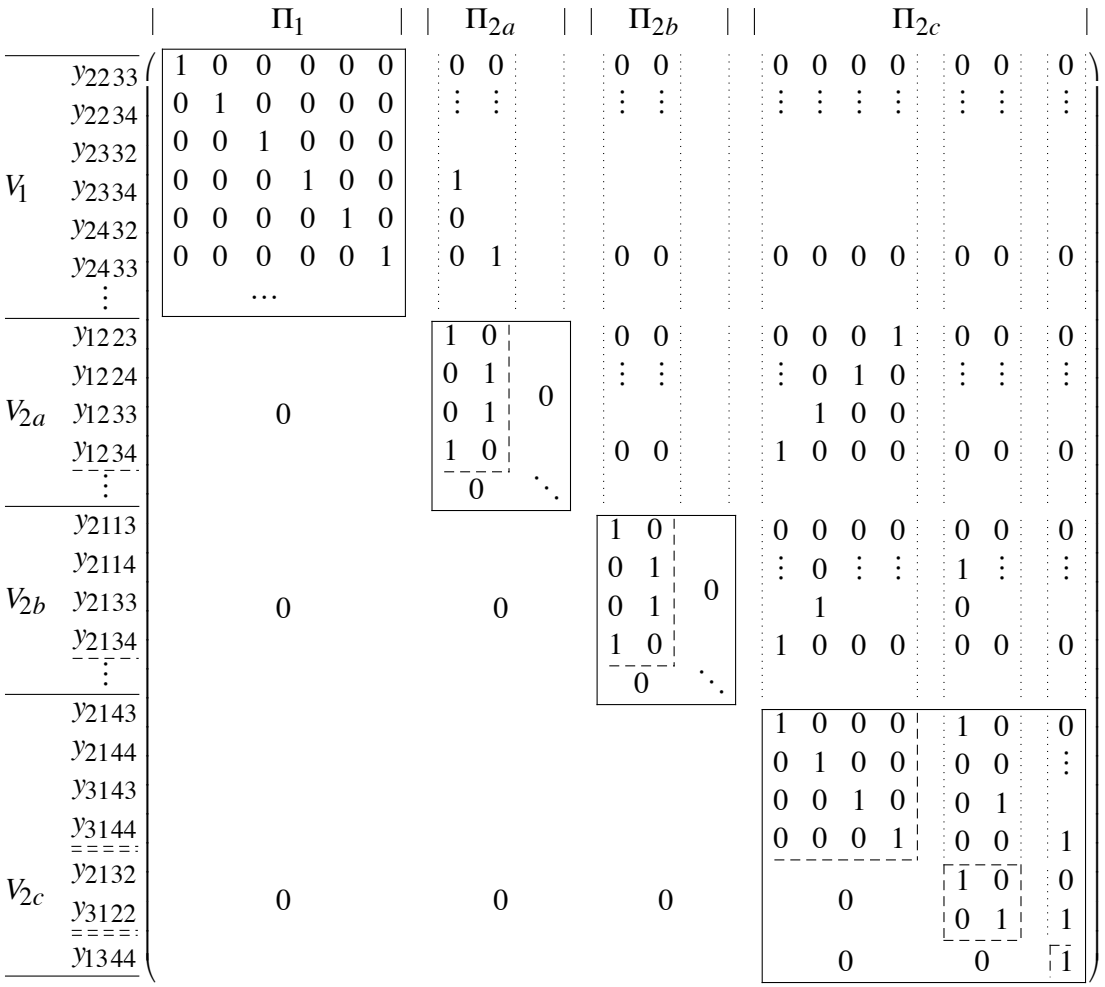

figure1
Matrice M pour n=4 (preuve du Lemme 1)

Les matrices M_1, M_{2a}, M_{2b}, M_{2c} sont entourées en trait plein ——

Dans M_{2a}, est représentée M^2_{2a} entourée en trait discontinu - - - -
De même, dans M_{2b}, est représentée M^2_{2b} entourée en trait discontinu
et dans M_{2c}, sont représentées $M^1_{2c}M^2_{2c}M^3_{2c}$ entourées en trait discontinu

