Reformulation d'un programme quadratique avec un objectif déjà convexe : la méthode QCR appliquée à un problème d'investissement

A. Billionnet[1], S. Elloumi[2], et M.-C. Plateau[2]

[1] CEDRIC, Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint-Martin, 75141 Paris
{mc.plateau,elloumi}@cnam.fr

[2] CEDRIC, Ecole Nationale SupÕrieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise , 18 allée Jean Rostand, 91025 Evry
billionnet@ensiie.fr

Un investisseur souhaite retenir p projets parmi n. Chaque projet a le même coût et a un rendement représenté par une variable aléatoire. L'espérance de rendement e_i $(i = 1, \ldots, n)$, la variance σ_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$, et la covariance associée à chaque paire de projets, σ_{ij} $(i = 1, \ldots, n-1; j = i+1, \ldots, n)$ sont connues ; elles sont estimées, par exemple, à partir d'un historique des rendements observés. Le problème consiste à choisir p projets de façon à obtenir une espérance de rendement global supérieure ou égale à une valeur fixée ρ tout en minimisant le risque, c'est-à-dire la variance de ce rendement. Le programme mathématique convexe en variables bivalentes associé est :

$$(PI) \quad : \quad \min \left\{ r(x) = \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j : \sum_{i=1}^{n} x_i = p, \sum_{i=1}^{n} e_i x_i \geq p\rho, \ x \in \{0,1\}^n \right\}$$

La fonction objectif de (PI) est quadratique et les contraintes sont linéaires.

Schématiquement, l'investisseur souhaite constituer un portefeuille de projets et arbitrer entre les gains et les risques. Dans ce problème d'investissement, que l'on peut rapprocher du modèle de Markowitz [3], il doit s'assurer le risque minimal à rendement donné.

Le hessien de la fonction économique de (PI) n'est autre que la matrice de variance-covariance : il est donc semidéfini positif. Ainsi, $r(x)$ est une fonction convexe et on peut soumettre (PI) directement à des solveurs standards de programmation quadratique en variables 0-1 avec un objectif convexe et des contraintes linéaires. Ces solveurs utilisent généralement un schéma classique de séparation et d'évaluation progressive (branch-and-bound) fondée sur un minorant obtenu par relaxation continue. Leur efficacité dépend donc du minorant déterminé à la racine de l'arborescence de recherche. Nous nous intéressons ici aux possibles améliorations de ce minorant. Pour ce faire, nous reformulons (PI) par la méthode QCR [1]. Cette méthode a tout d'abord été développée dans le but de transformer un programme quadratique en variables 0-1 avec une fonction objectif non convexe en un programme quadratique en variables 0-1 avec une fonction objectif convexe. QCR a ainsi été testé sur des problèmes quadratiques avec un objectif non convexe -et des contraintes linéaires- tels que le problème du k-cluster [1] et de la bipartition de graphe [2]. L'idée ici est d'appliquer la méthode à un problème déjà convexe ; on parle alors de *reconvexification*. On étudie, dans ce travail, les améliorations obtenues sur le minorant donné par la relaxation continue du problème reformulé et sur le temps de calcul global.

Rappelons les différentes étapes de QCR appliquée à (PI). La fonction économique convexe $r(x)$ est remplacée par :

$$r_{\alpha,u}(x) = \tfrac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - p \right) + \sum_{i=1}^{n} u_i (x_i^2 - x_i)$$

$r_{\alpha,u}(x) = r(x)$ pour toute solution admissible de (PI).

Notons α^* et u^* les valeurs de α et u solutions du problème :

$$\max_{\substack{\alpha\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^n \\ r_{\alpha,u}(x) convexe}} \left\{ \quad \min\left\{ r(x) = \frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j : \sum_{i=1}^{n}x_i = p, \sum_{i=1}^{n}e_ix_i \geq p\rho,\ x\in[0,1]^n \right\}\right\}$$

Ces valeurs optimales de α et u sont calculées grâce au programme semidéfini suivant :

$$\begin{array}{rlll}
(SDCP) : \min & \frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}X_{ij} & & \\
\text{s.c.} & X_{ii} = x_i & i = 1,\ldots,n & (1) \quad \leftarrow u_i^* \\
& -px_i + \sum_{j=1}^{n}X_{ij} = 0 & i = 1,\ldots,n & (2) \quad \leftarrow \alpha_i^* \\
& \sum_{i=1}^{n}x_i = p & & \\
& \sum_{i=1}^{n}e_ix_i \geq p\rho & & \\
& \begin{pmatrix} 1 & x^t \\ x & X \end{pmatrix} \succeq 0 & & \\
& x\in\mathbb{R}^n, X\in S_n & &
\end{array}$$

où S_n représente l'ensemble des matrices réelles symétriques de dimension $n\times n$.
u^* et α^* correspondent aux valeurs optimales des variables duales associées aux contraintes (1) et (2) respectivement. Finalement, le problème est résolu en soumettant à un solveur MIQP le problème reformulé, toujours convexe :

$$(PI_{\alpha^*,u^*}) \quad : \quad \min\left\{ r_{\alpha^*,u^*}(x) : \sum_{i=1}^{n}x_i = p, \sum_{i=1}^{n}e_ix_i \geq p\rho,\ x\in\{0,1\}^n \right\}$$

Les résultats obtenus avec cette approche sont très encourageants. En effet, reformuler (PI) avec QCR peut se révéler bien plus efficace que de soumettre ce problème directement aux solveurs standards.

Bien sûr, si le temps de résolution directe de (PI) est inférieur à quelques secondes alors la reformulation n'est pas nécessaire puisque le pré-traitement (résolution de la relaxation semidéfinie positive $(SDPI)$) peut se révéler trop coûteux en temps de calcul. Cependant, si le temps CPU requis par le branch-and-bound est supérieur à quelques minutes, alors la reformulation QCR est très intéressante : le minorant obtenu par relaxation continue de (PI_{α^*,u^*}) est nettement supérieur à celui obtenu par relaxation continue de (PI). Ainsi, dans certains cas, le pré-traitement par QCR permet de diminuer considérablement le temps de résolution.

Références

1. Billionnet,A. Elloumi,S. and Plateau,M.C. : Convex quadratic programming for exact solution of 0-1 quadratic programs. Technical Report CEDRIC. http ://cedric.cnam.fr/PUBLIS/RC.pdf (2005)
2. Billionnet,A. Elloumi,S. and Plateau,M.C. : Quadratic Convex Reformulation : a computational study of the graph bisection problem. Technical Report CEDRIC. http ://cedric.cnam.fr/PUBLIS/RC1003.pdf
3. Markowitz,H. : Portfolio selection. Journal of Finance 7 :77-91 (1952)