□

notation: pour toute partie A des sommets de P_n, on notera $A \cap I_C$ les points de A qui saturent l'inégalité I_C. De même pour I'_C.

théorème1
Pour $n \geq 4$ si $|C| \leq n-3$ alors I_C induit une facette de P_n.

preuve:
Sans perte de généralité (cf. section 2.1) choisissons $i = n-1, h = 1, l = n, j = 1, A = \{2\}$, $B = \{3,4,\ldots,n\}$, $C = \{p, p+1,\ldots,n\}$ $p \geq 4$ (pour $p \geq n+1$ $C = \varnothing$) et montrons que $I_C \equiv \sum_{c \in C} y_{(n-1)1nc} \leq y_{(n-1)112} + \sum_{c \in C} \sum_{\substack{b \in B \\ b \neq c}} y_{nc1b}$ induit une facette de P_n.

On procède par récurrence sur le cardinal de C ou plus précisemment sur p.

Considérons les points de l'ensemble Π de la définition1.
Dans Π^1_{2c}, pour chaque couple (i,k) (i=2,...,n-1 k=3,...,n) on peut toujours supposer que $\Pi^{1\,(i,k)}_{2c}$ contient un unique point (donc t.q. x_{i1}=x_{12}=x_{nk}=1) car alors $rang_{V^1_{2c}}\left(\Pi^1_{2c}\right)$ est toujours maximum c'est-à-dire égal à $\left|V^1_{2c}\right|$ (cf. lemme 1b)).

Définissons $\Pi_4 = \Pi \cap I_{\{4,\ldots,n\}}$

et pour $n \geq p \geq 4$ $\begin{cases} \Pi_{p+1} = \Pi_p - \left\{\text{le point de } \Pi^1_{2c} \text{ t.q. } x_{(n-1)1} = x_{np} = x_{12} = 1\right\} \\ \qquad\qquad + \left\{\text{un point (extrême) t.q. } x_{(n-2)1} = x_{np} = x_{13} = 1\right\} \end{cases}$

Montrons que le rang de Π_p est au moins dim(P_n) et que ces points saturent I_C pour tout $n+1 \geq p \geq 4$.

Les conditions de la proposition2 pour saturer I_C s'écrivent $\begin{cases} \forall c \in \{p,\ldots,n\}\ x_{nc} = 0 \Rightarrow x_{(n-1)1} + x_{12} \leq 1 \\ \exists c \in \{p,\ldots,n\}\ x_{nc} = 1 \Rightarrow x_{11} + x_{(n-1)1} + x_{12} \geq 1 \end{cases}$

• p=4.

Sur Π_1: $x_{11} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_{(n-1)1} + x_{12} = 0 \\ x_{11} + x_{(n-1)1} + x_{12} = 1 \end{cases}$. Donc $\Pi_1 \cap I_C = \Pi_1$ (tous les points de Π_1 saturent I_C).

Sur Π^j_{2a}: $x_{n1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_{nc} = 0 \ \ (c = 4,\ldots,n) \\ x_{(n-1)1} = 0 \end{cases}$. Donc $\Pi^j_{2a} \cap I_C = \Pi^j_{2a}$

Sur Π^i_{2b}: $x_{n2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_{nc} = 0 \ \ (c = 4,\ldots,n) \\ x_{12} = 0 \end{cases}$. Donc $\Pi^i_{2b} \cap I_C = \Pi^i_{2b}$

Sur Π^1_{2c} on a $x_{12} = 1$. Donc un point de Π^1_{2c} sature I_C ssi $x_{(n-1)1} = 0$ ou $x_{nk} = 1$ pour un $k \in \{4,\ldots,n\}$, ce qui entraine que tous les points de Π^1_{2c} saturent I_C sauf celui t.q. $x_{(n-1)1} = x_{n3} = 1$ (i.e. le point de $\Pi^{1\,(n-1,3)}_{2c}$). Donc $\left|\Pi^1_{2c} \cap I_C\right| = \left|\Pi^1_{2c}\right| - 1$ et $rang_{V^1_{2c}}\left(\Pi^1_{2c} \cap I_C\right) \geq rang_{V^1_{2c}}\left(\Pi^1_{2c}\right) - 1 = \left|V^1_{2c}\right| - 1$.

Sur Π^2_{2c}: $\begin{cases} x_{n3} = 1 \Rightarrow x_{nc} = 0 \ \ (c = 4,\ldots,n) \\ x_{1n} = 1 \Rightarrow x_{12} = 0 \end{cases}$. Donc $\Pi^2_{2c} \cap I_C = \Pi^2_{2c}$.

Sur Π^3_{2c}: $x_{1j} = x_{nk} = 1\ \ (j,k \in \{3,\ldots,n\}\ j \neq k) \Rightarrow x_{12} = 0$. Si on rajoute la condition $x_{(n-1)1} = 1$ alors les points saturent I_C . Comme $x_{(n-1)1} = 1$ est valide pour $\Pi^{3\,(j,k)}_{2c}$ (cf. R2) pour tout $j,k \in \{3,\ldots,n\}\ j \neq k$, on a $\Pi^{3\,(j,k)}_{2c} \cap I_C \supset \Pi^{3\,(j,k)}_{2c} \cap \left\{x_{(n-1)1} = 1\right\} \neq \varnothing$.

En appliquant le lemme 1b) (en prenant pour A les sommets de P_n qui saturent I_C), on voit que les rangs r_1, r^j_{2a} $(j = 2,\ldots,n)$, r^i_{2b} $(i = 2,\ldots,n-1)$, r^2_{2c}, r^3_{2c} sont maximum et que r^1_{2c} est à au plus une unité de sa borne supérieure, et en appliquant le lemme1a) on obtient $\dim\left(P_n\right) \leq rang\left(\Pi \cap I_C\right)$.

• $n \geq p \geq 4$.
Supposons que le rang de Π_p est au moins $\dim(P_n)$ et que ces points saturent I_C pour $C=\{p,p+1,...,n\}$. Montrons que le rang de Π_{p+1} est au moins $\dim(P_n)$ et que ces points saturent $I_{C-\{p\}}$

$\rightarrow$ Π_p saturent $I_{C-\{p\}}$ sauf le point (de Π^1_{2c}) t.q. $x_{(n-1)1}=1, x_{np}=1, x_{12}=1$ et seulement celui-ci. En effet les points (extrêmes) ne saturant pas $I_{C-\{p\}}$ satisfont l'une des deux conditions $\begin{cases} \forall c \in \{p+1,\ldots,n\} \; x_{nc}=0 \wedge x_{(n-1)1}+x_{12}>1 \\ \exists c \in \{p+1,\ldots,n\} \; x_{nc}=1 \wedge x_{11}+x_{(n-1)1}+x_{12}<1 \end{cases}$ (cf proposition2)
Si un point de Π_p vérifie la première condition alors nécessairement $x_{np}=1$ (car il sature I_C par hypothèse de récurrence). Il n'existe pas de point de Π_p qui vérifie la deuxième condition car il ne saturerait pas I_C (si $p+1>n$ il n'y a pas de deuxième condition).
$\rightarrow$ Le point t.q. $x_{(n-2)1}=1, x_{np}=1, x_{13}=1$ sature $I_{C-\{p\}}$ et pas I_C (cf proposition2) autrement dit ce point appartient à $F(I_{C-\{p\}})$, la face induite par $I_{C-\{p\}}$, et pas à $F(I_C)$, la face induite par I_C . Ce dernier point entraîne que le point n'est pas non plus dans l'enveloppe affine de $F(I_C)$ sinon il serait dans $F(I_C)$ (pour toute face F d'un polytope P on a $F=(AffF)\cap P$ cf. Stoer, Witzgall 1970) et donc n'est pas affinement lié aux point de Π_p. Alors Π_{p+1} sont affinement indépendants et le rang de Π_{p+1} est au moins $\text{rang}(\Pi_p)-1+1 \geq \dim(P_n)$ par hypothèse de récurrence.

On a démontré que pour tout $n+1 \geq p \geq 4$, I_C est saturée par au moins $\dim(P_n)$ points de P_n affinement indépendants. Comme I_C induit une face propre de P_n (cf. la remarque qui suit proposition2), I_C induit une facette de P_n .

□

Théorème2
Pour $n \geq 4$, l'inégalité I'_C induit une facette de P_n si $1 \leq |C| \leq n-2-|A|$.

preuve: on procède par récurrence sur n.
• n=4. $n=4 \Rightarrow 1 \leq |C| \leq 2-|A|$ et alors $|A| \geq 1 \Rightarrow |C|=|A|=1$. On a donc une inégalité I_C ($|A|=1$) avec $|C|=n-3$ qui induit une facette de P_4 dans ce cas (théorème 1).
• n≥5. hypothèse de récurrence: l'inégalité I'_C induit une facette de P_{n-1} si $1 \leq |C| \leq (n-1)-2-|A|$.

Soit donc une inégalité I'_C t.q. $1 \leq |C| \leq n-2-|A|$.
Si $|A|=1$ alors I'_C est une inégalité I_C avec $|C| \leq n-3$ qui induit dans ce cas une facette de P_n d'après théorème1.
Supposons maintenant $|A| \geq 2$.
Sans perte de généralité (cf. section 2.1) choisissons $i=n-1, h=2, l=n, j=2, A=\{1,4,\ldots.\}, C=\{3,\ldots\}, B=N-\{2\}-A$ et montrons que $\dim(P_n)$ sommets affinement indépendants de P_n saturent $I'_C \equiv \sum_{c \in C} y_{(n-1)2\,nc} \leq \sum_{k \in A} y_{(n-1)2\,2k} + \sum_{c \in C} \sum_{\substack{b \in B \\ b \neq c}} y_{nc\,2b}$.

Pour cela on considère les points de l'ensemble Π de la définition1.

Sur Π_1, $x_{21}=0$ et donc un point de Π_1 sature I'_C ssi la projection de ce point sur V_1, les variables x, y indexées dans $(N-\{1\})\times(N-\{1\})$, sature $I'^{-}_C \equiv \sum_{c \in C} y_{(n-1)2\,nc} \leq \sum_{k \in A-\{1\}} y_{(n-1)2\,2k} + \sum_{c \in C} \sum_{\substack{b \in B \\ b \neq c}} y_{nc\,2b}$

inégalité construite avec $A-\{1\}$.
La projection de Π_1 sur V_1 est égale à l'ensemble des sommets de P_{n-1} (cf. R3). D'autre part $|C| \leq n-2-|A| = (n-1)-2-|A-\{1\}|$ donc par hypothèse de récurrence l'inégalité I'^{-}_C induit une facette de P_{n-1} et donc le rang sur V_1 de $\Pi_1 \cap I'_C$ est $\dim(P_{n-1})$.

Pour la suite, réécrivons les conditions requises pour saturer I'_C (proposition2)

$$\begin{cases} \forall c \in C \; x_{nc} = 0 \Rightarrow x_{(n-1)2} + \sum_{k \in A} x_{2k} \leq 1 \\ \exists c \in C \; x_{nc} = 1 \Rightarrow x_{22} + x_{(n-1)2} + \sum_{k \in A} x_{2k} \geq 1 \end{cases}$$

Sur Π^j_{2a} on a $x_{1j} = x_{n1} = 1$ et donc $\begin{cases} x_{nc} = 0 \;\; \forall c \in C \\ x_{(n-1)j} = 0 \end{cases}$.

Pour saturer I'_C, un point de Π^j_{2a} doit donc vérifier $x_{(n-1)2} + \sum_{k \in A} x_{2k} \leq 1$ soit encore $x_{(n-1)2} = 0 \vee \sum_{k \in A} x_{2k} = 0$ soit encore $x_{(n-1)2} = 0 \vee x_{2b} = 1$ pour un $b \notin A$ (1).

Si j=2 alors $x_{(n-1)2} = 0$ et tous les points de Π^j_{2a} saturent I'_C.

Supposons $j \neq 2$. Considérons PL_{n-2}, le polytope de l'affectation linéaire défini sur les variables x indexées dans $\left(N - \{1,n\}\right) \times \left(N - \{j,1\}\right)$. L'inégalité $x_{(n-1)2} \geq 0$ induit une facette de PL_{n-2} ($n \geq 4$) et donc dim(PL_{n-2}) sommets de PL_{n-2} linéairement indépendants (cf. R1) saturent cette inégalité ($x_{(n-1)2} = 0$). Un sommet n'appartenant pas à cette face i.e. t.q. $x_{(n-1)2} = 1$, est nécessairement non lié avec les points de la face (qui vérifient $x_{(n-1)2} = 0$), par ailleurs il existe un sommet t.q. $x_{(n-1)2} = 1$ et $x_{2b} = 1$ $b \in B - \{j\}$ car $|B| \geq 2$ et $1 \notin B$. On peut donc exhiber dim(PL_{n-2})+1 sommets de PL_{n-2} linéairement indépendants et vérifiant (1) et comme la projection de Π^j_{2a} sur V^j_{2a} est l'ensemble des sommets du polytope de l'affectation linéaire d'ordre n-2 (cf. R3), le rang sur V^j_{2a} de $\Pi^j_{2a} \cap I'_C$ est maximum c'est-à-dire dim(PL_{n-2})+1.

Sur Π^i_{2b} on a $x_{n2} = 1$ et donc $\begin{cases} x_{nc} = 0 \;\; \forall c \in C \;\; (2 \notin C) \\ x_{(n-1)2} = 0 \end{cases}$ et tous les points de Π^i_{2b} saturent I'_C.

Sur Π^1_{2c} on a $x_{i1} = x_{12} = x_{nk} = 1 \quad i \in \{2,\ldots,n-1\}$, $k \in \{3,\ldots,n\}$

$x_{12} = 1 \Rightarrow x_{(n-1)2} = 0$

Si $i = 2$ alors $x_{21} = 1$ et I'_C est saturée $(1 \in A)$

Si $k = 4$ alors $x_{n4} = 1$ et $x_{nc} = 0 \;\; \forall c \in C \;\; (4 \notin C)$ et I'_C est saturée

Si $i \neq 2$ et $k \neq 4$ alors la condition $x_{24} = 1$ est valide pour $\Pi^{1\,(i,k)}_{2c}$ (cf. R2) et

les points de $\Pi^{1\,(i,k)}_{2c} \cap \{x_{24} = 1\}$ saturent I'_C $(4 \in A \Rightarrow I'_C$ saturée$)$

Finalement $\forall i \in \{2,\ldots,n-1\}$, $k \in \{3,\ldots,n\}$ $\Pi^{1\,(i,k)}_{2c} \cap I'_C \neq \varnothing$

Sur Π^2_{2c} on a $x_{i1} = x_{n3} = x_{1n} = x_{h2} = 1 \quad i,h \in \{2,\ldots,n-1\} \;\; i \neq h$

$x_{n3} = 1$ et $3 \in C$

Si $i = 2$ ou $h = 2$ alors $x_{22} + x_{21} \geq 1$ $(1 \in A \Rightarrow I'_C$ saturée$)$

Si $i \neq 2$ et $h \neq 2$ alors la condition $x_{24} = 1$ est valide pour $\Pi^{2\,(i,h)}_{2c}$ (cf. R2) car n>4 et

les points de $\Pi^{2\,(i,h)}_{2c} \cap \{x_{24} = 1\}$ saturent I'_C $(4 \in A \Rightarrow I'_C$ saturée$)$

Finalement $\forall i,h \in \{2,\ldots,n-1\}$ $i \neq h$ $\Pi^{2\,(i,h)}_{2c} \cap I'_C \neq \varnothing$

Sur Π^3_{2c}, on a $x_{1j} = x_{nk} = 1 \ \ \forall j,k \in \{3,\ldots,n\}, j \neq k$. Si on rajoute la condition $x_{22} = 1$ alors les points saturent I'_C ($x_{22} = 1 \Rightarrow x_{(n-1)2} + \sum_{k \in A} x_{2k} = 0$). Comme $x_{22} = 1$ est valide pour $\Pi^{3\,(j,k)}_{2c}$ (cf. R2) pour tout $j,k \in \{3,\ldots,n\}, j \neq k$, on a $\Pi^{3\,(j,k)}_{2c} \cap I'_C \supset \Pi^{3\,(j,k)}_{2c} \cap \{x_{22} = 1\} \neq \varnothing$

En appliquant le lemme1b) (en prenant pour A les sommets de P_n qui saturent I'_C), on voit que les rangs r^j_{2a} ($j = 2$), r^i_{2b} ($i = 2,\ldots,n-1$), r^1_{2c}, r^2_{2c}, r^3_{2c} sont maximaux. Finalement tous les rangs sont maximaux sauf r_1 qui est à une unité de sa borne supérieure et donc en appliquant le lemme1a) on obtient que rang de $\Pi \cap I'_C$ est au moins dim(P_n). Comme I'_C induit une face propre de P_n (cf. la remarque qui suit proposition2), I'_C induit une facette de P_n.

□

Etude de P_4

Nous donnons ici quelques propriétés du polytope P_4 et en particulier nous montrons que sa complète description linéaire est obtenue à l'aide des inégalités I_C, I_L. La description de P_4 a été donnée dans Padberg, Rijal (1996) mais sans démonstration.

Propriété
P_4 peut être décrit par les inégalités I_C , I_L. Par ailleurs P_4 admet 144 facettes qui sont toutes des simplexes et donc P_4 est simplicial.

Preuve.

On note v_i (i=1,...,24) les sommets de P_4.
Pour tout i=1,...,24 on peut construire $P^{(i)}$ une application linéaire, bijective, t.q. $P^{(i)}(Q_4)=Q_4$ et $P^{(i)}(v_{24})=v_i$. En effet soit la permutation des colonnes $C^{(i)}$ définie de la façon suivante
$C^{(i)}(k)=k'$ ssi v_{24} satisfait x_{hk}=1 et v_i satisfait $x_{hk'}$=1 pour une ligne h
exemple: prenons v_{24} défini par la matrice $x=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et v_1 comme défini plus loin.
On a $C^{(1)}(1)=2$, $C^{(1)}(2)=3$, $C^{(1)}(3)=1$, $C^{(1)}(4)=4$.

En prenant la permutation des lignes $L^{(i)}$ égale à l'identité, $C^{(i)}$ et $L^{(i)}$ permettent de construire une application $P^{(i)}$ (cf. section 2.1) satisfaisant les critères annoncés et on a:
$Q_4 \backslash \{v_j\} = Q_4 \backslash \{P^{(j)}P^{(i)-1}(v_i)\} = P^{(j)}P^{(i)-1}(Q_4 \backslash \{v_i\})$
Ainsi tous les sous-ensembles de 23 sommets sont isomorphes et comme P_4 contient 23 sommets affinement indépendants (dim(P_4)=22 cf. R1), toute famille de 23 sommets est affinement indépendante. Par conséquent toute face propre de P_4 contient moins de 23 sommets et toute facette contient nécessairement 22 sommets. Les facettes de P_4 sont donc des simplexes de 22 sommets de P_4 et elles sont les facettes, ne rencontrant pas l'intérieur relatif de P_4, des simplexes de 23 sommets de P_4.
L'étude des facettes de P_4 peut se ramener à l'étude des facettes d'un seul des simplexes de 23 sommets, par exemple S=Conv$\{v_1,v_2,...,v_{23}\}$. Ainsi si $a(x,y)\geq 0$ est une inégalité qui induit une facette de S et qui est valide pour P_4 alors $a(x,y)\geq 0$ induit une facette de P_4 et $a(P^{(i)-1}(x,y))\geq 0$ est une inégalité valide pour P_4 qui induit une facette de P_4 pour tout $i \neq 24$.

Choisissons les sommets $v_1,v_2,...,v_{23}$ définis par les matrices (x_{ij}) suivantes:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ v_1 $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ v_2 $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ v_3 $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v_4 $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ v_5 $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v_6

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

v_7 v_8 v_9 v_{10} v_{11} v_{12}

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

v_{13} v_{14} v_{15} v_{16}

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

v_{17} v_{18} v_{19} v_{20} v_{21} v_{22} v_{23}

Soit un vecteur v t.q. $v= \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+...+\lambda_{23} v_{23}$ (1)
$v_1,v_2,...,v_{23}$ sont linéairement indépendants car l'enveloppe affine de S ne contient pas 0 (cf. R1) et l'écriture (1) est unique, en particulier si $v=v_i$ alors $\lambda_i=1$ et $\lambda_j=0$ pour tout $j\neq i$ (2).
Projetons (1) sur les variables y suivantes:

$y_{4413} = \lambda_{23}$

$y_{3144} = \lambda_{22} + \lambda_{23}$

$y_{2144} = \lambda_{21}$

$y_{3112} = \lambda_{20} + \lambda_{22}$

$y_{3122} = \lambda_{19} + \lambda_{23}$

$y_{2112} = \lambda_{18} + \lambda_{21}$

$y_{2132} = \lambda_{17}$

$y_{3123} = \lambda_{16} + \lambda_{22}$

$y_{3113} = \lambda_{15} + \lambda_{23}$

$y_{2133} = \lambda_{14} + \lambda_{21}$

$y_{2113} = \lambda_{13}$

$y_{1432} = \lambda_{12} + \lambda_{17}$

$y_{1433} = \lambda_{11} + \lambda_{14}$

$y_{1332} = \lambda_{10}$

$y_{1334} = \lambda_9 + \lambda_{13}$

$y_{1233} = \lambda_8 + \lambda_{21}$

$y_{1234} = \lambda_7 + \lambda_{18}$

$y_{3342} = \lambda_6 + \lambda_{14}$

$y_{3243} = \lambda_5 + \lambda_{17}$

$y_{3442} = \lambda_4 + \lambda_{13}$

$y_{3244} = \lambda_3$

$y_{2234} = \lambda_2 + \lambda_9$

$y_{3344} = \lambda_1 + \lambda_{21}$

On a un système triangulaire que l'on inverse facilement et l'on obtient:

$\lambda_{23} = y_{4413}$

$\lambda_{22} = y_{3144} - y_{4413}$

$\lambda_{21} = y_{2144}$

$\lambda_{20} = y_{3112} - y_{3144} + y_{4413}$

$\lambda_{19} = y_{3122} - y_{4413}$

$\lambda_{18} = y_{2112} - y_{2144}$

$\lambda_{17} = y_{2132}$

$\lambda_{16} = y_{3123} - y_{3144} + y_{4413}$

$\lambda_{15} = y_{3113} - y_{4413}$

$\lambda_{14} = y_{2133} - y_{2144}$

$\lambda_{13} = y_{2113}$

$\lambda_{12} = y_{1432} - y_{2132}$

$\lambda_{11} = y_{1433} - y_{2133} + y_{2144}$

$\lambda_{10} = y_{1332}$

$\lambda_{9} = y_{1334} - y_{2113}$

$\lambda_{8} = y_{1233} - y_{2144}$

$\lambda_{7} = y_{1234} - y_{2112} + y_{2144}$

$\lambda_{6} = y_{3342} - y_{2133} + y_{2144}$

$\lambda_{5} = y_{3243} - y_{2132}$

$\lambda_{4} = y_{3442} - y_{2113}$

$\lambda_{3} = y_{3244}$

$\lambda_{2} = y_{2234} - y_{1334} + y_{2113}$

$\lambda_{1} = y_{3344} - y_{2144}$

Maintenant si v appartient à S alors $\lambda_i \geq 0$ (i=1,...,23) et on obtient 23 inégalités nécessairement valides pour S.
D'après (2), λ_i=0 est vérifiée par v_j pour tout $j \neq i$ soit par 22 sommets de S et l'inégalité associée à $\lambda_i \geq 0$ induit une facette de S. De plus pour $i' \neq i$ $v_{i'}$ vérifie $\lambda_{i'}$=1 et λ_i=0, v_i vérifie λ_i=1 et $\lambda_{i'}$=0 et les facettes associées à $\lambda_i \geq 0$ et $\lambda_{i'} \geq 0$ sont distinctes. On a ainsi exhibé 23 inégalités valides induisant les 23 facettes de S (un simplexe a autant de facettes que de sommets). Parmi ces 23 inégalités, on vérifie facilement que 11 d'entre elles (à savoir celles associées à $\lambda_{22},\lambda_{19},\lambda_{18},\lambda_{15},\lambda_{14},\lambda_{12},\lambda_9,\lambda_8,\lambda_5,\lambda_4,\lambda_1$) sont non-valides pour P_4 et que les 12 autres sont dans la famille I_C ou I_L avec $0 \leq |C| \leq 1$ et $0 \leq |L| \leq 1$.

Soit F une facette quelconque de P_4 alors il existe v_i, v_j ($i \neq j$) t.q. F est l'enveloppe convexe de $\{v_1,v_2,...,v_{24}\} \setminus \{v_i,v_j\}$. F est donc facette des simplexes $P^{(i)}(S)$ et $P^{(j)}(S)$ et seulement ceux-ci. Le nombre de facettes de P_4 est donc finalement $\frac{12 \times 24}{2} = 144$.

□

Références

W.P. Adams, T.A. Johnson. *Improved linear programming-based lower bounds for the quadratic assignment problem*. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theorical Computer Science 16 (1994) 43-75.

W.P. Adams, H.D. Sherali. *A tight linearization and an algorithm for zero-one quadratic programming problems*. Management Science 32 n°10 (1986) 1274-1290.

A.A. Assad, W. Xu. *On lower bounds for a class of quadratic 0-1 programs*. Operations Research Letters 4 n°4 (1985) 175-180.

M.S. Bazaraa, H.D. Sherali. *Benders' partitioning scheme applied to a new formulation of the quadratic assignment problem*. Naval Research Logistics Quaterly 27 (1980) 29-41.

A. Billionnet, S. Elloumi, A. Faye. *The Quadratic Assignment Polytope*. Rapport interne (1997).

G. Birkoff. *Tres observaciones sobre el algebra lineal*. Univ. Nac. Tucuman Rev. Ser. A (1946) 147-151

A. Blanchard. *Algorithme de génération de coupes pour l'affectation quadratique*. Rapport de stage 1ere année I.I.E., Evry (1998).

A. Brondsted. *An introduction to Convex Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag. (1983)

E. Burkard, T. Bönniger. *A heuristic for quadratic Boolean programs with applications to quadratic assignment problems*. European Journal of Operational Research 13 (1983) 374-386.

R.E. Burkard, S.E. Karisch, F. Rendl. *Quadratic Assignment Problem Library*. European Journal of Operational Research, 55 115-119 (1991).

N. Christofides, A. Mingozzi, P. Toth. *Contributions to the quadratic assignment problem*. European Journal of Operational Research 4 (1980) 243-247.

A.M. Frieze, J. Yadegar. *On the quadratic assignment problem*. Discrete Applied Mathematics 5 (1983) 89-98.

M.R Garey, D.S Johnson. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-Completeness*. (1979)

S.E. Karisch. *Nonlinear approaches for Quadratic Assignment and Graph Partition Problems*. Report 301-CDLDO 54, Christian Doppler Laboratorium für Diskrete Optimierung, Technische Universität Graz, Institut für Mathematik (September 1995).

L. Kaufman, F. Broeckx. *An algorithm for the quadratic assignment problem using Benders' decomposition*. European Journal of Operational Research 2 (1978) 207-211.

E.L. Lawler. *The quadratic assignment problem*. Management Science 9 (1963) 586-599.

M. Marcus, H. Minc. *A survey of matrix theory and matrix inequalities*. Allyn and Bacon, Inc., Boston (1964).

G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey: *Integer and combinatorial optimization*. Wiley Interscience (1988)

M.W. Padberg, M.P. Rijal. *Location, Sheduling, Design and Integer Programming,* Chapter 7 *Quadratic Assignment Polytopes*. Kluwer Academic Publishers (1996).

P.M. Pardalos, F. Rendl, H. Wolkowicz. The Quadratic Assignment Problem: A survey and Recent Developments. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theorical Computer Science 16 (1994) 1-32.

M.G.C. Resende, K.G. Ramakrishnan, Z. Drezner. *Computing Lower Bounds for the Quadratic assignment problem with an interior point algorithm for linear programming*. Operations Research Vol.43, n°5, September-October (1995) 781-791.

J. Stoer, C. Witzgall. *Convexity and optimization in finite dimensions* I. Springer Verlag (1970).

N. Wicker. *Affectation Quadratique et Méthodes Polyédriques*. Mémoire d'ingénieur IIE et DEA d'IRO IIE-CNAM-ParisVI, Evry (1999).